

Um erro comum no traçado de diagramas de Nyquist

Paulo J. S. G. Ferreira

Resumo – No decurso da minha actividade docente notei uma incorrecção bastante divulgada no traçado de certo tipo de diagramas de Nyquist, ou diagramas polares. O erro surge quando a função cujo traçado se pretende obter é uma fracção racional de tipo não nulo (isto é, tem um pólo simples ou múltiplo na origem). O objectivo deste artigo é corrigir esse erro, que pode causar alguma confusão a alunos que se encontrem a estudar o assunto.

Abstract – There is a common misconception regarding Nyquist plots, or polar plots, of rational functions of nonzero type. The plots often show branches which tend to infinity while approaching either the real or imaginary axis. In this note it is shown that this is incorrect in general. The reasons behind this misconception are clarified.

I. TRAÇADOS DE NYQUIST

O diagrama (ou traçado) de Nyquist de uma função complexa de variável complexa $H(s)$ é o lugar geométrico, no plano complexo, dos pontos¹ $\{ReH(j\omega), ImH(j\omega)\}$ em função de $s = j\omega$.

Na prática, a função $H(s)$ é frequentemente um quociente de polinómios em s com coeficientes reais. Para qualquer destas funções tem-se $H^*(s) = H(s^*)$, e logo

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega). \quad (1)$$

Se D for um qualquer conjunto de pontos do plano complexo, o conjunto D^* formado pelo conjugado de todos os pontos de D pode obter-se geometricamente realizando uma simetria em relação ao eixo real.

Este facto e a equação (1) significam que o diagrama de Nyquist de um quociente de polinómios de coeficientes reais fica definido pelo traçado parcelar para valores de ω não negativos. O traçado para valores negativos de ω obtém-se deste realizando uma simetria em relação ao eixo real. Para facilitar a leitura dos traçados é comum orientá-los, tomando o ponto correspondente a $\omega = 0$ como origem e o ponto correspondente a $\omega \rightarrow \infty$ como término.

II. O ERRO

Existe um erro bastante divulgado no traçado de certo tipo de diagramas de Nyquist. Para perceber em que consiste o erro considerem-se os seguintes exemplos.

Exemplo 1: Esboçe o diagrama de Nyquist de

$$H(s) = \frac{s+1}{s}$$

¹Designamos por $Re s$ e $Im s$, respectivamente, a parte real e o coeficiente da parte imaginária do complexo s . A unidade imaginária é representada pela letra j .

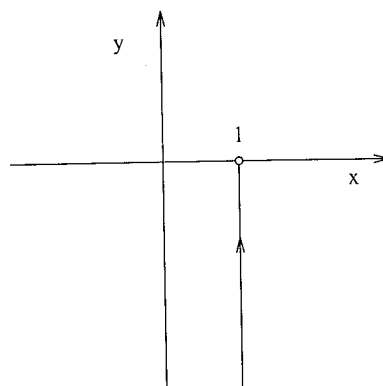


Fig. 1 - Traçado de Nyquist de $H(s) = (1 + s)/s$.

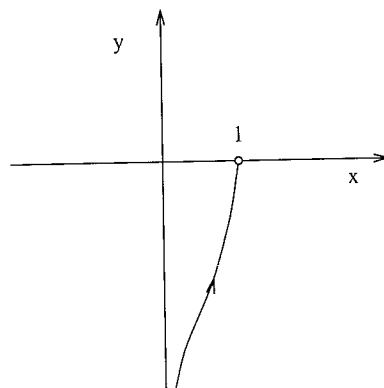


Fig. 2 - Traçado habitual (e incorrecto) para $H(s) = (1 + s)/s$.

Temos

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{j\omega} = 1 - j\frac{1}{\omega}$$

Logo,

$$\begin{cases} ReH(j\omega) = 1, \\ ImH(j\omega) = -\frac{1}{\omega}. \end{cases}$$

O lugar geométrico dos pontos do plano complexo descritos quando ω percorre $(0, \infty)$ é portanto uma semirecta vertical que termina no ponto $(1, 0)$ (figura 1).

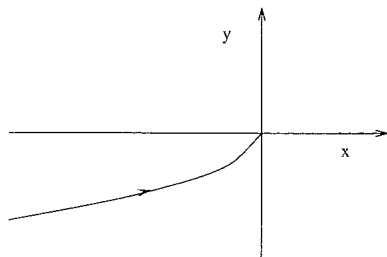
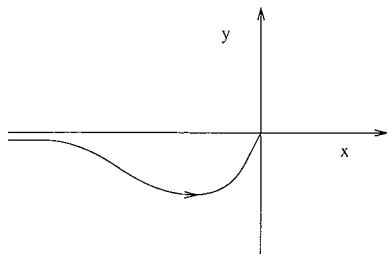
A aplicação de certas regras gerais de traçado, que posteriormente criticarei, conduz a um traçado incorrecto, semelhante ao representado na figura 2.

Exemplo 2: Esboçe o diagrama de Nyquist de

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

Neste caso, tem-se

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{-\omega^2}$$

Fig. 3 - Traçado de Nyquist de $H(s) = (1 + s)/s^2$.Fig. 4 - Traçado habitual (e incorrecto) para $H(s) = (1 + s)/s^2$.

pelo que

$$\begin{cases} \operatorname{Re}H(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}, \\ \operatorname{Im}H(j\omega) = -\frac{1}{\omega}. \end{cases}$$

Qual é a equação desta curva? Tomando, para simplificar a notação, $x = \operatorname{Re}H(j\omega)$ e $y = \operatorname{Im}H(j\omega)$, tem-se

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\omega^2}, \\ y = -\frac{1}{\omega}. \end{cases}$$

Eliminando ω obtém-se

$$x = -y^2.$$

Esta parábola está representada na figura 3. O traçado habitual (e incorrecto) seria semelhante ao que se apresenta na figura 4.

Praticamente todos os livros sobre controlo clássico descrevem regras para o traçado destes diagramas. Veja-se, por exemplo, o livro de D'Azzo e Houpis [1], ou qualquer das edições [2], [3] do livro de Dorf.

A incorrecção manifesta-se de uma maneira curiosa: a curva errada *aproxima-se* progressivamente do eixo horizontal à medida que $\omega \rightarrow 0$. Na realidade, nos traçados correctos isto pode não acontecer. No primeiro exemplo, a parte real dos pontos pertencentes ao traçado é sempre unitária, mantendo-se por isso a uma distância fixa do eixo y . Nos restantes exemplos, a curva *afasta-se* mesmo cada vez mais dos eixos quando $\omega \rightarrow 0$.

III. CAUSA DO ERRO E CORRECÇÃO

O erro que aponto deve-se à utilização do seguinte argumento. Seja $H(s)$ uma fracção racional de tipo n (n um inteiro não negativo), isto é, o quociente de dois polinómios sem zeros comuns e da forma

$$H(s) = \frac{P(s)}{s^n Q(s)}.$$

Assumo, para simplificar, que os polinómios têm coeficientes reais.

Se $H(s)$ é uma fracção racional de tipo n então o comportamento do traçado de Nyquist quando $\omega \rightarrow 0$ obtém-se estudando

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{P(j\omega)}{(j\omega)^n Q(j\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) e^{j\phi(\omega)},$$

onde $M(\omega)$ designa o módulo

$$M(\omega) = \left| \frac{P(j\omega)}{(j\omega)^n Q(j\omega)} \right|$$

e $\phi(\omega)$ o argumento de

$$\frac{P(j\omega)}{(j\omega)^n Q(j\omega)}.$$

O limite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} M(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{P(j\omega)}{(j\omega)^n Q(j\omega)} \right|$$

não existe (é infinito).

As hipóteses acerca de $P(s)$ e $Q(s)$ implicam que $P(0)$ e $Q(0)$ sejam reais não nulos. Logo,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = \text{inteiro} \times \frac{\pi}{2}.$$

A conclusão errada que é comum extrair é fruto da seguinte sequência de raciocínios correctos.

- Um ponto do plano complexo cujo argumento é um múltiplo de $\pi/2$ é um ponto de um dos eixos real ou imaginário.
- Considerando argumentos em $[0, 2\pi]$ apenas, se o argumento de s for 0 então s é um real positivo; se for $\pi/2$ é um imaginário puro com coeficiente positivo; se for π é um real negativo; se for $3\pi/2$ é um imaginário puro com coeficiente negativo.
- Quando $\omega \rightarrow 0$ o argumento de uma fracção racional $H(s)$ tende para um múltiplo de $\pi/2$.

Conclusão errada em geral: quando $\omega \rightarrow 0$, o diagrama de Nyquist de uma fracção racional $H(s)$ aproxima-se de um dos eixos (real ou imaginário), por valores positivos ou negativos.

Para verificar que esta afirmação é errada pode pensar-se do seguinte modo. Se a fracção racional tiver pólos na origem, $\phi(\omega)$ tende de facto para um múltiplo de $\pi/2$ quando ω tende para zero, mas o módulo $M(\omega)$ tende para infinito. É este último factor que torna inválida a conclusão, como aliás os exemplos dados mostram claramente.

No primeiro desses exemplos, que se refere a uma fracção de tipo 1, com um pólo simples na origem, o traçado não se aproxima do eixo imaginário quando $\omega \rightarrow 0$ (todos os pontos do traçado têm parte real unitária!). Contudo, $\phi(\omega)$ tende de facto para $3\pi/2$.

No segundo exemplo, para uma fracção de tipo 2, com um pólo duplo na origem, o traçado é parabólico e afasta-se de qualquer dos dois eixos (real ou imaginário), quando $\omega \rightarrow 0$. Isto apesar de $\phi(\omega)$ convergir, neste caso, para π .

IV. CONCLUSÃO

Considere-se a sucessão de complexos definida por

$$s_n = M_n e^{j\phi_n}.$$

Se o limite desta sucessão for um ponto situado sobre um dos eixos (real ou imaginário) do plano complexo, a uma distância finita da origem, então a sucessão ϕ_n convergirá necessariamente para um múltiplo de $\pi/2$.

Contudo, pode acontecer que a sucessão ϕ_n convirja para um múltiplo de $\pi/2$ sem que s_n convirja para um ponto dos eixos real ou imaginário. Qualquer dos exemplos anteriormente discutidos prova este facto. É claro que então o módulo dos s_n crescerá ilimitadamente com n , ou seja, o limite dos s_n é o ponto no infinito.

A sucessão s_n pode aproximar-se do ponto no infinito, mantendo-se ϕ_n convergente para um múltiplo de $\pi/2$, sem que isso implique que a aproximação ao ponto no infinito se faça, no limite, sobre o eixo real ou sobre o eixo imaginário.

Este facto obriga a algum cuidado no traçado de diagramas de Nyquist de certas funções $H(s)$. Neste artigo examinei o assunto em detalhe e chamei a atenção para um erro comum existente na bibliografia sobre o assunto. Espero que esta discussão seja útil aos alunos que estudam o assunto, e que potencialmente se poderão confrontar com o problema, sobretudo se usarem como auxiliares de traçado programas como o Matlab [4].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. J. D'Azzo e C. H. Houpis. *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*. McGraw-Hill International Editions, New York, 1988.
- [2] R. C. Dorf. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, segunda edição, 1974.
- [3] R. C. Dorf. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, sexta edição, 1992.
- [4] The Mathworks, Inc. *The Student Edition of Matlab: Version 4: User's Guide*. The Matlab Curriculum Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.