

Sincronização de Osciladores

J. Nuno Matos, Jorge Perez, J. Carlos Neves

Resumo- Este artigo complementa um outro intitulado “Introdução à Sincronização de Osciladores” [1] sendo a conclusão do resumo do trabalho realizado pelo primeiro autor na sua Dissertação de Doutoramento [2], relacionado com osciladores sincronizados.

Utilizando o modelo desenvolvido para a malha de sincronismo de fase com injeção (PLLI) comparam-se, através de simulação, as características desta malha com as duma PLL tradicional.

Segue-se a validação do modelo baseada em resultados obtidos com um protótipo experimental.

Abstract- This paper complete the description of synchronizing systems, beginning in “Introdução à Sincronização de Osciladores” [1].

It describes, in a concise form, part of the PhD work [2] that concerns with the validity of the obtained model for the Phase Locked Loop with Injection (PLLI) and compares the behaviour of a Phase Locked Loop (PLL) against the same loop with injection.

I. INTRODUÇÃO

No artigo anterior concluiu-se que a dinâmica de uma PLLI é regida por uma equação diferencial da mesma ordem da equação diferencial da PLL que lhe serve de base, mas com os coeficientes dependentes também da injeção. Devem contudo ter-se presente as restrições impostas no desenvolvimento do modelo do oscilador com injeção: baixo nível de injeção e frequência de injeção dentro da banda a 3 dB do circuito sintonizado equivalente do oscilador.

Agora analisa-se o comportamento duma malha de engate de fase com injeção, sendo efectuado o estudo do comportamento em aquisição e em sincronismo, de modo independente, reduzindo assim a complexidade da análise. Quanto à aquisição, considera-se o sinal de entrada sem ruído. Por outro lado, a análise da resposta da malha a um sinal imerso em ruído aditivo é obtida com a malha em regime síncrono.

Uma PLL é bem modelada pela seguinte equação diferencial [2]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{d\theta_s(t)}{dt} - K_{PLL} \int_0^t \sin\varphi(u)f(t-u)du \quad (1)$$

onde $K_{PLL} = K_{VCO} * A * K_i * K_m$, sendo K_{VCO} a razão entre o desvio de frequência angular à saída do VCO e a tensão

que o provoca, A é a amplitude do sinal de entrada considerada constante, K_i a amplitude do sinal à saída do VCO e K_m uma constante do comparador de fase; $\varphi(t)$ é o erro de fase, $\theta_s(t)$ é a diferença entre a fase do sinal de entrada e a fase do VCO em regime livre ($\omega_0 t$), e $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace da função de transferência do filtro de malha, $F(s)$.

Partindo do modelo não linear da PLL apresentado, e universalmente aceite [3,4], e dum modelo para o oscilador sincronizado por injeção (ILO), equivalente ao proposto por Adler [5] com pequenas alterações, obtém-se o seguinte modelo para a PLLI.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - K_{inj} \sin(\varphi + g) - K_{PLL} \int_0^t f(t-u) \sin\varphi(u) du \quad (2)$$

Esta equação representa a dinâmica duma malha de engate de fase com injeção notando-se que, relativamente à equação representativa da PLL (1), aparece mais uma parcela devida à injeção: $K_{inj} \sin(\varphi + g)$.

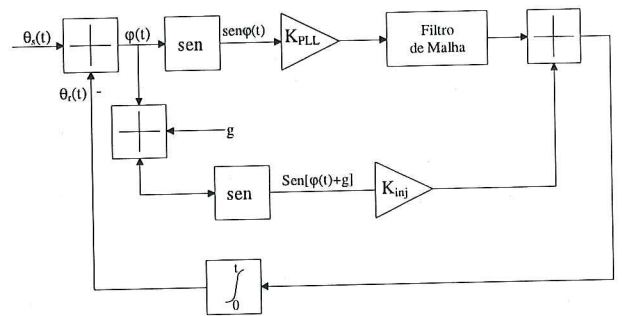


Fig. 1 - Modelo de PLLI em diagrama de blocos.

A representação gráfica deste modelo é feita na figura 1, sendo de realçar a existência de dois blocos equivalentes a comparadores de fase. Este facto é de importância primordial nas possíveis aplicações deste sistema.

O modelo obtido para a PLLI indica que o sinal actuante sobre o bloco integrador, correspondente ao VCO, é a soma do sinal proveniente do filtro de malha com um sinal relativo à injeção. A relação K_{inj}/K_{PLL} controla o peso relativo da injeção nas características da PLLI. Caso $K_{inj}=0$ está-se em presença de uma PLL convencional, ao passo que se $K_{PLL}=0$ a malha será equivalente a um oscilador sincronizado por injeção. Estando os dois ramos activos a resposta global é função do filtro de malha

e das constantes K_{inj} , g e K_{PLL} . Convém chamar a atenção para o facto de tanto K_{PLL} como K_{inj} serem dependentes da amplitude do sinal de entrada, implicando que uma alteração na amplitude deste sinal provoque alteração no desempenho da malha.

A influência da injeção no desempenho da PLLI é função da potência de injeção e do desfasamento entre o sinal de injeção e o sinal à entrada do comparador de fase principal. O desfasamento g é de importância primordial nas características da PLLI podendo, num caso extremo, os efeitos dos dois caminhos, devidos à PLL e à injeção, cancelarem-se e a malha perder controlo sobre o oscilador.

II. COMPORTAMENTO DA PLLI: RESULTADOS OBTIDOS POR SIMULAÇÃO

A. Características da malha em regime linear

Quando a malha termina o processo de aquisição, passando ao estado de seguimento, o sistema opera normalmente perto do ponto de equilíbrio onde a sua resposta é, em boa aproximação, linear.

Na figura 2 está representada uma PLLI com os seus quatro blocos funcionais: o comparador de fase e filtro de malha usuais em PLLs, um oscilador controlado por tensão com um segundo sinal actuante correspondente ao sinal de injeção e um quarto elemento que controla a fase do sinal de injeção.

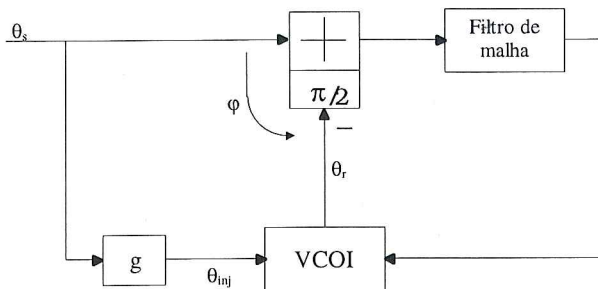


Fig. 2 - Diagrama de blocos de uma PLLI com os elementos essenciais à compreensão do seu funcionamento em regime linear.

Partindo da equação (2), supondo $\varphi(t) \ll 1$, obtém-se a função de transferência em malha fechada, $H_{PLLI}(s) = \theta_r(s)/\theta_s(s)$.

$$H_{PLLI}(s) = \frac{K_{inj} \cos g + K_{PLL} F(s)}{s + K_{inj} \cos g + K_{PLL} F(s)} \quad (3)$$

Analisando esta equação pode-se concluir de imediato que a injeção não altera a ordem da função de transferência relativamente a uma PLL com o mesmo filtro de malha, alterando contudo a resposta em malha fechada da PLL por adição das parcelas ' $K_{inj} \cos g$ '.

Como seria de esperar, quando a potência de injeção se anula, $K_{inj} = 0$, a função de transferência torna-se idêntica à de uma PLL. Por outro lado, se a injeção for feita em

quadratura, ou seja $g = \pi/2$ rad, a injeção também não irá alterar a resposta da malha. Nesta situação, em regime síncrono, a única alteração relativamente à PLL prende-se com o facto de o domínio de validade das aproximações efectuadas ser mais reduzido, implicando uma zona de operação linear da PLLI menor que a da PLL. As aproximações efectuadas, $\sin \varphi \approx \varphi$ e $\cos \varphi \approx 1$, têm domínio de validade, respectivamente $\varphi^3/6 \ll \varphi$ e $\varphi^2 \ll 1$. No caso da PLL convencional, a sua função de transferência é obtida impondo somente a primeira restrição, permitindo que a gama de variação de φ , mantendo a malha em operação linear, seja praticamente dupla.

Outra situação que interessa abordar é a que ocorre quando a PLLI funciona como um ILO em que a frequência livre de oscilação é controlada por uma malha de engate de fase. Está-se perante uma PLL sem filtro de malha, $F(s) = 1$, ou cujos pólos e zeros se encontram numa frequência de tal modo elevada que não afectam o comportamento do oscilador com injeção. Este sistema torna-se particularmente útil em divisores ou multiplicadores de frequência, baseados em osciladores sincronizados por injeção, podendo-se aumentar de forma significativa a gama de sincronização sem alterar o factor de qualidade do oscilador ou a potência de injeção.

Em seguida analisa-se a resposta da PLLI a um ruído branco gaussiano estacionário de banda estreita associado a um sinal, por exemplo, uma portadora de radiofrequência.

Num canal de telecomunicações em radiofrequência existem várias fontes perturbadoras do sinal de interesse. O ruído radiado pelo circuito emissor em simultâneo com o sinal, o ruído galáctico, o ruído da antena e ainda o ruído devido aos circuitos de recepção, contribuem, entre outros, para a degradação da qualidade da informação recebida. Este conjunto é bem modelado como sendo um ruído térmico a uma dada temperatura equivalente com características dum processo aleatório gaussiano e estacionário [6].

Demonstra-se [6] que, face a um ruído Gaussiano estacionário, a densidade espectral de potência de ruído à saída está relacionada com a densidade espectral de potência de ruído à entrada do sistema linear, neste caso a PLLI, pela seguinte equação

$$S_o(\omega) = |H_{PLLI}(j\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (4)$$

Deste modo, a resposta da PLLI ao tipo de ruído em questão, relativamente à resposta da PLL, pode ser feita por comparação das respectivas funções de transferência.

De acordo com o modelo obtido, no caso de a injeção ser efectuada em quadratura $g = \pi/2$ rad, a função de transferência em malha fechada não sofre alteração. Nestas circunstâncias poder-se-á utilizar a injeção para melhorar outras características, como a aquisição, sem degradar a resposta da malha em modo síncrono.

A resposta da malha é fortemente dependente das características de injeção, K_{inj} e g . Para se poder ter uma

ideia da alteração da resposta (amplitude) em função do nível de injeção e do desfasamento do sinal apresentam-se dois diagramas de Bode de uma PLLI com um filtro de malha

$$F(s) = \frac{1 + s\tau_2}{s\tau_1} \quad (5)$$

a que correspondente a seguinte função de transferência da PLLI

$$H_{PLLI}(s) = \frac{s(K_{inj} \cos g + 2\xi\omega_n) + \omega_n^2}{s^2 + s(K_{inj} \cos g + 2\xi\omega_n) + \omega_n^2} \quad (6)$$

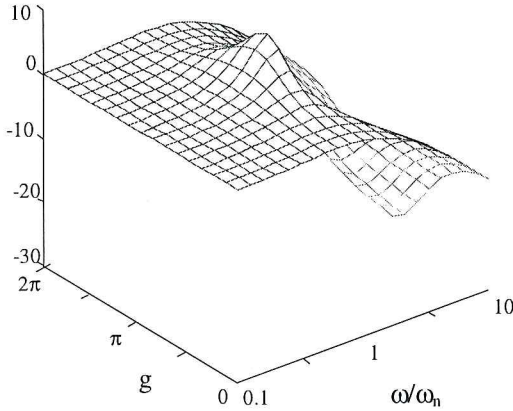


Fig. 4 - Diagrama de Bode relativo a uma PLLI com $F(s) = (1 + s\tau_2)/s\tau_1$, $\omega_n=1$, $\zeta=0.707$, $K_{inj}=1.0$, onde o eixo vertical corresponde a $20\log|H_{PLLI}(j\omega)|$ (dB).

Para valores de g próximos de zero, a banda passante aumenta um pouco. Para alguns valores intermédios de g , que dependem da relação $K_{inj} \cos g / \frac{\tau_2}{\tau_1} K_{PLL}$ (ou $2\xi\omega_n$),

aparece uma resposta do tipo subamortecido. Note-se que para $g=\pi$ existe uma pequena redução da banda passante da PLLI relativamente à da PLL.

Para a segunda situação com uma potência de injeção superior, figura 5, existe um aumento significativo da banda passante para g próximo de 0 ou de π rad e a resposta tem dois picos para valores de g próximos de $g=3\pi/2$ rad, podendo causar algumas perturbações na situação teoricamente ideal com $g=\pi/2$ rad, onde a resposta da malha com injeção é igual à da PLL com o mesmo filtro de malha. Nesta situação consegue-se aumentar a atenuação na banda de corte em cerca de 6 dB.

De acordo com a função de transferência da PLLI para o presente filtro activo, equação (6), a sua resposta não sofre alteração significativa se $K_{inj} \cos g \ll (\tau_1/\tau_2) K_{PLL}$ ou ainda, para qualquer desfasamento g , se $K_{inj} \ll (\tau_1/\tau_2) K_{PLL}$.

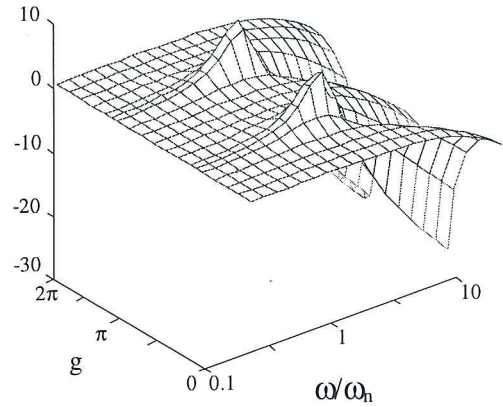


Fig. 5 - Diagrama de Bode relativo a uma PLLI com $F(s) = (1 + s\tau_2)/s\tau_1$, $\omega_n=1$, $\zeta=0.707$, $K_{inj}=5.0$, onde o eixo vertical corresponde a $20\log|H_{PLLI}(j\omega)|$ (dB).

Em situações em que esta condição não se verifique, mas somente $K_{inj} \cos g \leq (\tau_1/\tau_2) K_{PLL}$, é possível recuperar a resposta original da PLL por alteração dos elementos do filtro de malha. Sendo τ_{1si} e τ_{2si} as constantes de tempo do filtro sem injeção e τ_{1ci} e τ_{2ci} as constantes de tempo do filtro com injeção, para que não haja alteração da resposta em regime de seguimento, deverá verificar-se a seguinte condição:

$$\frac{\tau_{2si}}{\tau_{1si}} = \frac{\tau_{2ci}}{\tau_{1ci}} + \frac{K_{inj}}{K_{PLL}} \cos g \quad (7)$$

B. Características da malha em aquisição

A grande maioria das aplicações de malhas de seguimento de fase tradicionais utiliza o filtro activo, avanço-atraso, cuja função de transferência é dada aproximadamente pela equação (5). É com este filtro que será analisado o desempenho, no que respeita à aquisição, de uma PLLI de ordem 2.

Sendo este sistema regido pela equação diferencial seguinte

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - K_{inj} \sin(\phi + g) - K_{PLL} \frac{\tau_2}{\tau_1} \sin \phi - \frac{K_{PLL}}{\tau_1} \int_0^t \sin \phi(\tau) d\tau \quad (8)$$

não é possível obter uma solução analítica explícita, pelo que será efectuado o traçado do plano de fase, obtido por resolução numérica para vários níveis de potência de injeção.

Para tal, utilizando a frequência natural (ω_n) e o factor de amortecimento (ζ), pode obter-se o seguinte sistema de equações de estado

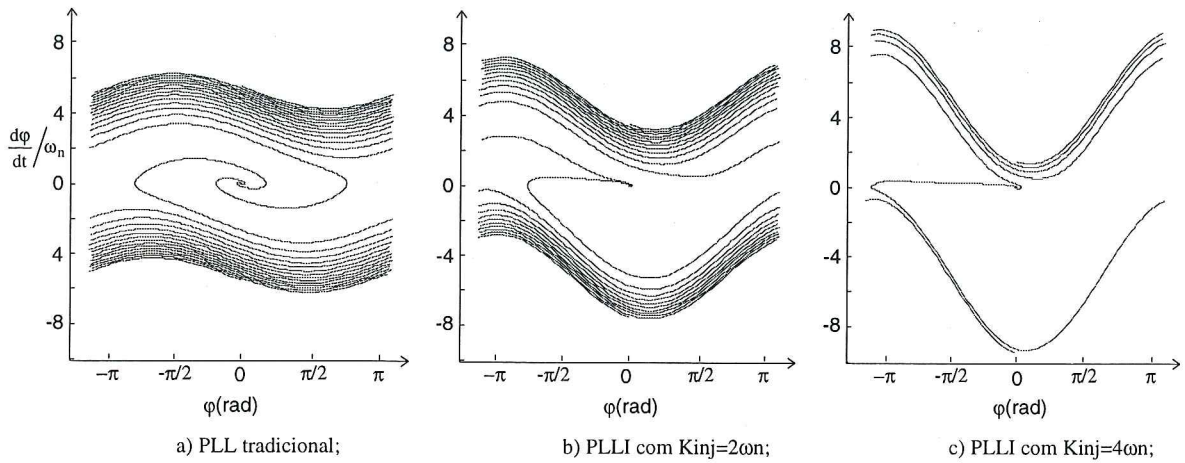


Fig. 6 - Planos de fase de uma malha de ordem 2.

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta_s}{dt} - K_{inj}\sin(\phi + g) - 2\xi\sin\phi - \omega_n x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = \omega_n \sin\phi \end{cases} \quad (9)$$

Na figura 6 estão representados os planos de fase correspondentes a uma PLL na alínea a), uma PLLI com $K_{inj}=2\omega_n$ na alínea b) e com $K_{inj}=4\omega_n$ na alínea c), mantendo a fase de injeção igual a $\pi/2$ rad.

Comparando as figuras está claro que a região onde a aquisição é feita num ciclo (*lock-in*) aumenta com K_{inj} e este depende directamente da potência do sinal de injeção: a aquisição num único ciclo é feita para um intervalo de frequência de aproximadamente $4\omega_n$ para a PLL sem injeção, de $5\omega_n$ para a PLLI com potência de injeção inferior e de $8\omega_n$ para o nível de injeção superior. Fora desta área, a evolução do sistema com ou sem injeção não é muito diferente, embora com vantagem para a versão com injeção uma vez que atinge com maior facilidade a zona de *lock-in* por esta aumentar com o nível de potência de injeção.

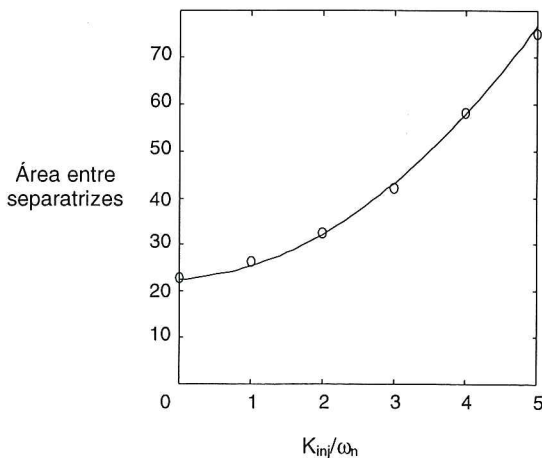


Fig. 7 - Área entre as separatrizes nos planos de fase em função do nível de injeção.

Uma medida da capacidade de *lock-in* de uma PLL é a área entre as separatrizes num plano de fase [4]. Consideram-se separatrizes as linhas entre as quais a aquisição é obtida sem perda de ciclos adicionais, ou seja, define a zona de *lock-in*.

No gráfico da figura 7 apresenta-se a evolução desta 'área de aquisição num ciclo' como função da constante de injeção, variável entre 0 e $5\omega_n$.

II. COMPORTAMENTO DA PLLI: RESULTADOS OBTIDOS EXPERIMENTALMENTE

Segue-se a validação experimental dos conceitos teóricos desenvolvidos. Para tanto utilizou-se um protótipo duma PLL com injeção que permitiu testar o seu comportamento, tanto em aquisição como em sincronismo.

Quanto ao seu comportamento no estado assíncrono, apresentam-se medidas da gama de aquisição, sendo a injeção de sinal efectuada em quadratura, uma vez que não altera a resposta em frequência da malha. No que diz respeito ao comportamento depois de adquirido o sincronismo, obtém-se a resposta em frequência para várias potências de injeção e em função da fase de injeção.

A. Resposta em Frequência

Desde que o nível de ruído seja suficientemente baixo e a PLLI se mantenha em operação linear, pode considerar-se o ruído como um conjunto de riscas espaçadas de 1 Hz, aplicando-se o princípio da sobreposição às várias componentes de frequência. Deste modo, de acordo com o esquema da figura 8, utilizando como entrada da PLLI uma portadora modulada por um tom e fazendo variar a frequência do sinal modulador, obtém-se o equivalente à resposta da PLLI a uma portadora perturbada por ruído branco de banda estreita.

A malha utilizada nestas experiências possui uma frequência natural não amortecida $\omega_n=3.9 \times 10^4$ rad/s e um factor de amortecimento $\xi=4$, sendo injectadas potências

de sinal de -40 dBm, -30 dBm, -20 dBm e -10 dBm.

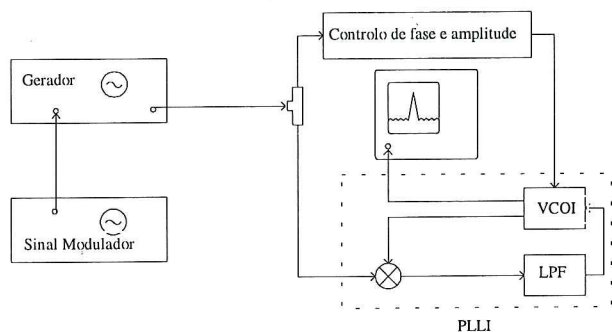


Fig. 8 - Montagem experimental para medição da resposta em frequência.

No gráfico da figura 9 pode comparar-se a resposta em frequência da PLL e da PLLI para vários níveis de potência de injeção, sempre feita em quadratura.

Para as potências de injeção de -40 dBm e de -30 dBm não se nota praticamente diferença entre a resposta da malha com e sem injeção, podendo considerar-se que a injeção não altera o comportamento em sincronismo da PLL.

À medida que a potência de injeção aumenta, o efeito de filtragem da PLL vai-se desvanecendo. Para -20 dBm de potência injeção, a largura de banda a 3 dB praticamente duplica e na chamada zona de corte mantém um desvio de cerca de 5 dB em relação à resposta da PLL. Com este nível de injeção já não são válidos alguns dos pressupostos admitidos na obtenção do modelo da PLLI, nomeadamente as restrições impostas no desenvolvimento do modelo do ILO [5].

Aumentando a potência de injeção para -10 dBm continua a tendência de alargamento da curva de resposta da malha. A largura de banda a 3 dB triplica e para frequências mais afastadas mantém um desvio superior a 10 dB.

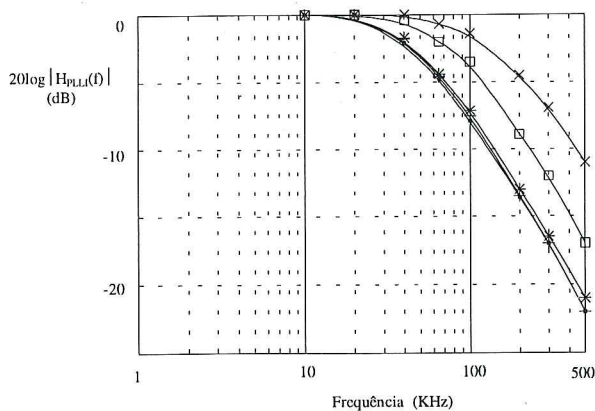


Fig. 9 - Resposta em frequência da PLL tradicional (●) e da PLLI com -40 dBm (+), -30 dBm (*), -20 dBm () e -10 dBm (x) de potência de injeção e desfasamento $g=\pi/2$.

Outra experiência realizada consistiu em manter a potência de injeção e variar a fase de injeção. Na figura 10 observam-se as curvas de resposta em frequência da PLLI, para vários desfasamentos, quando sujeita a uma potência de injeção de -30 dBm.

As curvas não são significativamente distintas: para $g=\pi$ rad nota-se uma ligeira redução na banda passante; para $g=0$ rad existe um pequeno aumento na banda passante, enquanto que para $g=\pi/2$ rad é perceptível um ligeiro aumento na banda passante, estando muito próximas das curvas das figuras obtidas por simulação.

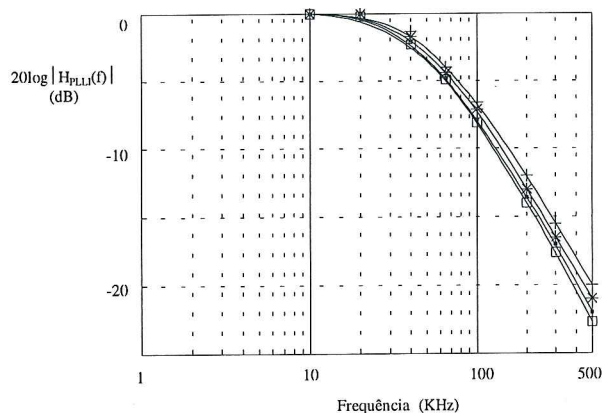


Fig. 10 - Resposta em frequência da PLL tradicional (●) e quando sujeita a injeção dum sinal de -30 dBm com desfasamentos $g=0$ (+), $g=\pi/2$ (*) e $g=\pi$ ().

No caso da potência de injeção de -20 dBm, figura 11, nota-se um aumento significativo da banda passante para praticamente todos os desfasamentos considerados sendo a menor variação para $g=\pi$ rad. Teoricamente, para este desfasamento até deveria existir uma redução na banda passante, todavia, como já foi referido, o modelo do oscilador com injeção utilizado deixa de ser válido e, na realidade, a função de transferência da PLL já vem significativamente alterada mesmo para a injeção em quadratura.

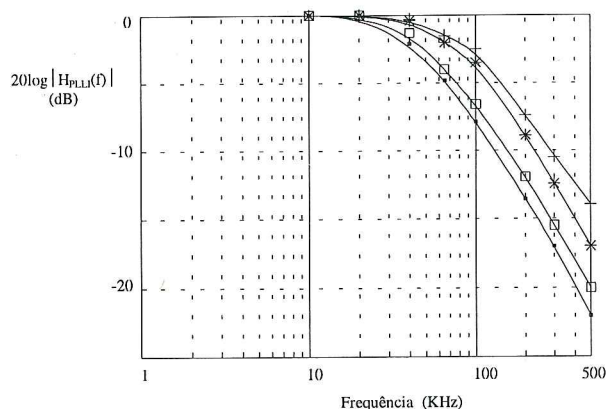


Fig. 11 - Resposta em frequência da PLL tradicional (●) e quando sujeita a injeção dum sinal de -20 dBm com desfasamentos $g=0$ (+), $g=\pi/2$ (*) e $g=\pi$ ().

B. Aquisição

Para comprovar as melhorias obtidas, por simulação no aumento da margem de aquisição, mediu-se a margem de sincronização em cinco situações distintas: sem injeção e com quatro potências de injeção, mantendo a fase, $g=\pi/2$ rad.

A margem de gama de sincronismo obtida com a PLL simples ($\omega_n=2.3\times10^5$ rad/s e $\xi=4$) foi de 190 KHz.

As gamas de aquisição para as várias potências de injeção e ainda a gama de sincronismo VCO, no caso do ser controlado somente por injeção, independentemente da malha PLL, constam do quadro abaixo.

P_{inj} (dBm)	-40	-30	-20	-10
PLLI (KHz)	450	1150	2950	4725
VCOI (KHz)	50	165	545	1830

Tabela 1 - Gamas de aquisição de sincronismo para a PLLI para quatro potências de injeção; na linha inferior apresenta-se, para referência, a gama de sincronismo do oscilador operando de modo independente, como ILO.

Destas medidas conclui-se que por cada aumento de 10 dB na potência de injeção, a gama de aquisição praticamente triplica.

A experiência seguinte consistiu em medir a gama de aquisição alterando a frequência natural da malha e mantendo constante a potência de injeção.

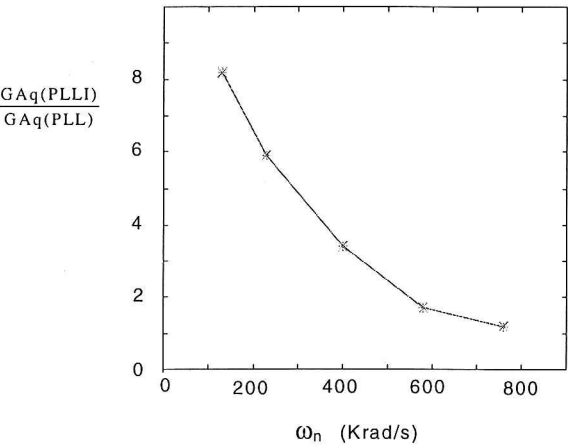


Fig. 12 - Razão entre a gama de aquisição de uma PLLI e a gama de aquisição da PLL equivalente, em função da frequência natural da malha, mantendo o coeficiente de amortecimento constante.

A razão entre a gama de aquisição da PLL e da mesma malha, quando sujeita à injeção dum sinal com -30 dBm e desfasamento $\pi/2$ rad, está representada na figura 12, em função da frequência natural não amortecida, ω_n . Nota-se que o efeito da injeção sobre a gama de aquisição vai progressivamente diminuindo, com o aumento de ω_n .

V. CONCLUSÕES

Com base nos modelos matemáticos da PLL e da PLLI apresentados no artigo anterior [1], simularam-se e compararam-se estes sistemas.

Pode concluir-se que, até determinado nível de potência de injeção, os resultados experimentais são coincidentes com os resultados simulados, validando o modelo obtido para a PLLI. Para potências superiores, a resposta experimental já difere da resposta simulada. A transição entre estas duas zonas foi definida na obtenção do modelo do ILO.

Relativamente às características da PLLI pode afirmar-se que é possível melhorar o desempenho em aquisição mantendo inalterada a resposta em frequência da malha; mas tendo presente que a potência de injeção não se pode aumentar indefinidamente; conclui-se ainda que as melhorias são mais significativas no caso de malhas de banda estreita.

Existem outras características na PLLI que podem vir a ser exploradas como a redução do ruído associado a uma portadora, quando as suas componentes ortogonais estiverem correlacionadas.

REFERÊNCIAS

[1] J. N. Matos, J. C. Neves, J. Perez, "Introdução à Sincronização de Osciladores", Revista do DETUA, Vol. 1, Nº6, Setembro 1996.

[2] J. N. Matos, "Contribuição ao Estudo e Projecto de Sincronizadores de Sinais em RF e MW", Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, 1995.

[3] A. J. Viterbi, "Principles of Coherent Communication", McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] A. Blanchard, "Phase-Locked Loops: Application to Coherent Receiver", John Wiley & Sons, 1976.

[5] R Adler, "A Study of Locking Phenomena in Oscillators", Proc. of the IRE and Waves and Electrons, vol. 34, pp. 351-357, June 1946.

[6] W. B. Davenport and W. L. Root, "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise", McGraw-Hill, 1958.