

Modelização de pequenos robots autónomos: um exemplo

Luís Almeida

Resumo - Nos últimos dois anos a Universidade de Aveiro esteve presente no Campeonato Internacional de Robótica Móvel realizado no âmbito de um Festival de Ciência e Tecnologia que ocorre anualmente em França desde 1994. Numa das provas deste campeonato os robots têm de seguir, de forma autónoma, uma linha cujo traçado desconhecem. Com vista a melhorar o desempenho da nossa participação foi desenvolvido um modelo matemático que permite, através de sessões de simulação, identificar problemas de estabilidade e de controlabilidade do robot bem como testar possíveis soluções para os resolver antes da sua construção.

Neste artigo descreve-se o modelo matemático desenvolvido e apresenta-se uma realização prática, usando MATLAB, de um simulador nele baseado. É ainda apresentado um exemplo de aplicação.

Abstract - In the last two years the University of Aveiro has participated in the Mobile Robotics International Championship in France. In this championship the robots have to autonomously follow a line among other tasks. In order to improve the performance of our participation a mathematical model has been developed that allows, through the use of simulation, to identify problems related to the stability or controlability of the robot as well as to test possible solutions before the robot is actually built.

In this paper the referred mathematical model is presented as well as an implementation of a simulator based on such model using MATLAB. A case study is also presented.

I. INTRODUÇÃO

A construção de robots autónomos é uma actividade com um forte caracter interdisciplinar. Quando essa actividade é desenvolvida no final de um curso de engenharia, por exemplo a nível de um projecto de fim-de-curso, tal obriga a que sejam revisitados e aplicados conceitos de variadas áreas. Este facto torna a construção de pequenos robots autónomos uma actividade de considerável valor pedagógico contribuindo para sedimentar conhecimentos adquiridos ao longo do curso.

É, de certo modo, com a intenção de aproveitar esta mais-valia pedagógica que alguns docentes do DETUA se vêm empenhando na utilização de pequenos robots como objecto de trabalhos curriculares. Por exemplo, o robot que representou a Universidade de Aveiro na edição de 97 do Campeonato Internacional de Robótica Móvel organizado em França no âmbito de um Festival de Ciência e Tecnologia foi construído por um grupo de dois

estudantes da Licenciatura em Engenharia de Electrónica e Telecomunicações na disciplina de Projecto.

O trabalho apresentado neste artigo tem como objecto os robots destinados à participação no referido Campeonato os quais têm, basicamente, de seguir uma linha traçada no chão. O seguimento da linha é, de facto, um problema de controlo e, tal como na generalidade desses problemas, é muito importante caracterizar o sistema a controlar (alguns exemplos simples de caracterização poderão ser encontrados em [1]). O objectivo principal deste artigo é, pois, caracterizar o sistema robot-linha de modo a construir-se um modelo matemático que permita determinar a trajectória do robot ao deslocar-se sobre a linha, dada uma posição inicial e dado um determinado algoritmo de controlo.

Tal modelo poderá ser útil, por exemplo, para o estudo do desempenho de vários algoritmos de controlo antes de o robot estar efectivamente construído. Poderá, ainda, ser útil na identificação precoce de características físicas com impacto negativo na estabilidade do seguimento da linha.

Por último, este trabalho é mais um exemplo da interdisciplinaridade acima referida envolvendo conceitos de Electromecânica (modelos de motores DC), de Física (Cinemática e Dinâmica) e de Geometria Analítica.

A construção efectiva do robot, que está para além do âmbito deste artigo, requer um conjunto ainda mais alargado de conceitos abrangendo áreas como o Controlo, Instrumentação, Electrónica Digital, etc..

No capítulo seguinte apresentamos os pressupostos em que o trabalho assenta. No capítulo III analisamos a dinâmica do robot. No capítulo IV estudamos a geometria do seguimento de uma linha recta por um robot e apresentamos o modelo básico para esse robot. No capítulo V descrevemos um simulador baseado no referido modelo e apresentamos um conjunto de extensões que tornam o modelo mais genérico. No capítulo VI é descrito um exemplo de utilização do simulador e, finalmente, no capítulo VII são apresentadas algumas conclusões.

II. PRESSUPOSTOS BÁSICOS

Este trabalho não tem a pretensão de apresentar um modelo que sirva para qualquer tipo de robot que siga qualquer tipo de linha. De facto, um modelo assim tão genérico seria muito difícil, senão impossível, de obter.

Assim, o modelo de robot subjacente a este artigo baseia-se em controlo diferencial de direcção com duas rodas

motrizes acopladas a dois motores DC controlados de forma independente.

Quanto à linha seguida pressupõe-se que é composta apenas por segmentos de recta e arcos de circunferência unidos de forma suave, i.e., sem bicos. Note-se, ainda, que se pressupõe a utilização de um controlador digital que retira periodicamente amostras dos sensores de linha e que gera, à mesma cadência, a devida actuação nos motores.

Resta dizer que todas as grandezas referidas ao longo deste trabalho se devem exprimir em unidades do Sistema Internacional.

III. DINÂMICA DO ROBOT

Neste capítulo vamos utilizar um conjunto de conceitos de Cinemática e Dinâmica cuja explanação poderá ser encontrada em qualquer manual de Física, capítulo de Mecânica. Apenas como exemplo fazemos referência a [2].

Ao longo deste trabalho a estrutura mecânica do robot é, sem perda de generalidade, reduzida a um eixo rígido de comprimento b com uma roda motriz independente em cada extremo. O robot é equilibrado na posição horizontal com a utilização de uma ou mais rodas “malucas” (fig. 1).

A. Cinemática

A rigidez do eixo das rodas do robot limita o tipo de movimentos que este pode efectuar. De facto, apenas são possíveis rotações em torno do ponto central do próprio eixo das rodas O e translações no sentido longitudinal do robot. Contudo, combinando estes movimentos, é possível levar o robot a efectuar rotações em torno de qualquer ponto C situado sobre a linha que contém o eixo das rodas. Fazendo este ponto C variar ao longo do tempo é possível descrever qualquer tipo de trajectória planar.

Assim, considerando que o robot, num dado instante, descreve uma rotação em torno de um ponto arbitrário C , a cinemática do movimento do robot pode ser descrita através das equações 1 em que w e v designam respectivamente a velocidade angular e linear do robot, r_C o raio de curvatura e v_L e v_R as velocidades das rodas motrizes [2] (fig. 1). Note-se que a velocidade angular de qualquer ponto do robot é igual, em cada instante.

$$w = \frac{v_R}{r_C + b/2} = \frac{v_L}{r_C - b/2} \quad v = r_C * w \quad (1)$$

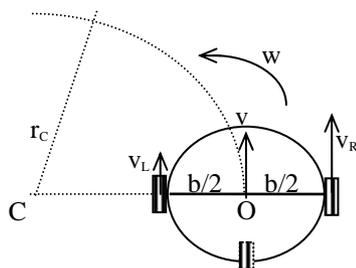


Fig. 1 - Modelo da estrutura mecânica do robot.

Das equações 1 facilmente se podem deduzir as expressões que relacionam as velocidades angular e linear do robot com as velocidades lineares das respectivas rodas motrizes (equações 2).

$$w = \frac{v_R - v_L}{b} \quad v = \frac{v_R + v_L}{2} \quad (2)$$

Na análise que se segue será usada esta decomposição do movimento do robot nas duas componentes básicas: rotação, associada à respectiva velocidade angular, e translação, associada à velocidade linear. A componente de rotação, considerada sozinha, refere-se sempre a rotações em torno do ponto central O , i.e., do centro do eixo das rodas.

B. Dinâmica

Os movimentos do robot surgem como resultado da aplicação de tensões DC em cada motor, fazendo aparecer um determinado binário em cada roda motriz. Estes binários são convertidos pelas próprias rodas em forças de tracção paralelas ao chão que obrigam o robot a descrever uma certa trajectória. Desta forma, do ponto de vista da Dinâmica, o robot pode ser visto como um corpo rígido sobre o qual actuam duas forças paralelas, F_R e F_L , aplicadas uma em cada roda (fig. 2). Estas forças constituem um sistema que pode ser substituído por uma resultante F posicionada no ponto de aplicação A de modo que o binário total T relativo a qualquer ponto se mantenha inalterado (equações 3) [2]. Note-se que r_F representa a abcissa de A relativamente ao centro do robot medida sobre o eixo dos motores.

$$F = F_R + F_L \quad T = \frac{b}{2} * (F_R - F_L) \quad r_F = \frac{b}{2} * \frac{F_R - F_L}{F_R + F_L} \quad (3)$$

Para estabelecer as equações do movimento do robot devemos ter em atenção a sua massa M e momento de inércia J relativo ao centro de rotação O . Sendo B_v o coeficiente do atrito que o robot tem de vencer no seu movimento de translação e B_w o mesmo para o movimento de rotação, e considerando que estes parâmetros são aproximadamente constantes na zona de velocidades em que o robot deverá trabalhar [3] podemos, então, estabelecer as equações 4 e 5.

$$M \frac{dv}{dt} = F - B_v * v \quad (\text{translação}) \quad (4)$$

$$J \frac{dw}{dt} = T - B_w * w \quad (\text{rotação}) \quad (5)$$

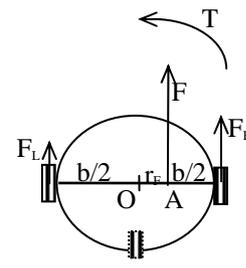


Fig. 2 - Diagrama das forças de tracção em jogo no robot

Contudo, devido às características dos motores DC, as forças geradas F_R e F_L dependem das velocidades de cada roda v_R e v_L . Consequentemente, também F e T dependem de v e w respectivamente. Para se terem em conta estas dependências de forma a resolver convenientemente as equações 4 e 5 é necessário usar um modelo apropriado para os motores DC.

Antes de introduzirmos o modelo dos motores DC que será usado podemos estabelecer já as relações entre a resultante F e binário total T e os binários gerados por cada motor T_R e T_L (equações 6). Note-se que r_w representa o raio das rodas motrizes.

$$F = F_R + F_L = \frac{T_R + T_L}{r_w} \quad T = \frac{b}{2}(F_R - F_L) = \frac{b}{2} * \frac{T_R - T_L}{r_w} \quad (6)$$

O modelo que normalmente é utilizado para pequenos motores DC com magnete permanente ([1], [3] e [4]) baseia-se na proporcionalidade por um lado, entre o binário gerado T_m e a corrente i que circula no motor e por outro lado, entre a força-contra-electromotriz gerada e_m e a velocidade de rotação w_m do próprio motor (equações 7). Note-se, ainda, que ambas as constantes de proporcionalidade K_T e K_b são numérica e dimensionalmente iguais em motores pequenos pelo que podemos substituí-las por uma só constante do motor, K_m .

$$T_m = K_T * i \quad e_m = K_b * w_m \quad K_T = K_b = K_m \quad (7)$$

Considerando que o enrolamento do motor tem uma resistência eléctrica R e inductância desprezável e que os parâmetros dos dois motores utilizados são iguais podemos, então, escrever as equações 8. Note-se que e_{am} e e_{ad} são, respectivamente, as tensões média e diferencial aplicadas aos motores (como definido nas equações 9) e que v e w são conforme definidos nas equações 2.

As equações 8 estabelecem a dependência da resultante F e do binário total T relativamente, por um lado, às tensões DC aplicadas aos motores e, por outro lado, às velocidades actuais de translação e rotação do robot.

$$F = \frac{2K_m}{r_w R} \left(e_{am} - \frac{K_m}{r_w} v \right) \quad T = \frac{bK_m}{2r_w R} \left(e_{ad} - \frac{K_m}{r_w} bw \right) \quad (8)$$

$$e_{am} = \frac{e_{aR} + e_{aL}}{2} \quad e_{ad} = e_{aR} - e_{aL} \quad (9)$$

Finalmente, introduzindo as equações 8 nas equações 4 e 5 obtemos as equações 10 e 11 que descrevem a dinâmica do robot e que permitem determinar o seu movimento quando são aplicadas tensões DC nos motores de tracção.

$$M \frac{dv}{dt} = \frac{2K_m}{r_w R} * e_{am} - \left(\frac{2K_m^2}{r_w^2 R} + B_v \right) * v \quad (\text{translação}) \quad (10)$$

$$J \frac{dw}{dt} = \frac{bK_m}{2r_w R} * e_{ad} - \left(\frac{b^2 K_m^2}{2r_w^2 R} + B_w \right) * w \quad (\text{rotação}) \quad (11)$$

A resolução destas equações diferenciais permite determinar a evolução temporal das velocidades do robot. Aplicando um degrau de tensão a ambos os motores as velocidades evoluirão exponencialmente para valores finais constantes, respectivamente v_{SS} e w_{SS} (eq. 12 e 13).

$$v(t) = v_{SS} (1 - e^{-t/\tau_v}) + v(0^-) * e^{-t/\tau_v} \quad (12)$$

$$w(t) = w_{SS} (1 - e^{-t/\tau_w}) + w(0^-) * e^{-t/\tau_w} \quad (13)$$

Os valores finais v_{SS} e w_{SS} podem ser obtidos através das equações 10 e 11 resultando nas expressões 14 e 15.

$$v_{SS} = \frac{\frac{2K_m}{r_w R}}{\frac{2K_m^2}{r_w^2 R} + B_v} * e_{am} \quad w_{SS} = \frac{\frac{bK_m}{2r_w R}}{\frac{b^2 K_m^2}{2r_w^2 R} + B_w} * e_{ad} \quad (14)$$

$$e_{am} = \frac{v_{SS} \left(\frac{2K_m^2}{r_w^2 R} + B_v \right)}{2K_m / r_w R} \quad e_{ad} = \frac{w_{SS} \left(\frac{b^2 K_m^2}{2r_w^2 R} + B_w \right)}{bK_m / 2r_w R} \quad (15)$$

Da mesma forma, as constantes de tempo τ_v e τ_w (translação e rotação respectivamente) podem ser obtidas através das expressões 16.

$$\tau_v = \frac{M}{\frac{2K_m^2}{r_w^2 R} + B_v} \quad \tau_w = \frac{J}{\frac{b^2 K_m^2}{2r_w^2 R} + B_w} \quad (16)$$

IV. GEOMETRIA DO SEGUIMENTO DE LINHA

Para que o robot descrito na figura 1 seja capaz de seguir uma linha traçada no chão é necessário que seja dotado de sensores apropriados. Neste artigo parte-se do princípio de que existe uma barra de sensores colocada à frente do eixo das rodas e paralela a ele (fig. 3). Esta barra de sensores permite ao robot obter uma medida do seu desvio relativo à linha e desenvolver as acções correctivas necessárias.

A caracterização precisa do desvio do robot relativamente à linha requer duas medidas independentes, o desvio linear d e o desvio angular α (fig. 3). A primeira é uma medida do deslocamento da linha face à posição do robot enquanto a segunda é uma medida da diferença angular entre as orientações da linha e do robot. A trajectória seguida pelo robot coincidirá com a linha quando ambas as medidas d e α forem 0.

No modelo usado neste trabalho, o desvio medido directamente pelos sensores e contém informação relativa aos dois desvios atrás referidos conforme descrito na expressão 17. Note-se que $e=0$ não implica que ambos os desvios sejam nulos, $d=\alpha=0$. No entanto, fazendo o robot avançar constantemente, qualquer algoritmo que minimize e poderá levar a trajectória do robot a convergir para a linha. Sem prejuízo de coerência, até final deste artigo passaremos a utilizar a expressão *desvio linear* para designar o desvio medido pelos sensores e .

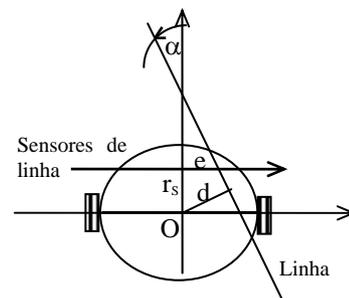


Fig. 3 - A disposição dos sensores de linha

$$e = \frac{d}{\cos(\alpha)} - r_s \tan(\alpha) \quad (17)$$

De modo a analisar o movimento do robot sobre a linha devemos lembrar que está subjacente uma abordagem de controlo digital. Segundo esta abordagem, os sensores de linha são amostrados a uma determinada cadência f_s . Durante o período de amostragem $t_s (=1/f_s)$ são calculadas as tensões DC a aplicar aos motores e que levarão o robot a descrever uma curva. Esta curva terá comprimento l_c e cobrirá um ângulo α_c . Estes valores podem ser obtidos através da integração das equações 12 e 13 durante um período de amostragem, i.e., de $t=0$ a $t=t_s$. Tomando o início do período como origem dos tempos ($t=0$), as funções que descrevem o espaço percorrido e o ângulo descrito são dadas pelas expressões 18 e 19.

$$l_c(t) = v_{SS}t + (v(0^-) - v_{SS})\tau_v(1 - e^{-t/\tau_v}) \quad (18)$$

$$\alpha_c(t) = w_{SS}t + (w(0^-) - w_{SS})\tau_w(1 - e^{-t/\tau_w}) \quad (19)$$

A curva resultante apresenta um raio r_c que varia ao longo do tempo e que pode ser calculado directamente a partir das equações 12 e 13 conforme descrito nas equações 20. Repare-se que $r_c(t)$ também converge exponencialmente para um valor final constante r_{CSS} .

$$r_c(t) = \frac{v(t)}{w(t)} \quad r_{CSS} = \frac{v_{SS}}{w_{SS}} \quad (20)$$

A trajectória seguida pelo robot durante cada intervalo de amostragem pode ser determinada considerando intervalos de tempo infinitesimais dt durante os quais o robot descreve arcos de circunferência de comprimento dl_c e abertura $d\alpha_c$. Assim, para cada ponto P_n da trajectória é calculado um novo ponto P_{n+1} dado pelo anterior mais o deslocamento em arco de circunferência.

No entanto, para o objectivo deste trabalho basta uma aproximação à trajectória real pois isso é suficiente para permitir estudar o desempenho de diferentes algoritmos de controlo bem como para identificar características físicas com importância no desempenho do robot. Assim, poderemos considerar, em vez do intervalo infinitesimal, um intervalo de duração finita Δt a que chamaremos intervalo de integração. Durante este intervalo considera-se, então, que o robot descreve um arco de circunferência de comprimento Δl_c e abertura $\Delta \alpha_c$. O raio de curvatura é constante e será dado por $r_c = \Delta l_c / \Delta \alpha_c$ que representa um valor médio de $r_c(t)$ durante o intervalo de integração.

Convém, no entanto, notar que o erro na determinação da trajectória causado pela utilização de um intervalo de integração finito Δt é cumulativo. Contudo, a utilização de um intervalo suficientemente pequeno para que os movimentos correctivos efectuados pelo robot nesse intervalo sejam mínimos permitirá que a trajectória calculada se aproxime da real pelo menos até uma certa distância.

Do ponto de vista geométrico, o problema do seguimento de linha pode ser colocado da seguinte forma: "Dada uma leitura inicial dos sensores de linha e_i e um desvio angular inicial α_i bem como o consequente movimento correctivo desenvolvido pelo robot, i.e., um arco de circunferência de comprimento Δl_c e abertura $\Delta \alpha_c$, qual será a nova

leitura dos sensores de linha e_f e o novo desvio angular α_f no final desse trajecto correctivo?" (fig. 4).

A solução geral deste problema para qualquer tipo de linha é impossível. Assim, é necessário introduzir algum conhecimento prévio sobre a linha a ser seguida. Neste capítulo apenas se considerarão linhas rectas. No próximo capítulo introduziremos linhas com segmentos em arco de circunferência.

Pela análise da figura 4 é possível estabelecer as equações 21. Note-se que rl_i e rl_f são as ordenadas dos pontos I_i e I_f relativas a O e O' , respectivamente. Por sua vez, r_s é a distância dos sensores ao eixo das rodas.

$$rl_i = \frac{e_i}{\tan(\alpha_i)} + r_s \quad (21)$$

$$\alpha_f = \alpha_i + \Delta \alpha_c$$

$$e_f = (rl_f - r_s) \tan(\alpha_f)$$

Este problema consegue-se resolver determinando primeiro rl_f e posteriormente e_f .

Seja L o ponto de intersecção entre os eixos longitudinais do robot nas posições inicial e final, e R a projecção do ponto I_f sobre o eixo longitudinal na posição inicial, a determinação de rl_f pode ser feita usando três distâncias auxiliares: dA a partir do triângulo $(C O L)$ ou $(C O' L)$, dB e dD a partir do triângulo $(L R I_f)$. As expressões para estas distâncias encontram-se nas equações 22. Relembremos, ainda, que $r_c = \Delta l_c / \Delta \alpha_c$.

$$dA = r_c \tan(\Delta \alpha_c / 2)$$

$$dB = (rl_f + dA) \sin(\Delta \alpha_c) \quad (22)$$

$$dD = (rl_f + dA) \cos(\Delta \alpha_c)$$

Usando o triângulo $(I_i R I_f)$, podemos escrever a equação 23 a partir da qual podemos obter rl_f em função de rl_i .

$$\tan(\alpha_i) = \frac{dB}{rl_i - dA - dD} \quad (23)$$

Substituindo rl_i pela primeira expressão de 21 obtemos a expressão que relaciona rl_f com e_i . Inserindo esta expressão na terceira expressão de 21 obtemos a expressão final

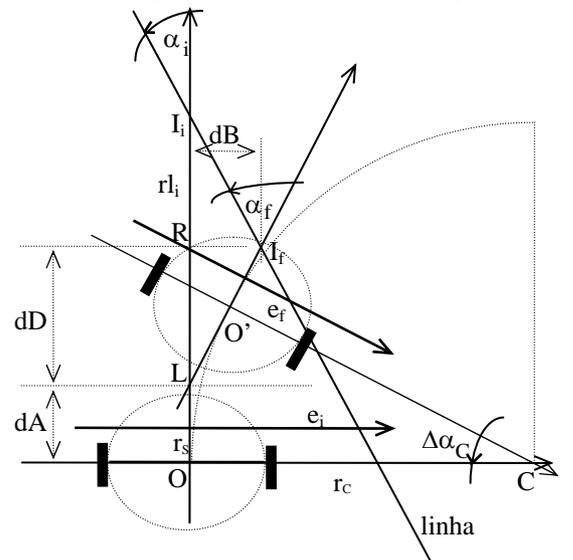


Fig. 4 - A geometria do seguimento de uma linha recta.

$$e_f = \left(\frac{e_i + \tan(\alpha_i)(r_s - r_c \tan(\Delta\alpha_C / 2))}{\cos(\Delta\alpha_C)(\tan(\alpha_i) + \tan(\Delta\alpha_C))} - r_c \tan(\Delta\alpha_C / 2) - r_s \right) \tan(\alpha_i + \Delta\alpha_C) \quad (24)$$

24 para e_f em função de e_i , α_i , $\Delta\alpha_C$ e Δl_C .

Esta expressão permite obter uma resposta directa ao problema geométrico do seguimento de uma linha recta tal como exposto atrás. Repare-se que a sequência de valores para o desvio medido pelos sensores e permite determinar a trajectória do robot referida à linha.

V. CONSTRUÇÃO DE UM SIMULADOR

Baseado no modelo apresentado atrás é fácil construir um simulador que imite um robot a deslocar-se sobre uma linha. A figura 5 mostra um diagrama de blocos do sistema a simular [5].

A simulação do sistema consegue-se repetindo ciclicamente a seguinte sequência de operações:

- 1- Baseado na leitura dos sensores de linha (e_i), o algoritmo de controlo gera tensões DC (e_{aL} e e_{aR}) que serão aplicadas aos motores.
- 2- De acordo com as equações que descrevem a dinâmica do robot, estas tensões DC causam um certo movimento ao robot com componentes de translação e rotação (v e w).
- 3- Este movimento leva o robot a desenhar uma trajectória (comprimento l_C e ângulo α_C).
- 4- Usando o modelo geométrico para o seguimento de linha, essa trajectória determina um novo desvio que se reflectirá num novo valor de leitura dos sensores (e_f).

Ao longo da restante parte deste capítulo descreveremos algumas questões relacionadas com o simulador e com extensões ao modelo que lhe conferem mais versatilidade.

A. A resposta dos sensores de linha

Num caso geral, os sensores de linha usados poderão não apresentar uma resposta linear. Quando tal linearidade não existe é necessário ter em conta que a entrada efectiva para o controlador não é o desvio da linha medido sobre a barra de sensores mas sim uma função desse valor. Chamamos-lhe função sensor e tem uma influência considerável no desempenho global do robot.

Um critério básico que a função sensor tem de cumprir é o de ser monótona por forma a evitar mínimos locais. Como exemplo de não-linearidades comuns temos a resposta quadrática, a saturação e a resolução espacial finita.

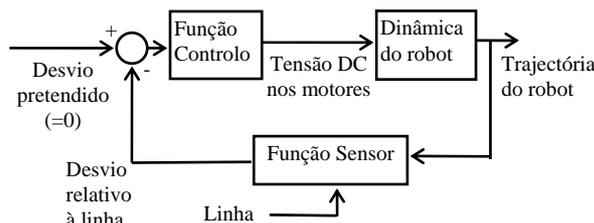


Fig. 5 - Diagrama de blocos de um robot que segue uma linha

Mudando apenas a função sensor podemos facilmente testar o efeito da utilização de diferentes tipos de sensores ou de diferentes arranjos entre os sensores de linha.

B. O algoritmo de controlo

A função do algoritmo de controlo é a de fazer o robot convergir para a linha. Assim, de acordo com as leituras dos sensores de linha, o algoritmo deve gerar as tensões DC apropriadas para aplicar aos motores.

O algoritmo de controlo, ou função de controlo, é de importância fundamental no desempenho do robot. Poderá, também, ser usado para compensar eventuais efeitos negativos causados por determinadas características físicas.

Como já foi referido, não está no âmbito deste trabalho estudar os algoritmos de controlo aplicáveis nesta situação. Contudo, uma abordagem possível será a de manter a velocidade linear aproximadamente constante e controlar a velocidade angular do robot de forma a fazê-lo virar para o lado em que se encontra a linha. Isto pode ser conseguido com um algoritmo proporcional simples em que a tensão média e_{am} a aplicar aos motores é mantida constante e a tensão diferencial e_{ad} é forçada a variar de acordo com a leitura dos sensores de linha e : $e_{am} = constante$, $e_{ad} = K_p * e$ onde K_p é a constante proporcional. As tensões a aplicar a cada motor são obtidas invertendo as equações 9. Em muitos casos poderá ser benéfico utilizar também uma componente derivativa pelo que a expressão para e_{ad} passaria a ser: $e_{ad} = K_p * e + K_d * e'$ em que K_d é a constante derivativa e e' representa uma aproximação discreta da derivada da leitura dos sensores e .

Tal como com a função sensor, também é possível utilizar o simulador com diferentes funções de controlo permitindo comparar os desempenhos obtidos e afinar os respectivos parâmetros.

C. Limites físicos

Dependendo do algoritmo de controlo e dos sensores utilizados, a saída da função controladora poderá ir além dos limites físicos do robot, por exemplo, tentando impor nos motores tensões DC superiores à máxima tensão disponível. Por esta razão, é necessário converter os valores de saída da função controladora, tensões média e diferencial, nos valores das tensões individuais a aplicar a cada motor e verificar cada um destes contra os respectivos limites físicos. No caso de haver truncatura é necessário reconverter os valores truncados nos novos valores médio e diferencial que serão fornecidos ao passo seguinte do simulador.

Outro limite físico muito importante é o comprimento da barra de sensores de linha. Esse comprimento determina o desvio máximo que o robot pode tolerar sem perder definitivamente a linha. Assim, as leituras dos sensores

são constantemente verificadas contra este limite e quando este é ultrapassado a simulação termina significando que o robot perdeu a linha.

D. Espaço percorrido sobre a linha

No capítulo IV apresentou-se a expressão 18 que permite obter o espaço percorrido pelo robot na sua trajectória sobre a linha, bastando para tal acumular os comprimentos dos arcos Δl_c . Contudo, é também muito útil saber qual o comprimento de linha que o robot já percorreu. Este comprimento deverá ser calculado para cada arco de circunferência descrito pelo robot durante cada intervalo Δt . O comprimento total l será a acumulação dos comprimentos parciais Δl .

Deste modo, ao arco de circunferência ($\Delta l_c, \Delta \alpha_c$) descrito pelo robot em Δt corresponde uma corda (O O') com comprimento $\Delta l'$ (fig. 6). Este comprimento pode ser obtido pela expressão 25, relembrando que $r_c = \Delta l_c / \Delta \alpha_c$.

$$\Delta l' = 2r_c \sin(\Delta \alpha_c / 2) \quad (25)$$

Para obter o correspondente comprimento de linha basta rebater sobre esta a corda (O O') obtendo-se um comprimento $\Delta l = \Delta l' \cdot \cos(\beta)$ em que β é dado por $\beta = (\alpha_i + \alpha_f) / 2$. A expressão final para este comprimento é dada pela equação 26.

$$\Delta l = 2r_c \sin(\Delta \alpha_c / 2) \cos(\alpha_i + \Delta \alpha_c / 2) \quad (26)$$

E. Seguimento de curvas

O modelo geométrico descrito no capítulo IV só se aplica ao seguimento de linhas rectas. Contudo, com uma pequena adaptação é possível utilizar o mesmo modelo para linhas em arco de circunferência. O procedimento é o seguinte, após calcular a nova leitura dos sensores como se o robot estivesse sobre uma linha recta é aplicada a esta leitura uma correcção que tome em conta o desvio suplementar causado pela curvatura da linha.

Parte-se do princípio de que a linha é composta por vários segmentos que poderão ser rectilíneos ou curvos em arco de circunferência. Cada segmento corresponderá ao pedaço de linha percorrido durante o intervalo de

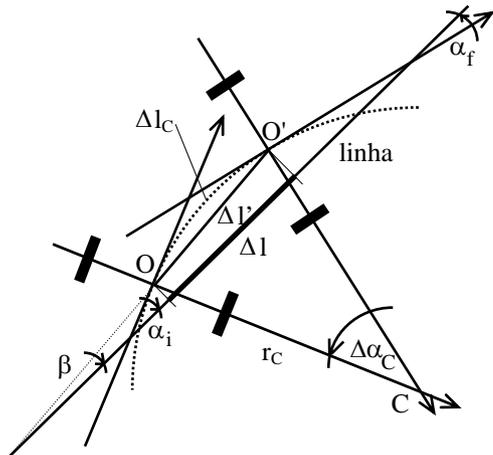


Fig. 6 - Comprimento da linha percorrido pelo robot

integração Δt e compreendido entre o ponto de intersecção da linha com os sensores na posição inicial (e_i) e o ponto de intersecção da linha com os sensores na posição final (e_f). Assume-se, ainda, que em cada intervalo de integração o respectivo segmento é rectilíneo ou é um arco de circunferência. Entretanto, note-se que os vários segmentos unem-se de forma suave pelo que as respectivas tangentes em cada ponto de união têm de coincidir. Na figura 7 está representada esta situação em que a linha contém um segmento rectilíneo inicial (linha 1), passa por um arco de circunferência de raio r_L e abertura β e termina com outro segmento rectilíneo (linha 2). O número de arcos de circunferência consecutivos com o mesmo ou outro raio poderá ser qualquer dando uma grande liberdade na construção de configurações da linha.

Em geral, conforme se pode também ver na figura 7, num arco de raio r_L e abertura β , ao fim de um comprimento tangencial l_t a curva recolhe para o interior a distância d medida na perpendicular à tangente. As equações 27 permitem quantificar e relacionar estes valores de forma aproximada.

$$d / l_t \approx \tan(\beta / 2) \quad \beta \approx \arcsin(l_t / r_L) \quad (27)$$

A aproximação cometida em (27) equivale a afirmar que $l_t \cdot (e_f' - e_i) \sin(\alpha_f) \approx l_t$. Se impusermos a limitação de permitir apenas curvas relativamente abertas (e.g. raio r_L superior a 0.5m) então o ângulo β é normalmente muito pequeno, tipicamente inferior a 0.1rad, logo $(e_f' - e_i) \ll l_t$ para uma gama vasta de $|\alpha_f|$ pelo que a aproximação se torna válida.

O comprimento l_t pode ser obtido a partir do comprimento de linha percorrido Δl (eq. 26) e das distâncias auxiliares $l1$ e $l2$ conforme descrito nas equações 28.

$$l_t = \Delta l + l2 - l1$$

$$l1 = r_s \cos(\alpha_i) - e_i \sin(\alpha_i) \quad (28)$$

$$l2 = r_s \cos(\alpha_f) - e_f \sin(\alpha_f)$$

Os valores e_f e α_f utilizados nas equações 28 referem-se aos valores obtidos segundo o modelo da linha recta. Pretendemos agora obter os novos valores e_f' e α_f' que

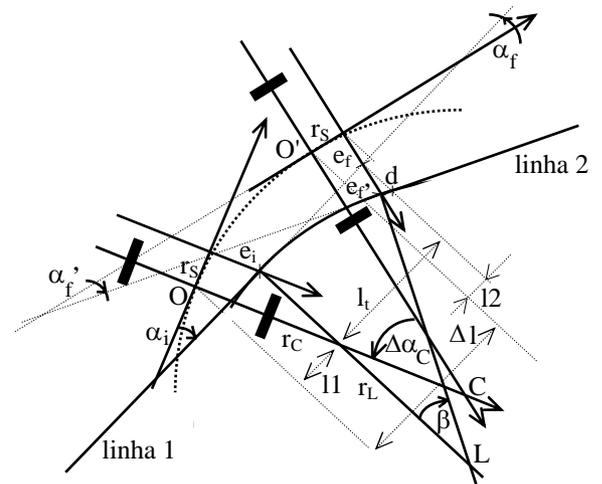


Fig. 7 - Seguimento de linhas em arco de circunferência.

resultam da curvatura da linha.

Recorrendo, mais uma vez, à limitação atrás imposta para o raio de curvatura da linha ($r_L > 0.5\text{m}$) então também podemos considerar que $e_f' - e_f \approx d$ pelo que os valores para e_f' e α_f' poderão ser obtidos a partir das equações 29, usando os resultados das equações 26, 28 e 27.

$$\alpha_f' \approx \alpha_f + \beta \quad e_f' \approx e_f + d \quad (29)$$

F. Perturbações na linha

Quer a existência de pequenos objectos sobre a linha quer imperfeições no traçado desta poderão causar erros nas leituras dos sensores. Uma vez que essas situações poderão efectivamente ocorrer, por exemplo, no Campeonato referido no resumo deste artigo o robot poderia ter de passar sobre algumas bolas de bilhar colocadas na linha, é importante ter uma ideia do comportamento do robot.

Contudo, a caracterização exacta da reacção do robot a tais perturbações é muito difícil de efectuar, mesmo quando a natureza dessas perturbações é conhecida. Assim, para testar a reacção do robot em tais situações foi adicionado pontualmente ruído à leitura dos sensores. Na prática são usados 2 geradores aleatórios um para gerar o instante da próxima perturbação e outro a perturbação em si.

Repetindo simulações com parâmetros adequados nos geradores aleatórios poderemos ter uma ideia de como o robot se comporta na presença de perturbações da linha.

G. Realização em MATLAB

A linguagem de programação científica MATLAB facilita grandemente a realização de um simulador como o que acabou de ser descrito. São usadas duas funções para encapsular a função sensor e a função controladora, duas partes do simulador que não estão directamente relacionadas com a caracterização física do sistema. No corpo do programa encontra-se uma fase de inicialização das características físicas do robot, da posição inicial relativa à linha (e_i, α_i) e de variáveis internas. Depois encontra-se o ciclo de simulação que calcula a trajectória do robot para um determinado período de tempo.

A saída é um gráfico das leituras dos sensores nos vários instantes de amostragem. O desvio angular também aparece no gráfico para facilitar o entendimento da trajectória descrita pelo robot. São ainda apresentados os seguintes valores: tempo de simulação, comprimento da linha percorrido nesse tempo, velocidade média, espaço percorrido a mais pelo robot devido às correcções de trajectória e desvio médio quadrático medido pelos sensores.

VI. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para testar o modelo descrito nos capítulos III e IV utilizou-se o simulador descrito no capítulo V com os parâmetros do robot *Moliceiro* que esteve presente no edição de 96 no concurso referido no Resumo deste artigo e que está descrito em [5]. Nas secções seguintes apre-

sentamos os parâmetros do robot bem como o resultado da simulação sem e com controlo derivativo, transportando ou não bolas de bilhar, com ou sem avanço dos sensores relativamente ao eixo das rodas e com sensores digitais de fraca resolução.

A. Medição dos parâmetros dos motores

Conforme dito no capítulo III consideraram-se os motores iguais. Os parâmetros a medir são a corrente em vazio I_0 , a corrente de bloqueio I_S , a velocidade de rotação máxima w_{max} e a resistência do enrolamento R . A partir destas medições é possível determinar a constante do motor K_m bem o binário máximo fornecido pelo motor T_S .

Os valores medidos são (a 5V e extrapolados para 12V):

Tensão máxima disponível nos motores = 12V

Corrente em vazio, $I_0 = 31 \text{ mA}$

Corrente em bloqueio, $I_S = 1.5 \text{ A}$

Resistência do enrolamento, $R = 7 \Omega$

Rotação máxima, $w_{max} = 16 \text{ rad/s}$

Binário máximo, $T_S = 1.2 \text{ N.m}$

Constante do motor, $K_m = 0.86 \text{ N.m/s}$ (ou V.s)

B. Os parâmetros de estrutura

Neste caso interessa medir a largura do eixo das rodas b , a largura da barra de sensores S , o avanço da barra de sensores relativamente ao eixo das rodas r_S , a massa total do robot M , o momento de inércia do robot relativamente ao centro de rotação (ponto central do eixo das rodas) J_O , o diâmetro das rodas r_w e os coeficientes de atrito globais para a translação B_v e rotação B_w .

Todos estes parâmetros são de medição directa excepto o momento de inércia total J_O e os coeficientes de atrito. O momento de inércia pode ser calculado por partes. Conhecendo o momento de inércia relativo ao centro de gravidade J_{CG} e sendo r_{CG} a distância do centro de gravidade ao centro do eixo das rodas então $J_O = J_{CG} + r_{CG}^2 * M$. A determinação do momento de inércia relativo ao centro de gravidade também pode ser feita por partes dividindo o robot em componentes mais ou menos homogéneos e de formas conhecidas e calculando a contribuição de cada um desses componentes.

Os coeficientes de atrito podem ser medidos indirectamente e calculados através das fórmulas 14 e 15. Para o coeficiente de translação B_v é necessário, para além do conhecimento dos parâmetros dos motores, medir e_{am} e v_{SS} com $e_{ad} = 0$. Da mesma forma, para B_w é necessário medir e_{ad} e w_{SS} , com $e_{am} = 0$. Contudo, através de medições das constantes de tempo dos movimentos de translação e rotação (eq. 16) apercebemo-nos de que estas são essencialmente controladas pelos parâmetros do motor. Assim, nas simulações efectuadas desprezamos os coeficientes de atrito. Esta medida, contudo, causou uma diferença perceptível no movimento de rotação.

Os valores de estrutura são os seguintes:

Comprimento do eixo das rodas $b = 0.27 \text{ m}$

Comprimento dos sensores $S = 0.18 \text{ m}$

Distância sensores-eixo das rodas $r_s = 0.13$ m
 Diâmetro das rodas $r_w = 0.035$ m
 Massa total do robot $M = 2.2$ Kg
 Distância do CG ao eixo das rodas $r_{CG} = 0.21$ m
 Momento de inércia no CG $J_{CG} \sim 0.05$ Kg.m²/s.

C. Usando controlo derivativo

Uma das experiências feita com este simulador foi verificar se existiria algum benefício na utilização de controlo derivativo para além do simples controlo proporcional. Os resultados da simulação mostram que a utilização de uma componente derivativa é, em geral, muito benéfica para a estabilidade do movimento do robot sobre a linha (fig. 8 e 9). Esta componente é tanto mais necessária quanto menor for a distância dos sensores ao eixo das rodas.

D. Alguns “pontos quentes” da estrutura

Em termos dos vários parâmetros estruturais foram feitos testes que permitiram identificar dois pontos com maior impacto no desempenho do robot: o avanço dos sensores

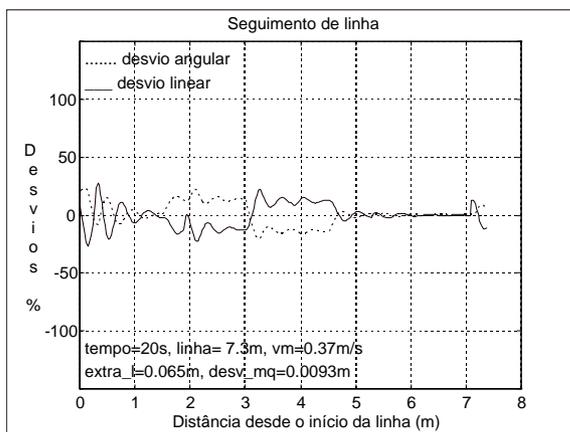


Fig. 8 - Resultado do simulador usando apenas controlo proporcional com $K_p=200$. A linha tem 1.5m em recta, 1.5m em curva à esquerda, 1.5m em curva à direita e o restante em recta.

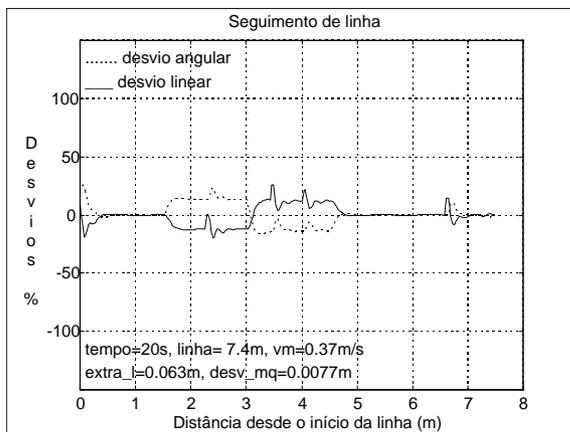


Fig. 9 - Resultado do simulador usando controlo proporcional e derivativo com $K_p=200$ e $K_d=300$. De notar as rápidas recuperações nas perturbações esporádicas da linha.

relativamente ao eixo das rodas e o momento de inércia relativo ao centro de rotação.

Pode-se verificar com o simulador o facto de que o encurtamento da distância dos sensores ao eixo aumenta as oscilações em torno da linha. Como foi dito na secção anterior, esta situação pode ser corrigida através de um aumento da componente derivativa na função de controlo.

De forma semelhante, o aumento do momento de inércia do robot torna as correcções angulares mais lentas levando a maiores oscilações em torno da linha. Este aumento ocorre, por exemplo, cada vez que o robot recolhe mais uma bola de bilhar já que o compartimento de transporte destas fica bastante afastado do centro de rotação. Cada bola representa, em média, um acréscimo de 0,012Kg.m² no momento de inércia global J_0 e de 0.2Kg na massa total M . Também neste caso a utilização de uma componente derivativa na função controladora reduz as oscilações em torno da linha.

VII. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta um modelo matemático para um pequeno robot autónomo capaz de seguir uma linha traçada no chão. É, ainda, descrita a construção de um simulador baseado nesse modelo e mostrado um exemplo de aplicação com a simulação do robot *Moliceiro*.

Conforme se pretendia mostrar, o exercício de elaboração do modelo é, de facto, um exemplo de multidisciplinaridade que usa conceitos de Electromecânica (motores DC), de Física Mecânica (Cinemática e Dinâmica) e de Geometria Analítica. A elaboração do simulador requer também, ainda que a um nível muito superficial, conceitos de Controlo Digital e Instrumentação.

Por outro lado, o modelo desenvolvido, e em particular o simulador, é uma ferramenta muito interessante quer para o fim específico de ajudar a melhorar as características de robots do tipo em questão quer para fins pedagógicos mais gerais, por exemplo, no ensino de Controlo ou de Instrumentação. A facilidade com que podem ser utilizados diferentes algoritmos de controlo, ou diferentes tipos de sensores, e imediatamente verificar o seu efeito torna este simulador um objecto didáctico de considerável valor.

REFERÊNCIAS

- [1] - J. J. D'Azzo and C. H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design*, McGraw-Hill, 1981.
- [2] - A. E. Fitzgerald et al., *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1975.
- [3] - Alonso and Finn, *Fundamental University Physics, Vol. I - Mechanics*, Addison Wesley, 1967.
- [4] - J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robotics: Inspiration to Implementation*, A K Peters, 1993.
- [5] - J. A. Vieira et al., *Moliceiro - Um Robot que Segue uma Linha*, Revista do DETUA, Vol. 1, Nº7, Janeiro de 1997.