

Análise do Regime Transitório de Circuitos Com Linhas de Transmissão

Filipa Borrego, José Carlos Pedro

Resumo - Este trabalho tem um carácter pedagógico, e destina-se a mostrar como o uso cuidadoso de algumas técnicas de processamento de sinal pode ser útil à determinação do regime transitório de circuitos que incluem linhas de transmissão. A análise começa pela revisão do regime estacionário sinusoidal, normalmente abordado em todos os cursos básicos de propagação guiada, para, de seguida, obter o regime transitório geral, por simples inversão de Fourier das soluções obtidas no domínio da frequência. Os problemas da transmissão de sinais em linhas dispersivas e da reflectometria temporal, são estudados e ilustrados com simulações de casos simples.

Abstract - This work has the pedagogical objective of showing the value of some signal processing techniques for the determination of the transient regime of circuits composed by transmission lines. The analysis method begins with the sinusoidal steady-state response determination, an approach usually followed in any undergraduate guided wave propagation course. Then, the general time domain transient regime is derived by Fourier transform inversion of the previously obtained frequency domain solution. The theoretical problems of signal transmission on dispersive transmission lines, or time domain reflectometry, are addressed and illustrated by simulating some simple cases.

I. INTRODUÇÃO

Até há alguns anos atrás a disciplina de Propagação Guiada tinha o seu impacto, na engenharia electrotécnica, quase exclusivamente reservado ao domínio das comunicações em onda contínua. Não surpreende, pois, que na grande maioria dos cursos de licenciatura esses assuntos se vissem inseridos na área das telecomunicações, e que a abordagem universalmente seguida fosse a do domínio da frequência. Com efeito, as aplicações em que os conhecimentos de propagação guiada eram tradicionalmente aplicados, exigiam uma descrição pormenorizada do comportamento dos meios de transmissão a excitações sinusoidais em regime estacionário, já que esta era a forma mais conveniente de representar os sinais a transmitir. É ainda vulgar, por exemplo, o uso de livros de texto em que a dedução da equação de onda que descreve a propagação numa linha de transmissão geral parte logo do princípio de que a excitação é do tipo sinusoidal e contínuo, eliminando, à partida, qualquer outro tipo de abordagem [1].

Actualmente, nota-se uma rápida mudança e alargamento do campo de aplicações da propagação guiada, que se manifesta, quer em domínios de utilização tradicional como as telecomunicações, quer na mais recente ciência dos computadores numéricos. No primeiro caso, é bem patente a mudança da transmissão em onda contínua para a transmissão digital, que cada vez mais vai atravessando todos os sistemas de telecomunicações. No segundo caso, trata-se de uma aplicação inteiramente nova, inicialmente pouco ligada ao domínio anterior, mas que, com o advento das redes de computadores e da extensão das comunicações digitais, se vão progressivamente fundindo. Em qualquer destes casos, a transferência de informação faz-se em intervalos de tempo discretos, numa sucessão de impulsos, onde a forma de onda adquire papel preponderante. Noções de tempo de subida, de descida e de estabelecimento, tempo de propagação ou tempo de atraso, nível de decisão ou margem de ruído, são agora tão importantes num telefone móvel digital, como na interligação de duas portas lógicas de uma placa de computador. Recorde-se, por exemplo, que mesmo nos mais vulgares computadores pessoais, o desenho de circuitos impressos para operação com frequências de relógio da ordem das centenas de MHz, já começa a exigir o tratamento daquelas antigas pistas de ligação equipotenciais como linhas de transmissão [2]. (Um quarto de comprimento de onda da frequência fundamental de um *clock* de 200MHz a propagar-se numa placa de fibra de vidro, é de cerca de 18cm, enquanto o correspondente à sua primeira componente harmónica ímpar já só é de 6cm).

Parece, então, claro, que a análise do regime transitório de um qualquer sistema onde se incluam elementos distribuídos começa a desempenhar um papel de crescente relevância prática, e que, por isso, deveria ser merecedor de maior atenção nos cursos de propagação guiada. De facto, não basta já o estudo do regime transitório em exemplos simples de linhas de transmissão não dispersivas e terminadas resistivamente, como os proporcionados pelos usuais diagramas de reflexões múltiplas [3]. É cada vez mais importante estender esta análise à transmissão de sinais temporais em meios dispersivos, bem como ao estudo das reflexões observadas em sistemas gerais desadaptados. O primeiro exemplo permitiria estudar efeitos fundamentais à transmissão digital, como é a interferência entre símbolos, enquanto o segundo proporcionaria um vasto campo de aplicações de reflectometria no domínio do tempo.

Infelizmente, e como se verá no seguimento deste trabalho, a obtenção de informação sobre o regime transitório, directamente da equação de onda, está longe de ser uma tarefa fácil. Pense-se, por exemplo, como determinar a onda reflectida gerada numa linha terminada por um condensador, quando a esta é imposta um degrau unitário, como onda incidente. A integração directa da equação de onda que obedece à condição fronteira

$i(l, t) = C \frac{dv(l, t)}{dt}$ é pouco convidativa, se for tentada de forma analítica, e mostra-se muito laboriosa numa abordagem numérica. Poderia, em alternativa, avançar-se com algumas noções qualitativas do tipo de imaginar que inicialmente o condensador se comporta como um curto-circuito impondo, portanto, um coeficiente de reflexão -1, tendendo depois a um circuito aberto - coeficiente de reflexão 1 - à medida que o tempo avança para infinito, e o condensador se carrega. Mas, este tipo de raciocínio, muito útil para cargas sem memória e largamente utilizado nos diagramas de reflexões múltiplas, não poderia fazer muito mais no caso presente. É óbvia a necessidade de métodos mais poderosos de ataque a este problema.

Se o uso da tecnologia digital veio trazer novas solicitações à propagação guiada, também é verdade que proporcionou o desenvolvimento de técnicas de processamento de sinal, que, aproveitadas nesse campo, se mostram de inigualável valor. Realmente, a solução do tipo de questões acima enunciadas pode encontrar-se, com relativa facilidade, se algumas dessas técnicas forem utilizadas. Basta, para isso, aproveitar o conhecimento já obtido do regime estacionário sinusoidal e encará-lo como a imagem, no domínio de Transformada de Fourier, da resposta temporal procurada.

O uso de computadores numéricos para efectuar as requeridas passagens entre domínios torna-se essencial, mas impõe problemas adicionais associados à discretização das funções em estudo. Dado que, quer a função temporal, quer a sua imagem na frequência, deverão ser amostradas, a ferramenta matemática necessária à conversão entre domínios é a Transformada Discreta de Fourier, DFT. Como se verá nos capítulos seguintes, por forma a preservar as características essenciais das funções em estudo, é fundamental cuidar certos aspectos. Como exemplo, recorde-se que o ritmo mínimo de amostragem se vê limitado pela exigência da reconstrução das funções sem erro de 'aliasing', e que, depois de amostradas, as funções em ambos os domínios passam a ser periódicas, o que requer grande cuidado na escolha da janela de observação.

Constitui principal objectivo deste trabalho, apresentar uma análise do regime transitório geral de sistemas com linhas de transmissão, fazendo um uso cuidadoso de algumas das técnicas básicas de matemática aplicada e processamento digital sinal. Para além deste objectivo científico, gostaríamos, ainda, de atingir a meta pedagógica de mostrar como a simples relação de noções adquiridas em áreas, aparentemente tão distintas, pode proporcionar, só por si, um salto qualitativo e quantitativo

na nossa capacidade de compreender e transformar o mundo.

II. ANÁLISE GERAL DA RESPOSTA TRANSITÓRIA DO SISTEMA

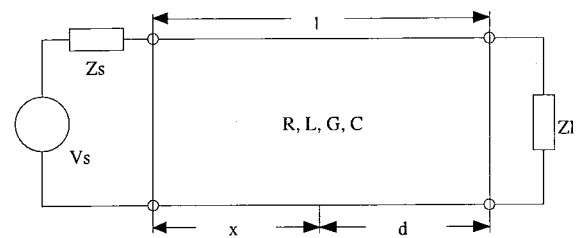


Fig.1 - Sistema com linha de transmissão geral

Consideremos o sistema de transmissão representado na Fig.1, constituído por um gerador representado pelo seu equivalente de Thevenin (V_s , Z_s), e uma carga Z_L ligados por uma linha de transmissão de comprimento l , de resistência e indutância série por unidade de comprimento, R e L , e condutância e capacidade por unidade de comprimento, G e C . Sabe-se que a imposição das leis de Kirchhoff das tensões e das correntes a um elemento de comprimento infinitesimal a esta linha conduz às seguintes equações diferenciais lineares no espaço e no tempo, conhecidas por equações dos telegrafistas:

$$\begin{aligned} \frac{dv(x, t)}{dx} + L \frac{di(x, t)}{dt} + R i(x, t) &= 0 \\ \frac{di(x, t)}{dx} + C \frac{dv(x, t)}{dt} + G v(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

A solução destas equações, que obedece simultaneamente às condições de fronteira (V_s , Z_s) em $x=0$ e Z_L em $x=l$, descreve a variação espacial e temporal da tensão e corrente em qualquer ponto da linha de transmissão. Este tipo de solução do problema goza da vantagem de ser absolutamente geral, mas, como usualmente acontece, é também bastante complicado. Uma forma mais inteligente de o resolver aproveita o facto de o sistema em causa ser linear. Para isso, assume-se que a excitação de entrada tem uma representação no domínio da frequência do tipo $[V_s(\omega), Z_s(\omega)]$ - função forçadora decomposta numa soma de excitações sinusoidais elementares $e^{j\omega t}$ - e determina-se a resposta como a soma das respostas parciais a cada um destes sinais elementares. Obtida assim a solução do problema no domínio da frequência, calcula-se qual o seu equivalente temporal, que constitui a solução em vista.

Recorde-se que, não sendo este o processo mais directo, nem permitindo a introdução de condições iniciais nos armazenadores de energia (o que se poderia vir a conseguir passando do domínio da Transformada de Fourier para o da Transformada de Laplace), tem, no entanto, duas inequívocas vantagens que o tornaram praticamente universal. Em primeiro lugar permite transformar um difícil problema matemático de resolução de uma equação diferencial, num problema bastante mais simples, de resolução de uma equação algébrica. E, em

segundo lugar, é importante ter presente que, em telecomunicações, a forma natural de representação das grandezas eléctricas é exactamente a do domínio da frequência. Pense-se, por exemplo, como descrever, no domínio temporal, uma terminação geral $Z_L(\omega)$.

O integral geral do sistema de equações (1) no domínio da frequência é dado pelo somatório de duas exponenciais complexas no espaço, o que, em termos da tensão da linha, se pode representar por:

$$V(x, \omega) = V_i(\omega) \exp(-\gamma(\omega)x) + V_r(\omega) \exp(\gamma(\omega)x) \quad (2)$$

onde $V_i(\omega)$ e $V_r(\omega)$ são duas constantes de integração, cuja interpretação, do ponto de vista físico, é a dos fasores da onda incidente e reflectida, respectivamente. Qualquer solução particular de (1) supõe a imposição de duas condições fronteira que permitirão a identificação destas duas constantes. Usualmente, para essas condições fronteira é utilizado o conhecimento da terminação da linha $Z_L(\omega) = V(l, \omega)/I(l, \omega)$, e da tensão à sua entrada, $V(0, \omega)$. A primeira conduz à determinação da razão:

$$\frac{V_r(\omega) \exp(\gamma(\omega)l)}{V_i(\omega) \exp(-\gamma(\omega)l)} = \Gamma_L(\omega) = \frac{Z_L(\omega) - Z_0(\omega)}{Z_L(\omega) + Z_0(\omega)} \quad (3)$$

enquanto da segunda se obteria:

$$V_i(\omega) + V_r(\omega) = V(0, \omega) \quad (4)$$

Resulta assim natural que (2) seja apresentada em função da distância à carga: $d=l-x$:

$$V(d, \omega) = V_i(\omega) \exp(-\gamma(\omega)(l-d)) + V_r(\omega) \exp(\gamma(\omega)(l-d)) \quad (5)$$

ou

$$V(d, \omega) = V_i(\omega) \exp(-\gamma(\omega)(l-d)) \times (1 + \Gamma_L(\omega) \exp(-2\gamma(\omega)d)) \quad (6)$$

Este é um resultado apresentado em qualquer curso de Propagação Guiada, e descreve a variação do fasor de tensão ao longo de uma linha terminada numa carga $\Gamma_L(\omega)$.

A obtenção do seu equivalente temporal passa pelo cálculo da transformada inversa de Fourier de $V(d, \omega)$: $v(d, t) = F^{-1}[V(d, \omega)]$. Por forma a permitir-se uma representação analítica desta tensão temporal, é conveniente avançar com um conjunto de simplificações normalmente adoptadas. Considerando, assim, a linha com impedância característica puramente real, Z_0 , não dispersiva e com atenuação constante na frequência, isto é, $\gamma = \alpha + j\beta$, com α constante na frequência e β proporcional à frequência, obtemos, simplesmente:

$$V(d, \omega) = V_i(\omega) \exp(-(\alpha + j\beta)(l-d)) \times (1 + \Gamma_L(\omega) \exp(2(\alpha + j\beta)d)) \quad (7)$$

Sabendo que, neste caso, a constante de fase, β , e a velocidade de propagação de uma onda na nossa linha de transmissão se podem relacionar por: $\beta = \omega/v$, (7) pode ainda substituir-se por:

$$V(d, \omega) = \exp(-\alpha(l-d)) V_i(\omega) \exp(-j\omega(l-d)/v) + \exp(-\alpha(l+d)) V_i(\omega) \exp(-j\omega l/v) \times \Gamma_L(\omega) \exp(-j\omega d/v) \quad (8)$$

cujas imagens no domínio dos tempos é:

$$v(d, t) = \exp(-\alpha(l-d)) v_i(t - (l-d)/v) + \exp(-\alpha(l+d)) \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_L(\tau - d/v) \cdot v_i(t - l/v - \tau) d\tau^* \quad (9)$$

Obtivemos, por fim, o regime transitório ou estacionário para qualquer ponto da linha, quando esta está sujeita a uma onda incidente à sua entrada de valor $v_i(t)$.

Com efeito, a solução agora apresentada vem função da tensão incidente à entrada da linha e não da tensão da fonte de Thevenin $v_s(t)$, já que só uma condição fronteira (a da carga) foi imposta. A condição fronteira da entrada da linha está implícita no valor de $v_i(t)$. Na realidade, assumindo, no domínio da frequência, uma linha excitada por uma fonte representada pelo seu equivalente de Thevenin $[V_s(\omega), Z_s(\omega)]$, ter-se-ia:

$$V(d = l, \omega) = \frac{Z_{in}(\omega)}{Z_{in}(\omega) + Z_s(\omega)} V_s(\omega)$$

onde $Z_{in}(\omega)$ é a impedância de entrada da linha, e

$$V(d = l, \omega) = V_i(\omega) [1 + \Gamma_L(\omega) \exp(-2\gamma l)] = V_i(\omega) [1 + \Gamma_{in}(\omega)] = \frac{2 Z_{in}(\omega)}{Z_{in}(\omega) + Z_0} V_i(\omega)$$

donde se obteria:

$$V_i(\omega) = \frac{1}{2} \frac{Z_{in}(\omega) + Z_0}{Z_{in}(\omega) + Z_s(\omega)} V_s(\omega)$$

* Para se chegar a este resultado utilizaram-se as seguintes regras das Transformadas Inversas de Fourier.

$$F^{-1}[F(\omega) \exp(-j\omega\tau)] = f(t) * \delta(t - \tau) = f(t - \tau)$$

ou

$$V_i(\omega) = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_s(\omega)} \frac{1}{1 - \Gamma_s(\omega)\Gamma_L(\omega)\exp(-2\gamma l)} V_s(\omega)$$

que, no domínio temporal, corresponde a:

$$v_i(t) = \frac{1}{2} F^{-1} \left[\frac{Z_{in}(\omega) + Z_0}{Z_{in}(\omega) + Z_s(\omega)} \right] * v_s(t)$$

Repare-se que, se o gerador estiver adaptado à linha [$Z_s(\omega) = Z_0$], $v_i(t)$ vem:

$$v_i(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \delta(\tau) v_s(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} v_s(t)$$

que é a afirmação de que, não havendo reflexões no gerador, a soma de todas as ondas incidentes, isto é, ondas que viajam no sentido crescente de xx , é composta por um único termo coincidente com a primeira onda incidente do regime transitório da linha.

É interessante notar que, no domínio do tempo (9), tal como no da frequência (2), a tensão em qualquer ponto da linha é dada pela soma de uma onda incidente com uma onda reflectida. Como seria de esperar, a onda incidente aparece atrasada do tempo de propagação $(l-d)/v$ e atenuada de $e^{-\alpha(l-d)}$, enquanto a onda reflectida - gerada na carga $\rho_L(t)$, quando a esta chega a onda incidente $e^{-\alpha l} v_i(t-l/v)$ - vem atrasada de d/v e atenuada de $e^{-\alpha d}$. Para além disto, é ainda conveniente sublinhar que o integral que constitui a segunda parcela de (9), não é mais que a afirmação de que a resposta de uma carga linear sujeita a uma determinada onda incidente, pode ser calculada pela convolução com a resposta impulsional ($\rho_L(t)$) de um sistema cuja entrada é essa onda incidente, e a saída a onda reflectida procurada. Finalmente, refira-se que, no caso particular de uma carga desprovida de memória, ou seja, aquela em que a resposta impulsional $\rho_L(t)$ é um Dirac centrado em d/v , $\delta(t-d/v)$, o integral de convolução contribui somente com um atraso, e a onda reflectida tem exactamente a mesma forma temporal que a incidente. Este é o caso em que a carga é resistiva (onde se inclui também o curto circuito e o circuito aberto), e cuja solução se pode obter por uma simples construção gráfica conhecida pelo nome de diagrama de reflexões múltiplas [3].

Para além da determinação da tensão temporal ao longo da linha, mostra-se também de grande interesse prático a identificação da onda reflectida em qualquer ponto, e, em particular, à entrada da nossa linha de transmissão terminada. É este o campo de um vasto conjunto de problemas e experiências de reflectometria no domínio do tempo. Para isso, procuremos determinar a resposta impulsional que caracteriza a onda reflectida, ou seja, a expressão do coeficiente de reflexão em qualquer ponto da linha em regime transitório. Sabemos que, por definição, o coeficiente de reflexão na frequência é dado pela razão

entre os fasores das ondas reflectida e incidente num dado ponto. Logo, de (2) tira-se que:

$$\Gamma(x, \omega) = \frac{V_r(\omega)\exp(+\gamma(\omega)x)}{V_i(\omega)\exp(-\gamma(\omega)x)} \quad (10)$$

ou, em função do coeficiente de reflexão na carga, $\Gamma_L(\omega)$, e da distância desta ao ponto de teste, $d=l-x$:

$$\Gamma(d, \omega) = \Gamma_L(\omega) \exp(-2\gamma(\omega)d) \quad (11)$$

Considerando, novamente, o caso mais simples da linha não dispersiva e com atenuação constante na frequência, obtém-se:

$$\Gamma(d, \omega) = \exp(-2\alpha d) \Gamma_L(\omega) \exp(-j\omega 2d/v) \quad (12)$$

Passando para o domínio dos tempos, tem-se, finalmente, a expressão geral do coeficiente de reflexão em regime transitório:

$$\rho(d, t) = \exp(-2\alpha d) \rho_L(t-2d/v) \quad (13)$$

Tal como no caso da tensão em qualquer ponto da linha, também o coeficiente de reflexão é dado, tanto no domínio da frequência como no do tempo, pelo coeficiente de reflexão na carga, acrescido da atenuação e atraso correspondentes à propagação da onda incidente, desde o ponto de teste até à carga, e do retorno da onda reflectida, desde a carga ao ponto de teste.

III. APLICAÇÕES

A. Estudo da distorção de forma de um impulso, causada por uma linha dispersiva

O primeiro exemplo que decidimos abordar, ilustra os efeitos da dispersão da linha sobre o sinal a transmitir. Para isso, considere-se um sistema particularmente simples em que a linha de transmissão se encontra terminada com uma carga de valor igual à sua impedância característica. Nestas condições o coeficiente de reflexão é nulo, e a tensão ao longo da linha pode representar-se somente por uma onda incidente. A solução geral do domínio da frequência, (2), viria então:

$$V(x, \omega) = V_i(\omega) \exp(-\gamma(\omega)x) \quad (14)$$

que agora se pode rescrever como:

$$V(x, \omega) = V_i(\omega) \exp(-\alpha(\omega)x) \exp(-j\beta(\omega)x), \text{ valendo, na carga:}$$

$$V_L(\omega) = V_i(\omega) \exp(-\alpha(\omega)l) \exp(-j\beta(\omega)l) \quad (15)$$

A determinação da variação temporal da tensão na carga $v_L(t)$, exige a inversão da transformada de Fourier de (15).

Não tendo restringido, à partida, a forma de $\alpha(\omega)$ ou $\beta(\omega)$, não é possível inverter estas funções, e $v_L(t)$ deverá ser apresentada como:

$$V_L(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[e^{-\alpha(\omega)l} e^{-j\beta(\omega)l}] v_i(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[T_r(\omega)] v_i(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} t_r(\tau) v_i(t-\tau) d\tau \quad (16)$$

É no entanto variada a informação que deste resultado se pode tirar. Em primeiro lugar, repare-se que se a linha fosse não dispersiva a atenuação, $e^{-\alpha l}$, constituiria um simples factor de escala, enquanto β seria proporcional à frequência. A transformada inversa de Fourier de $e^{-\gamma(\omega)l}$ reduzir-se-ia a um impulso de Dirac de valor igual ao factor da atenuação total da linha e centrado em l/v , e a convolução deste teria como efeito no sinal, um simples atraso igual ao tempo de propagação. Neste caso, a linha comportar-se-ia como um sistema com memória mas de atraso constante, isto é, o sinal recebido na carga seria uma mera réplica do sinal emitido, atenuada e atrasada.

Generalizando este raciocínio à linha dispersiva, pode pensar-se que ela irá impor atenuações e atrasos distintos a cada uma das componentes de frequência do sinal. Assim sendo, nem o espectro de amplitudes do sinal recebido manterá o aspecto do sinal emitido, nem a fase dos dois se distinguirá apenas pela simples diferença de fase linear. O sinal recebido deixará de ser uma imagem atrasada e escalada do sinal emitido, passando a apresentar distorção de forma.

Como foi dito na Introdução, o tratamento numérico deste tipo de problemas requer alguns cuidados. Por isso, antes de passar a apresentar resultados de simulação, vamos discutir alguns pormenores de processamento digital de sinal cujo impacto nos cálculos se espera determinante.

Observando as expressões (15) e (16) conclui-se que, no domínio da frequência, a contribuição da linha para a distorção do sinal tem a forma de uma exponencial complexa, $T_r(\omega) = e^{-\gamma(\omega)l} = e^{-\alpha(\omega)l} e^{-j\beta(\omega)l}$. No caso mais simples da linha não dispersiva, esta é uma função periódica em ω , cujo período é $\omega_0 = 2\pi \cdot v/l$, e que se estende desde 0 a infinito. A representação desta função num computador digital, uma máquina de estados finitos, obriga a discretizá-la com um determinado intervalo de amostragem, ω_a , (não inferior a pelo menos duas amostras por ciclo, isto é, $\omega_a < \omega_0/2$), e num intervalo finito $\Omega = N \cdot \omega_a$. Sabendo que esta é a representação, no domínio da frequência, da função temporal que descreve a transmissão na linha, a determinação de $t_r(t)$ exige o cálculo da Inversa da Transformada Discreta de Fourier, IDTF. Deste modo, $t_r(t)$ será também uma função discreta e periódica no tempo, com intervalo de amostragem $t_a = 2\pi/\Omega$ e período $T = 2\pi/\omega_a$. Sendo $t_r(t)$ discreta periódica no tempo, $T_r(\omega)$ deverá ser periódica na frequência com um período Ω . Esta periodicidade de $T_r(\omega)$ nada tem que ver com a sua natureza, mas sim com o tipo de técnica matemática de análise de sinal utilizada. Sem entrar em grandes

pormenores, é fácil concluir que se se pretender manter inalterada a forma de $T_r(\omega)$, é necessário garantir que Ω seja um número inteiro, K , de períodos ω_0 . Se assim não acontecesse, Ω incluiria sempre um período ω_0 incompleto, podendo demonstrar-se que esta truncatura produziria um espalhamento temporal do impulso que resultaria da análise correcta [4]. A forma da resposta obtida seria a de um impulso de menor valor, a que se haveriam colado umas abas laterais.

No caso da linha dispersiva, $T_r(\omega)$ já não é exactamente periódica, pois que $\alpha(\omega)$ impõe uma variação de amplitude com a frequência, e $\beta(\omega)$ deixará de ser absolutamente proporcional a ω . Assim, não há forma de garantir que a repetição do espectro, imposta pelo processamento numérico, mantenha inalterada a forma de $T_r(\omega)$ fora do intervalo de observação, e um certo erro torna-se inevitável. De qualquer maneira, dado que dispersão de frequência nunca será demasiado forte, $T_r(\omega)$ será sempre 'quasi-periódica', e as referências acima devem ainda aplicar-se. No caso da determinação da resposta a uma onda incidente não impulsional, o produto $V_i(\omega) T_r(\omega)$ será, em geral, aperiódico sendo de esperar um certo espalhamento temporal do impulso. Nesta situação, e para além disto, há ainda que considerar um intervalo de amostragem Ω que inclua a quase totalidade da zona de frequências onde $T_r(\omega)$ não é nulo. Garante-se, assim, um ritmo de amostragem no tempo, $1/t_a$, que obedece ao critério de Nyquist, evitando erros adicionais resultantes da eliminação das componentes de variação temporal mais rápida.

No fundo, a discussão acima centrou-se só num dos aspectos da escolha da janela de observação, o comprimento, considerando-se a sua forma sempre igual e rectangular. No entanto, a forma da janela contribui também para o nível de erro com que se irá obter a resposta temporal. Com efeito, existem várias janelas espectrais (isto é, funções multiplicativas de espectro limitado como a janela rectangular, a de Kaiser, de Hamming ou de Hanning) que poderiam ser utilizadas para trancar $T_r(\omega)$, devendo ser a sua selecção resultado de um compromisso entre o alargamento indesejado da resposta pretendida, e o nível do patamar de ruído numérico introduzido [4].

Em conclusão, o ritmo de amostragem da frequência, ω_a , o comprimento da janela espectral utilizada, $\Omega = N \cdot \omega_a$, e a sua forma, devem ser escolhidos tendo em atenção o período natural de $T_r(\omega)$, ω_0 , e o intervalo de frequências onde tem a grande parte da sua potência espectral, a resolução temporal pretendida, t_a , o intervalo de tempo de descrição de $t_r(t)$, T , e, finalmente, a referida relação de compromisso oferecida pela janela escolhida.

Por forma a ilustrar este efeito, considere-se uma linha dispersiva, de 3Km, para a qual se pretende determinar a resposta a dois pulsos rectangulares.

O meio de transmissão escolhido é uma linha de transmissão bifilar cujo raio dos condutores de cobre é $r = 1.321\text{mm}$, a distancia entre os seus centros de

$d = 30.48\text{cm}$, o dielétrico que os envolve tem $\epsilon_r = 1$ e $\text{tg } \delta = 1 \times 10^{-2}$. A excitação (tensão incidente à entrada da linha) e a resposta (tensão incidente na carga) encontra-se na Fig.2.

Repare-se na possibilidade de interferência entre símbolos provocada pelo alargamento dos pulsos rectangulares. Num sistema digital de transmissão, este fenómeno coloca graves problemas aos circuitos de decisão (a presença de tensão entre os dois pulsos pode perigar a observação do correspondente zero lógico) e

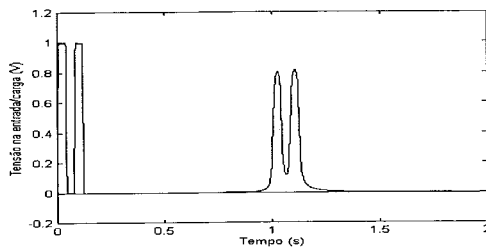


Fig.2 - Resposta da transmissão de dois pulsos rectangulares numa linha dispersiva

constitui principal limitação ao aumento da velocidade de transmissão de dados.

B. Linha terminada em curto-circuito:

Pretendemos, agora, calcular o coeficiente de reflexão à entrada de uma linha de 1m, não dispersiva, alimentada por um gerador e terminada em curto-circuito.

Como foi demonstrado atrás, o coeficiente de reflexão à entrada da linha é dado por:

$$\Gamma_i(\omega) = \Gamma_L(\omega) \exp(-j\omega 2l/v)$$

Para este caso, em que o coeficiente de reflexão é -1 e a velocidade é de $300 \times 10^{+08}$ m/s, vem:

$$\Gamma_i(\omega) = -\exp(-j\omega 6.6 \times 10^{-09})$$

No domínio do tempo obtemos:

$$\rho_i(t) = -\delta(t - 6.6 \times 10^{-09}).$$

Como se pode verificar, o coeficiente de reflexão dá-nos a onda reflectida quando a onda incidente é um impulso. Sendo assim, se se emitisse um impulso para a linha nas condições descritas, obter-se-ia um impulso reflectido que seria invertido e atrasado do dobro do tempo de propagação, de forma geométrica igual.

C. Linha terminada com um condensador:

Considere-se, agora uma linha de comprimento 1m sem atenuação mas terminada com um condensador de capacidade $C = 39.1\text{pF}$. Como foi dito atrás, o coeficiente de reflexão varia no tempo; tem-se, então, que trabalhar na frequência.

$$\Gamma_i(\omega) = \Gamma_L(\omega) \exp(-j\omega 2l/v),$$

$$\text{em que } \Gamma_L(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0}.$$

Com algumas manipulações matemáticas, obtém-se, ainda na frequência:

$$\Gamma_i(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C} - Z_0}{\frac{1}{j\omega C} + Z_0} \exp(-j\omega 2l/v) =$$

$$= \frac{\frac{1}{Z_0 C}}{\frac{1}{Z_0 C} + j\omega} \exp(-j\omega 2l/v) - \frac{j\omega}{\frac{1}{Z_0 C} + j\omega} \exp(-j\omega 2l/v).$$

Passando, finalmente, para o domínio do tempo, vem:

$$\rho_i(t) = \frac{1}{Z_0 C} \exp(-1/Z_0 C(t-2l/v)) u(t-2l/v) -$$

$$-\frac{d}{dt} [\exp(-1/Z_0 C(t-2l/v)) u(t-2l/v)] =$$

$$= \frac{1}{Z_0 C} \exp(-1/Z_0 C(t-2l/v)) u(t-2l/v) -$$

$$-\exp(-1/Z_0 C(t-2l/v)) \delta(t-2l/v) +$$

$$+ \frac{1}{Z_0 C} \exp(-Z_0/C(t-2l/v)) u(t-2l/v) =$$

$$= \frac{2}{Z_0 C} \exp(-1/Z_0 C(t-2l/v)) u(t-2l/v) - \delta(t-2l/v).$$

Neste caso, para os valores dados atrás, vem:

$$\rho_i(t) = 1 \times 10^{+09} \exp(-5.E+08 (t-6.6E-09)) u(t-6.6 \times 10^{-09}) -$$

$$-\delta(t-6.6 \times 10^{-09})$$

Analisando o resultado do exemplo, verifica-se que se obtém a soma de uma função exponencial, que decai no tempo, válida a partir de $t=6.6\times10^{-9}$ e um impulso negativo nesse ponto.

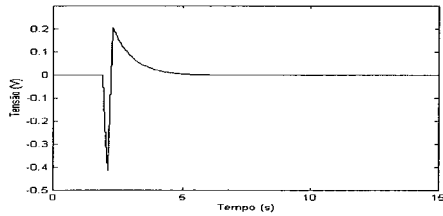


Fig.3 - Resposta impulsional de uma linha terminada com um condensador

Ao simular este exemplo, verifica-se que a resposta que se obtém, é, na realidade, um impulso negativo e uma exponencial que decai no tempo.

Se se quiser, agora, calcular a resposta a um degrau, basta multiplicar o coeficiente de reflexão à entrada, calculado atrás, na frequência, pela Transformada de Fourier de um degrau. Sendo assim, e invertendo de novo para o domínio dos tempos, obtém-se:

$$v_r(0,t) = (1-2 \exp(-1/Z_0C(t-2l/v))) u(t-2l/v).$$

Calculando a tensão para valores extremos do tempo, vem, para o dobro do tempo de propagação, $v_r=-1$. No limite tem-se $v_r=1$.

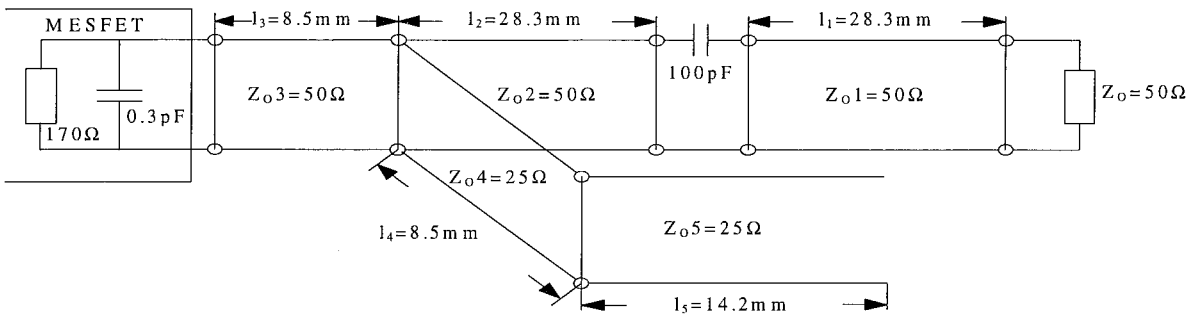


Fig.4 - Malha de adaptação de saída de um amplificador de 2 GHz a MESFET

D. Resolução espacial de uma rede de adaptação do tipo linha - 'stub':

Consideremos, por fim um caso mais complexo. Temos um amplificador a MESFET cuja impedância de saída se pode modular como o paralelo de uma resistência de 170 Ω com um condensador de 0.3pF. A rede de saída do amplificador é realizada em linhas *micro-strip*, com $\epsilon_{\text{reff}}=7$, e divide-se em duas partes. A primeira é constituída por uma linha de impedância característica $Z_{01}=50\ \Omega$, comprimento $l_1=0.5\lambda$ (28.3mm), seguido de um condensador de desacoplamento de 100pF, e outra linha de impedância característica $Z_{02}=50\ \Omega$ e comprimento $l_2=0.5\lambda$ (28.3mm).

A segunda constitui a malha de adaptação propriamente dita. Tem uma linha ligada ao dreno do MESFET, de $Z_{03}=50\Omega$ e $l_3=0.15\lambda$ (8.5mm) e um 'stub' de impedância $Z_{04}=25\ \Omega$, e comprimento aproximado de $l_4=0.15\lambda$ (8.5mm) terminado em curto circuito. Este curto-circuito é realizado por uma linha de impedância característica $Z_{05}=25\ \Omega$ e de comprimento $\lambda/4$ (14.2mm), terminada em aberto.

Suponhamos, agora, que tendo montado o circuito este não funcionou como esperado. No sentido de resolver o problema mediu-se o coeficiente de reflexão à saída do amplificador, tendo-se verificado uma forte desadaptação em toda a banda. Dado que esta medida inclui informação de todos os nós da malha, mas referida ao porto de saída, não é possível daí inferir qual o componente defeituoso.

O ideal seria dispor de uma medida capaz de resolver o circuito espacialmente. Uma forma de o conseguir seria fazer incidir impulso na saída e esperar as reflexões resultantes. A conversão tempo - espaço, com base na velocidade de propagação na linha, permitir-nos-ia obter a informação espacial desejada. Recordando que o diagrama de reflexões temporal se pode extrair directamente da Transformada Inversa de Fourier do coeficiente de reflexão à saída, no domínio da frequência, percebemos que até já dispomos de todas as observações laboratoriais necessárias. O resultado esperado de uma simulação deste tipo, encontra-se na Fig.5.

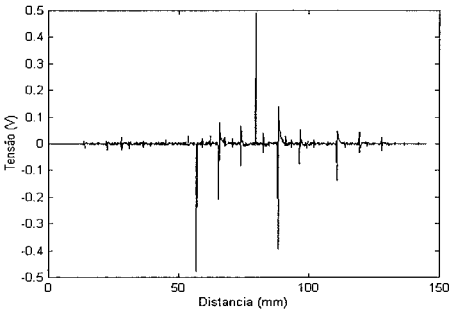


Fig.5 - Resposta impulsional de uma linha com um 'stub' terminada com a impedância de saída de um MESFET

No ponto de derivação do 'stub' ($l=56.5\text{mm}$) tem-se um coeficiente de reflexão $\rho = -0.5$, o que corresponde a um coeficiente de transmissão, para a linha que o liga à

impedância de saída do MESFET, de $\rho_t = 0.5$. Assim, o impulso transmitido chega a esta impedância e reflecte-se. Não esquecer ela inclui um condensador, ou seja, a reflexão tem uma forma semelhante à do exemplo anterior, exemplo C..

Ao mesmo tempo, há parte do impulso que se transmite para o 'stub' com coeficiente de transmissão $\rho_t = 0.5$ e que se reflecte no circuito aberto que o termina ($l=22.7\text{mm}$ distanciada da junção). O tempo que este impulso demora a voltar ao ponto de derivação é maior que o tempo que o impulso reflectido na carga demora até ao mesmo ponto. Ao voltar ao ponto de derivação do 'stub', o impulso reflectido no dispositivo sofre nova reflexão com $\rho = -0.5$, obtendo-se assim, reflexões múltiplas. Note-se, no entanto, que o mesmo já não acontece ao impulso que, tendo sido reflectido no circuito aberto e viajando num meio de impedância característica de $25\ \Omega$, encontra uma terminação com impedância igual a $50\ \Omega // 50\ \Omega = 25\ \Omega$.

O resultado obtido por inversão do coeficiente de reflexão realmente medido no circuito, era o representado na Fig.6.

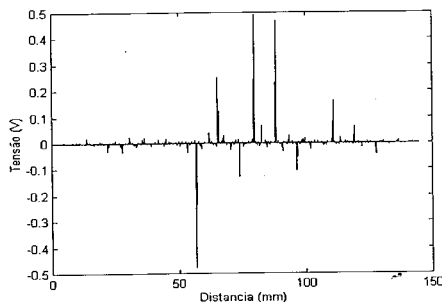


Fig.6 - Resposta impulsional de uma linha com um 'stub' que tem uma avaria

O que será a avaria?

É fácil verificar que a diferença entre as duas simulações se prende com a impedância terminal ($l=65.1\text{mm}$). O primeiro ponto em que anteriormente era visível a resposta do condensador (com o mesmo tipo de onda que o exemplo C.) agora já não existe, mas amplitude do coeficiente de reflexão nesse ponto é 1 o que equivale a dizer que a impedância terminal da rede é um circuito aberto. Como este circuito é um modelo para a impedância de saída de um amplificador a MESFET pôde concluir-se que este tem uma soldadura defeituosa.

Tem-se, assim, um método para a detecção de avarias. Este método, que aproveita a reflectometria temporal - espacial, encontra-se disponível em alguns equipamentos de caracterização de quadripolos [5], evitando a necessidade de osciloscópios e geradores de impulsos muito rápidos.

IV. CONCLUSÕES

Em conclusão, apresentaram-se algumas bases para o estudo do regime transitório de circuitos que envolvam linhas de transmissão. Usando a solução da equação de onda para o caso da excitação sinusoidal contínua, e alguns conhecimentos de transformadas de Fourier, determinou-se a resposta transitória correspondente à transmissão e reflexão numa linha terminada. Como ilustração, apresentou-se a resposta impulsional correspondente à onda reflectida numa linha terminada reactivamente, e a transmissão de um impulso rectangular numa linha dispersiva. Finalmente, e como exemplos de interesse prático, discutiu-se o uso destes conceitos na solução de problemas de telecomunicações sujeitos a interferência entre símbolos, e ainda a sua aplicação à resolução espacial de circuitos distribuídos.

REFERÊNCIAS

- [1] John D. Kraus, Electromagnetics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.
- [2] D. Corso, H. Kirmann e J. Nicoud, Microcomputer Buses and Links, Academic Press, Ltd, London, 1986.
- [3] José C. Neves, "Apontamentos de P.G."
- [4] Murat Kunt, Digital Processing, Artech House, Inc., Norwood MA, 1986.
- [5] Model 360 B - Vector Network Analyser System - Operational Manual, Wilton Co., Set. 1991.