

# Reconstrução de sinal e imagem: conjunto de programas para teste de diferentes algoritmos

M. J. C. S. Reis (\*), P. J. S. G. Ferreira

(\*) CETAV / UTAD

**Resumo** – Neste artigo abordamos o problema da reconstrução de sinal e imagem. Apresentamos duas aplicações desenvolvidas em Java, que podem ser utilizadas como ferramentas de ensino de técnicas de reconstrução de sinal e imagem, ou como laboratório de experiências no estudo da aplicabilidade destes métodos a casos concretos de reconstrução e no desenvolvimento de novos algoritmos. Estas aplicações possuem interfaces fáceis de usar, baseadas em menus e outros elementos gráficos. O utilizador pode efectuar simulações com os seus próprios sinais/imagens e em qualquer plataforma.

**Palavras chave** – Reconstrução de sinal, interpolação, *applets*, Java, ensino.

**Abstract** – In this paper we consider signal and image reconstruction problems, and present two Java applets that can be used as teaching tools or as a means of comparing and assessing specific signal and image reconstruction algorithms. The applets have user-friendly graphical interfaces, and the simulations can be carried out using data supplied by the user, in any computer platform that supports Java.

## I. RECONSTRUÇÃO DE SINAL

Um dos assuntos mais estudados nas áreas de processamento de sinal e imagem é o da reconstrução. O teorema da amostragem, atribuído por vários autores a Whittaker, Shannon e Kotelnik (veja-se [1], por exemplo), resulta de um problema de reconstrução de sinal: o problema da interpolação de um sinal  $f(t)$  de banda limitada a partir das suas amostras  $f(kT)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Um sinal  $f(t)$  diz-se de banda limitada a  $[-\sigma, +\sigma]$  se

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{+\sigma} \hat{f}(w) e^{jw t} dw,$$

onde  $\hat{f}$  designa a transformada de Fourier de  $f$ ,

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jw t} dt.$$

Pelo teorema da amostragem, e para  $W \geq (\sigma/\pi)$ , este sinal pode ser totalmente recuperado a partir das suas amostras  $f(k/W)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , da seguinte forma:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/W) \text{sinc}(Wt - k), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

onde  $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/\pi t$ ,  $t \neq 0$  e  $\text{sinc}(0) = 1$ .

Quando a densidade de amostras é superior ao mínimo necessário, isto é, quando amostramos o sinal original a uma frequência superior à frequência de Nyquist, diz-se que há sobre-amostragem. Isto é algo que acontece muito frequentemente em aplicações práticas. Esta redundância permite a reconstrução de algumas amostras do sinal a partir das restantes [2]. Quando há sobre-amostragem, (1) deve substituir-se por

$$f(t) = r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k/W) \text{sinc}[r(Wt - k)],$$

onde  $r = \sigma/(W\pi)$ ,  $r < 1$ , é designado de factor de sobre-amostragem.

Na prática, a necessidade de conhecer as amostras  $f(k/W)$  do sinal para  $k \in \mathbb{Z}$  levanta alguns obstáculos. Uma das formas de contornar este problema é considerar o sinal periódico de período  $n$ , onde  $n$  representa o número de amostras conhecidas do sinal. Desta forma é possível utilizar ferramentas como a transformada discreta de Fourier. Todos os algoritmos que aqui mencionaremos têm por base este princípio. Podemos dividir estes algoritmos em dois grandes grupos: algoritmos de dimensão  $n$ , ou máxima, ( $n$  representa o número total de amostras do sinal); e algoritmos de dimensão  $p$ , ou mínima, ( $p$  representa o número de amostras desconhecidas). Os algoritmos de Papoulis-Gerchberg [3], [4], Projecções Alternadas [5], entre outros, enquadram-se no primeiro grupo. Outros algoritmos, como os propostos em [6], [7] e [8], [9], pertencem ao segundo grupo.

### A. Algoritmo de Papoulis-Gerchberg e Projecções Alternadas

O algoritmo de Papoulis-Gerchberg foi inicialmente apresentado, de forma independente, nos trabalhos [4] e [3] para resolver o problema da extrapolação de sinais de banda limitada. Uma versão discreta do mesmo foi estudada em [10] e [11]. Este algoritmo pode ser visto como um caso particular do método das projecções alternadas [5]. Para uma análise detalhada das condições de convergência do algoritmo de Papoulis-Gerchberg e do erro de aproximação consulte-se [11].

Como ficou dito, estes algoritmos manuseiam, simultaneamente, todas as amostras do sinal, isto é, se o número de amostras do sinal original é  $n$ , então a dimensão dos vectores e matrizes envolvidas no processo de reconstrução é  $n$ . Por esta razão, designá-los-emos por algoritmos de dimensão máxima.

Na maioria dos casos isto constitui uma desvantagem. Os algoritmos de dimensão máxima exigem mais memória, mais tempo de cálculo por iteração e em geral um número de iterações elevado, consequência das lentas taxas de convergência, mesmo quando se utilizam técnicas simples de aceleração de convergência, nomeadamente, relaxação.

*B. Algoritmos de dimensão mínima*

Em [6], [7], propõe-se um método que se pode designar de dimensão mínima, uma vez que a dimensão dos vectores e matrizes envolvidas é  $p$ , sendo  $p$  o número de amostras desconhecidas. Gröchenig e Strohmer, em [8], [9], propõem métodos que se podem considerar como duais deste, como explicado em [12]. Neste caso, a dimensão dos vectores e matrizes é imposta pelo número de harmónicos não nulos da transformada discreta de Fourier do sinal.

Estes métodos manipulam vectores de dimensão imposta pelo número de amostras desconhecidas. Por conseguinte, esta dimensão é mínima no tempo ou na frequência. Dependendo do domínio de aplicação, uns métodos podem levar vantagem sobre os outros.

A solução para o problema de reconstrução pode ser atingida directa ou iterativamente. Quando se utilizam técnicas iterativas apropriadas as taxas de convergência dos métodos são, regra geral, muito superiores às atingidas pelos métodos apresentados no ponto anterior. As vantagens destes métodos estão assim bem definidas.

II. UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DA RECONSTRUÇÃO

Em [13], [14] propõe-se a solução que a seguir se descreve para o problema da reconstrução. Seja o sinal original representado por  $f(t)$  e amostrado de  $T$  em  $T$  segundos ( $T = 1/W$ ). Suponhamos que perdámos  $p$  amostras cujos índices são indicados pelo conjunto  $\mathcal{U} = \{i_0, i_1, \dots, i_{p-1}\}$ . Então

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{h} \tag{2}$$

onde o vector  $\mathbf{u}$ , de dimensão  $p$ , representa as amostras perdidas.

Para o caso de sinal unidimensional

$$h_j = \sum_{k \notin \mathcal{U}} f(kT)K^r(i_j - k), \quad (0 \leq j < p),$$

e

$$S_{jk} = K^r(i_j - i_k), \quad (0 \leq j, k < p),$$

onde  $K^r(x) = r \operatorname{sinc}(rx)$ , ou seja, o núcleo de interpolação usual.

À imagem do que foi feito em [15], podemos optar por fazer  $K^r = r\varphi_i(rx)$ , sendo estes os núcleos de interpolação estudados por Butzer et al. em [16], onde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= M_2(t) \\ \varphi_2(t) &= 4M_3(t) - 3M_4(t) \\ \varphi_6(t) &= M_4(t) + \frac{1}{3}M_2(t) - \frac{1}{6}\{M_2(t+1) \\ &\quad + M_2(t-1)\} \\ \varphi_7(t) &= 4M_4(t) + \frac{1}{2}\{M_4(t+1) + M_4(t-1)\} \end{aligned}$$

$$-2\{M_5(t + \frac{1}{2}) + M_5(t - \frac{1}{2})\}.$$

Em [15] apresenta-se um estudo detalhado da utilização destas funções como núcleos de interpolação e onde se mostra o seu comportamento superior, face às tradicionais *sincs*, para  $r \approx 1$ .

No caso de sinal 2D (imagem) estes núcleos podem ser utilizados da seguinte forma:

$$h_{ij} = \sum_{k \notin \mathcal{U}} \sum_{l \notin \mathcal{U}} f_{kl} K_R^r(\rho_i - \rho_k) K_C^r(\lambda_j - \lambda_l), \quad 0 \leq i, j < p,$$

e

$$S_{ij} = K_R^r(\rho_i - \rho_j) K_C^r(\lambda_i - \lambda_j), \quad 0 \leq i, j < p,$$

com

$$K_m^r = \begin{cases} r_m \operatorname{sinc}(r_m x), \text{ ou} \\ r_m \varphi(r_m x) \end{cases}$$

e

$$\mathcal{U} = \{(\rho_0, \lambda_0), (\rho_1, \lambda_1), \dots, (\rho_{p-1}, \lambda_{p-1})\}.$$

Note-se que na determinação de  $\mathbf{h}$  intervêm todas as amostras conhecidas do sinal  $e$ , sendo estas em número infinito, o processo sugerido não pode ser realizado de forma exacta, na prática. Por outro lado, se utilizarmos os núcleos de interpolação propostos em [16], que não são mais do que combinações lineares de B-Splines, só é necessário conhecer o sinal na vizinhança da amostra  $i$ , uma vez que estes núcleos possuem suporte compacto.

Se (2) tiver solução, então o problema da reconstrução está resolvido. Note-se que esta equação sugere a utilização de iteração directa

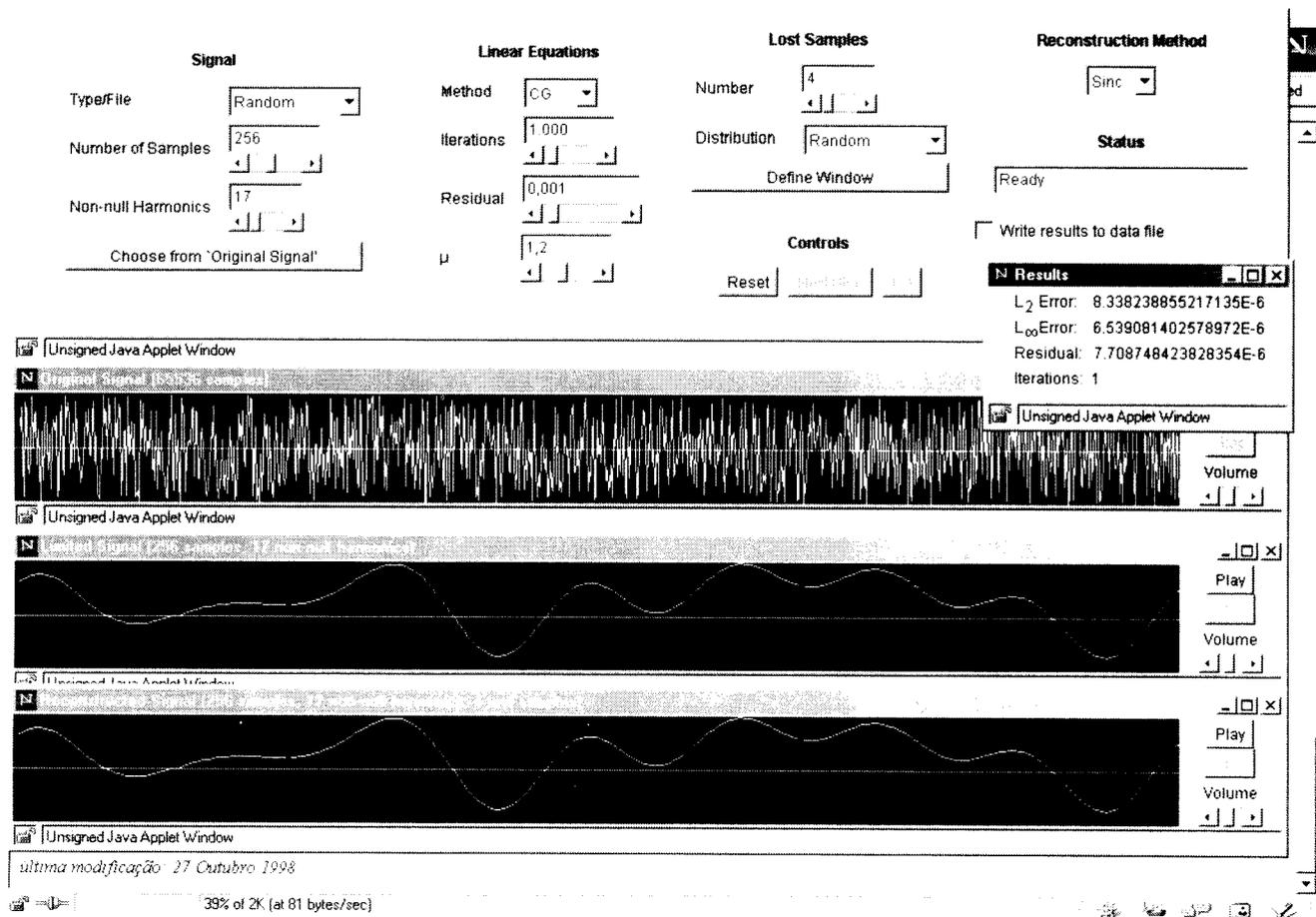
$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{u}_i + \mathbf{h},$$

ou outras técnicas iterativas, podendo contudo, ser resolvida de forma não iterativa. Qualquer dos processos deve conduzir a uma aproximação à solução

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}\mathbf{h}.$$

Dos métodos iterativos geralmente utilizados na resolução de sistemas de equações lineares, um dos que se mostra mais eficaz na resolução deste problema é o dos Gradientes Conjugados (GC) [17], [18]. Dos métodos de inversão directa, o método de factorização de Cholesky é o que revela melhor comportamento em termos de tempo de execução, sendo o método de decomposição em valores singulares o que revela erros finais mais baixos [18], [19]. Na realidade, tudo depende do número  $n$  de amostras do sinal, do número  $2m + 1$  de harmónicos não nulos da transformada discreta de Fourier do sinal e da distribuição das amostras desconhecidas [20]. Para o domínio do tempo, regra geral, quando o número de amostras desconhecidas é reduzido, os métodos directos levam vantagem sobre os iterativos. Quando este número é elevado verifica-se o contrário.

Estes e outros resultados podem ser comprovados com a ajuda das ferramentas apresentadas na próxima secção.

Figure 1 - Aspecto geral da *applet* para sinal unidimensional.

### III. DESCRIÇÃO DA APLICAÇÃO

O conjunto de ferramentas por nós desenvolvido, sob a forma de duas *applets* (uma para sinal e outra para imagem), e disponíveis a partir de

<http://www.utad.pt/~mcabral>,

implementa alguns dos métodos de reconstrução atrás referidos. Podem ser utilizadas como ferramenta de ensino de técnicas de reconstrução de sinal e imagem em disciplinas da área, como laboratório de experiências e ainda no estudo da aplicabilidade destes métodos a casos concretos de reconstrução. Note-se ainda que, sendo uma aplicação que é executada num *browser*, está disponível na Internet e como tal contribui para a divulgação do processamento digital de sinal e imagem em geral e destas técnicas em particular.

O facto das *applets* terem sido desenvolvidas segundo uma filosofia orientada ao objecto facilita a integração de novos algoritmos. Nos pontos seguintes descrevemos resumidamente as principais características destas *applets*.

#### A. Applet para sinal unidimensional

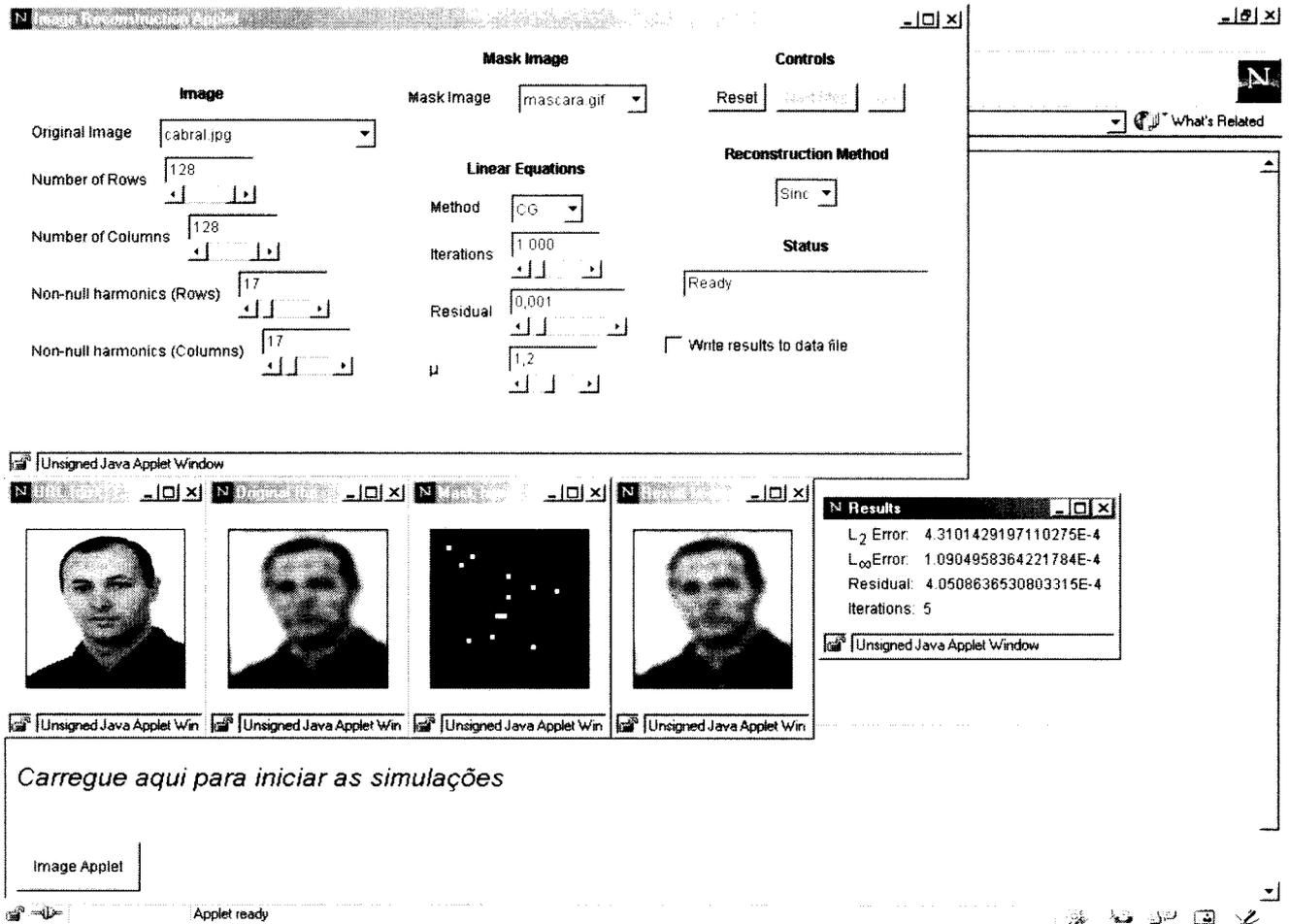
Na sua interacção com esta *applet*, o utilizador tem à sua disposição diferentes sinais. Se pretender, pode ainda colocar (exportar), através do preenchimento de um formulário (*form*), disponível na própria página HTML, os seus próprios sinais. Estes devem estar no formato AU

ou WAVE. Optámos pelo reconhecimento destes dois formatos, por serem dos mais usados, por existirem ferramentas em Java que reconhecem o formato AU e porque existem disponíveis utilitários do tipo *freeware* e *shareware* para conversão entre vários formatos, com estes incluídos. É ainda possível ao utilizador seleccionar a zona do sinal sobre a qual pretende efectuar as simulações, bem como controlar o factor de sobre-amostragem  $r$ , através da escolha do número de harmónicos não nulos na transformada discreta de Fourier do sinal.

São colocados à sua disposição diferentes métodos para a resolução do sistema de equações lineares, incluindo métodos directos e iterativos. O critério de paragem utilizado nos métodos iterativos assenta em dois princípios: no número máximo de iterações; e no erro residual máximo medido segundo a norma  $l_2$ . Este erro é dado por  $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}\|$ , ou seja, pela distância média entre duas iterações consecutivas. Faz pois sentido que o utilizador possa controlar estes dois parâmetros, sendo ainda possível escolher o valor da constante de relaxação utilizada por alguns destes métodos.

O número de amostras perdidas e a sua distribuição também podem ser controlados pelo utilizador.

O resultado final de cada simulação pode ser obtido quer passo-a-passo, quer num único passo. Para além da interpretação visual dos resultados obtidos, é ainda possível efectuar uma interpretação auditiva. Esta interpretação

Figure 2 - Aspecto geral da *applet* para imagem.

torna-se particularmente útil quando tentamos recuperar sinais audio, como é o caso de antigas gravações. Os resultados podem ainda ser gravados num ficheiro de texto (ASCII), podendo este ser posteriormente importado a partir de

<http://www.utad.pt/~mcabral/reconstrucaold/data/>,

para posterior processamento.

Estão ainda disponíveis uma descrição do formato dos ficheiros e um manual do utilizador. Na figura 1 é representado um aspecto geral desta *applet*.

### B. Applet para imagem

Esta *applet* foi desenvolvida segundo os mesmos princípios que a anterior, gozando pois das mesmas características.

Assim, é possível ao utilizador final depositar para teste, através do preenchimento de um *form*, as suas próprias imagens e controlar as dimensões e factores de sobre-amostragem (segundo as linhas e segundo as colunas). As imagens devem ser submetidas nos formatos reconhecidos pela versão 1.1 do Java.

O número e localização das amostras perdidas é controlado por imagens "máscara", que, tal como as imagens para testes, podem ser colocadas através do preenchimento de

um outro *form*. Nestas imagens, as coordenadas de todos os *pixels* com valor não nulo são consideradas coordenadas de *pixels* perdidos.

Tal como acontece para o caso de sinal unidimensional, é possível ao utilizador escolher o método para resolução do sistema de equações lineares com todas as opções associadas a este, controlar a forma como atinge a solução final e a gravação ou não dos resultados das simulações em ficheiro. Na figura 2 mostra-se o aspecto geral da *applet* para imagem.

### REFERENCES

- [1] A. J. Jerri. The Shannon sampling theorem — its various extensions and applications: a tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11):1565–1596, November 1977.
- [2] R. J. Marks II. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] R. W. Gerchberg. Super-resolution through error energy reduction. *Optica Acta*, 21(9):709–720, January 1974.
- [4] A. Papoulis. A new algorithm in spectral analysis and band-limited extrapolation. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-22(9):735–742, September 1975.
- [5] D. C. Youla. Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-25(9):694–702, September 1978.

- [6] P. J. S. G. Ferreira. Noniterative and faster iterative methods for interpolation and extrapolation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11):3278–3282, November 1994.
- [7] P. J. S. G. Ferreira and A. J. Pinho. Errorless restoration algorithms for band-limited images. In *Proceedings of the First IEEE International Conference on Image Processing, ICIP-94*, volume III, pages 157–161, Austin, TX, U.S.A., November 1994.
- [8] K. Gröchenig. A discrete theory of irregular sampling. *Linear Algebra Applications*, 193:129–150, 1993.
- [9] T. Strohmer. *Efficient Methods for Digital Signal and Image Reconstruction from Nonuniform Samples*. PhD thesis, Institut für Mathematik der Universität Wien, November 1993.
- [10] M. C. Jones. The discrete Gerchberg algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-34(3):624–626, June 1986.
- [11] P. J. S. G. Ferreira. Interpolation and the discrete Papoulis-Gerchberg algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(10):2596–2606, October 1994.
- [12] P. J. S. G. Ferreira. The duality of two recent image interpolation methods. In *Proceedings of the Third IEEE International Conference on Image Processing, ICIP-96*, pages 735–738, Lausanne, Switzerland, September 1996.
- [13] P. J. S. G. Ferreira. Incomplete sampling series and the recovery of missing samples from oversampled band-limited signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(1):225–227, January 1992.
- [14] P. J. S. G. Ferreira. The stability of a procedure for the recovery of lost samples in band-limited signals. *Signal Processing*, 40(3):195–205, December 1994.
- [15] M.J.C.S. Reis and P.J.S.G. Ferreira. Interpolation using linear combinations of B-splines. To appear.
- [16] P. L. Butzer, W. Engels, S. Ries, and R. L. Stens. The Shannon sampling series and the reconstruction of signals in terms of linear, quadratic and cubic splines. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 46(2):299–323, April 1986.
- [17] M. J. C. S. Reis. Reconstrução de imagem — método de dimensão mínima no domínio do tempo. Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, April 1996.
- [18] M.J.C.S. Reis and P.J.S.G. Ferreira. Reconstrução de imagem: revisão do problema. To appear.
- [19] M. J. C. S. Reis and P. J. S. G. Ferreira. Minimum dimension image interpolation: Analytical results. In *NORSIG-96, 1996 IEEE Nordic Signal Processing Symposium*, pages 87–90, Espoo, Finland, September 1996.
- [20] J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, editors. *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*. Birkhäuser, Boston, 2001.