

Fourier, 1768-1830

Francisco Vaz

Resumo – Neste artigo apresenta-se um resumo biográfico do matemático Joseph Fourier e uma descrição da forma como introduziu o desenvolvimento de uma função arbitrária numa série trigonométrica, hoje conhecida pelo seu nome.

Abstract – This paper presents a short biography of the mathematician Joseph Fourier and an account of how he introduced the development of an arbitrary function in a trigonometric series, today associated with his name.

Palavras chave – Fourier, série de Fourier.

Keywords – Fourier, Fourier series.

I. INTRODUÇÃO

Série de Fourier, transformada de Fourier, integral de Fourier, transformada discreta de Fourier são ferramentas e noções matemáticas comuns para os engenheiros eletrotécnicos, muito especialmente para os que se dedicam às telecomunicações. Mas, em geral, ignora-se o homem que está por trás deste nome e como fez as propostas inovadoras que permitiram a criação de tão importantes meios de análise.

O texto que se segue é dividido em duas partes. Numa primeira faz-se um resumo biográfico de Fourier que viveu em França na transição do século XVIII para o XIX, que foi uma época de ouro na história do seu país, consequência da Revolução Francesa que transformou a sociedade de então e teve repercussão profunda no futuro. Estas mudanças verificaram-se não só a nível social, económico e político como também na explosão sentida no progresso das Ciências e Matemática. Fourier foi um actor de vulto em todos estes aspectos.

Na segunda parte procurar-se-á descrever a forma de Fourier introduzir as séries trigonométricas como instrumento de integração de equações diferenciais resultantes de problemas que o estudo de propagação do calor então suscitava.

II. NOTAS BIOGRÁFICAS

Jean-Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, cidade da Borgonha, no leste da França em 21 de Março de 1768. O seu pai alfaiate de profissão e originário da Lorena, teve de um primeiro casamento três filhos e depois de enviuvar torna-se a casar e tem mais 12 filhos, um dos quais é Joseph Fourier. Ambos os pais morrem cedo deixando-o orfão antes de completar dez anos. Alguns cidadãos locais, conhecedores dos seus dotes para o estudo, asseguram a sua educação inscrevendo-o na *École Royale Militaire*, instituição local prestigiada com um ensino sob a responsabilidade de monges da ordem beneditina. O currículo incluía as matérias clássicas e também as ciências e matemática para a qual logo mostrou grande facilidade e interesse.



Fig. 1 - Fourier

Fourier pretendia seguir uma carreira militar e tenta entrar para o *Collège Montaigu* em Paris e, embora por lei esta carreira estivesse aberta a todos os cidadãos, vê-se rejeitado por não ser originário da nobreza. Decide enveredar por uma carreira eclesiástica e em 1787 ingressa como noviço na abadia beneditina de St-Benoît-sur-Loire. O seu interesse pela matemática mantém-se e começa a corresponder-se com Bonard a quem confidencia o seu grande interesse em tornar-se um matemático. Logo lhe surgem dúvidas de seguir a vida religiosa e em 1789 abandona a abadia e vai a Paris onde apresenta um trabalho sobre equações algébricas à *Académie Royale des Sciences*. Em 1790, com 21 anos, está de regresso à *École Militaire*, mas agora como professor de matemática.

A época que se segue é tumultuosa. A Revolução Francesa inicia-se e Fourier adere de imediato aos ideais proclamados tornando-se membro da Comissão Revolucionária local. No período mais radical do Terror assume posições que lhe valem ser preso, sob acusações que provavelmente o levariam à guilhotina. Salva-se porque, entretanto, Robespierre responsável pelo regime é, ele próprio, condenado à morte e executado.

Em 1794 parte para Paris para frequentar a *Ecole Normale Supérieure*, instituição criada pelo regime republicano para preparar professores. Aqui tem a oportunidade de encontrar como mestres alguns dos mais notáveis cientistas da época, como Lagrange, Laplace e Monge. Mas esta instituição fecha rapidamente e em 1795 surge a *Ecole Polytechnique*,

inicialmente com o nome *Ecole Centrale des Travaux Publiques* que Fourier não pode frequentar como aluno por ter já ultrapassado a idade limite de 20 anos imposta nos regulamentos. É, contudo, nomeado para um lugar administrativo e apoiando de facto o trabalho docente de Lagrange e Monge. É novamente preso por razões relacionadas com a sua anterior prisão mas por influência dos colegas é libertado rapidamente e assume em 1797 a cadeira de análise e mecânica.

Em 1798, aos trinta anos, Fourier é seleccionado para integrar a célebre expedição ao Egipto, comandada pelo general Napoleão Bonaparte. Para além dos aspectos puramente militares de conquista e ocupação do Egipto, a expedição incluía cerca de 170 civis na sua larga maioria artistas, cientistas e técnicos que tinham por missão fazer um levantamento socio-cultural e histórico do país. Logo após a chegada ao Cairo os principais responsáveis da componente não militar, Monge e Berthollet, criam o *Institut de l'Egypte* com a missão de coordenar todas as actividades que seriam desenvolvidas para o levantamento histórico e recolha e catalogação da informação e material. Fourier é nomeado seu secretário permanente, sendo assim o principal responsável pela preparação das expedições que partem ao longo do vale do Nilo para observar e recolher os testemunhos monumentais da antiga civilização egípcia. Esta missão é levada a cabo com grande êxito e desde logo começa a preparar a publicação da informação recolhida da qual será editor e redator de um notável prefácio. A sua edição só se iniciará bastante mais tarde, em 1809 sob o título *Description de l'Egypte* e se prolongará até 1829 por um total de 23 volumes.

A campanha do Egipto corre mal para Napoleão que vê a marinha francesa ser destruída pelas forças inglesas e é obrigado a regressar em 1799, para acabar por assumir o cargo de Primeiro Consul. As forças francesas e os membros da expedição científica ainda se mantêm no Egipto até ao estabelecimento da paz temporária com os ingleses e só em 1801 Fourier regressa a solo francês com intenção de reocupar o seu lugar académico. No entanto, Napoleão, apreciador das suas qualidades de gestão administrativa nomeia-o *préfet* do *Département de l'Ysère* com sede em Grenoble e atribui-lhe o título de barão. Apesar de ser um cargo exigente e que leva a cabo com muito êxito, é neste período que produz as principais obras científicas que legará à posteridade. É em 1807 que submete à Academia de Paris um longo trabalho sobre a propagação de calor em corpos sólidos onde introduz o desenvolvimento de funções em séries trigonométricas. Infelizmente este trabalho foi recebido com muitas reservas por parte do grupo de matemáticos que efectuou a sua revisão, especialmente por Lagrange. Parte das críticas dirigiam-se à falta de rigor nas demonstrações de convergência das séries e eram justificadas. Outras resultavam das consequências revolucionárias e dificilmente aceites então, por exemplo, "como é que uma função com descontinuidades podia ser representada por uma série de funções trigonométricas?". Por estas razões apenas um inadequado sumário de cinco páginas foi então publicado. No entanto foi reconhecido o valor da sua maneira de estudar os problemas da propagação de calor

que não necessitava da consideração de um fluido designado por "calórico" para a dedução das equações diferenciáveis que governavam este fenómeno físico. Em 1811 torna a submeter o seu trabalho revisto a um concurso da Academia sobre a propagação de calor e, havendo apenas dois concorrentes, é-lhe atribuído o prémio. A publicação completa de *Théorie Analytique de la Chaleur* só acontece em 1822, numa edição de autor [1].

Durante a sua estadia em Grenoble é responsável por grandes obras públicas. Salientam-se o plano de drenagem de uma vasta área pantanosa convertida em férteis terrenos agrícolas e o planeamento e construção de uma nova estrada que ligaria as cidades de Lyon, Grenoble e Turim, de que apenas a parte francesa foi terminada.

Em 1814 ainda se encontra à frente do *Département de l'Ysère* quando Napoleão, derrotado, é exilado na ilha de Elba. Fourier, já comprometido com as novas autoridades, consegue negociar a alteração do percurso de Napoleão que passaria normalmente por Grenoble. Já no seu regresso da ilha de Elba não consegue evitar que Napoleão passe por Grenoble. Toma as medidas necessárias para a defesa mas termina por mandar abrir as portas da cidade ao mesmo tempo que a abandona noutra direcção. Este comportamento não obsta a que Napoleão continue a depositar confiança nas suas qualidades de administrador e nomeia-o para dirigir o *Département du Rhône*, com sede em Lyon e atribui-lhe o título de conde. No entanto, não chega a exercer este cargo pois rapidamente se demite. Entretanto Napoleão é definitivamente derrotado em Waterloo e exilado para a pequena ilha de Santa Helena no Atlântico Sul.

Regressa a Paris pretendendo continuar o seu trabalho científico mas o novo regime monárquico não esquece a sua adesão aos ideais do Império e Fourier passa por um período difícil, sobrevivendo com uma pequena pensão. Esta situação altera-se quando um seu antigo aluno Chabrol de Volvic, então responsável pelo *Département de la Seine* o nomeia como director de um serviço de estatística departamental, cargo que ocupará até próximo do fim da sua vida.

Rapidamente ressurgue na vida pública e científica de Paris. Em 1816 é eleito para a *Académie des Sciences* reorganizada mas o rei, Luis XVIII, não ratifica a eleição impedindo-o de ocupar o seu lugar. Surgindo uma nova vaga em 1817 é novamente eleito e, desta vez, empossado como membro da *Académie*, sendo posteriormente, em 1822, nomeado seu secretário permanente. Seguem-se novas honrarias, tendo sido feito *Fellow of the Royal Society* de Londres em 1823, eleito para a *Académie Française*, de cariz literário, em 1826.

Nesta fase da sua vida, a sua actividade científica volta-se para a teoria de equações de que se deve citar pela sua importância o artigo *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, obra publicada em 1820 no *Bulletin de la Société philomatique* e uma obra póstuma (1834) editada por Navier e intitulada *Analyse des équations déterminées*. Em 1824 publica *Mémoire sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires*, obra hoje considerada precursora do estudo do efeito de estufa. Envolve-se também em grandes controvérsias sobre a

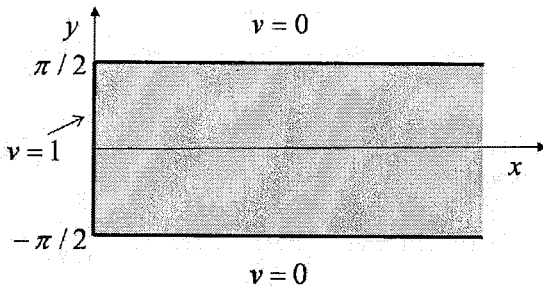


Fig. 2 - Secção recta do sólido em estudo

autoria da teoria da propagação de calor com Biot e Poisson.

Fourier nunca apresentou uma saúde robusta, sentindo desde cedo problemas reumáticos. Para o fim da vida começou a apresentar sintomas do que hoje se julga ter sido uma doença da tiróide adquirida porventura durante a estadia no Egito. Esta doença leva a perturbações da memória responsáveis talvez pelo mau acompanhamento de alguns trabalhos enviados à Academia e pela menor qualidade de alguns dos seus escritos tardios. Morre a 16 de Maio de 1830 e foi enterrado no cemitério parisiense de Père Lachaise, nunca se tendo casado nem deixado descendência.

III. A UTILIZAÇÃO DAS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS

A representação de funções por séries trigonométricas tinha sido já aplicada por vários matemáticos entre os quais Daniel Bernouilli e Euler. No entanto é a Fourier que se deve a primeira proposta de generalizar o uso de séries trigonométricas para representar funções arbitrárias e a sua aplicação na resolução de equações diferenciais, método este que se mostrou particularmente fecundo em física matemática. É na sua obra *Théorie Analytique de la Chaleur* [1], publicada em 1822 e contendo mais de 600 páginas, que Fourier apresenta as principais ideias sobre as séries trigonométricas de que em seguida se fará uma breve introdução baseada na resolução de um problema apresentado no capítulo 3- *Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire infini*. O leitor interessado poderá encontrar uma versão digitalizada de todo o livro no *Internet Archive* da Google em www.archive.org/details/thorieanalytiqu00fourgoog, ou numa sua edição contemporânea de 2009 [2].

Fourier propõe-se determinar a distribuição de temperaturas em regime permanente num corpo sólido de dimensões infinitas limitado por dois planos paralelos interceptados por um terceiro que lhes é perpendicular. Uma escolha conveniente de eixos coordenados e para um afastamento dos planos de π permite definir o sólido por $|y| \leq \pi/2$ e $x > 0$. Na figura 2 apresenta-se uma secção recta para $z = 0$.

Este sólido está envolvido por um material que apresenta uma temperatura constante e uniformemente nula excepto na sua face $|y| \leq \pi/2$, $x = 0$ que terá uma fonte de calor que a manterá a uma temperatura constante e unitária.

A equação geral que comanda a transferência de calor e permite determinar a distribuição da temperatura v , estu-

dada nos capítulos anteriores, é

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

em que K , C e D são constantes características do meio. Neste caso e atendendo a que se procura uma solução estacionária e à invariabilidade ao longo do eixo dos zz a equação reduzir-se-á a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

As soluções procuradas serão funções $\phi(x, y)$ que além de obedecer à equação 1 terão de cumprir as condições fronteira

$$\phi(x, \pm\pi/2) = 0 \quad (2)$$

$$\phi(0, |y| < \pi/2) = 1 \quad (3)$$

No seu trabalho, Fourier sugere que se procurem soluções do tipo $\phi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ que, usando a equação 1, conduzem a

$$\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = 0 \text{ ou } \frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = -\frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = M$$

sendo M um número real positivo. As equações diferenciais $\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = M$ e $\frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = -M$ admitem as soluções $f_1(x) = e^{-mx}$ e $f_2(y) = \cos my$, com $m = \sqrt{M}$ e $\phi(x, y) = e^{-mx} \cos my$ é solução da equação 1. Uma vez que as temperaturas terão de ser finitas, $m > 0$ e impondo a condição fronteira 2, m terá de ser inteiro. São então soluções da equação 1 as funções

$$\phi(x, y) = e^{-mx} \cos my$$

com m inteiro e positivo e qualquer combinação linear delas

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^L a_m e^{-mx} \cos my$$

Fourier vai mais longe e sem preocupações de convergência faz $L \rightarrow \infty$ e considera que a série

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-mx} \cos my$$

é a solução procurada desde que se imponha a condição fronteira 3 que conduz a

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos my$$

Para determinar os coeficientes a_i Fourier considera um pequeno número finito de coeficientes e recorrendo a sucessivas diferenciações desta equação e a uma eliminação de incógnitas consegue provar que $a_m = 0$ se m for par e $a_m = 2 \frac{(-1)^{m+1}}{m} / \left(\frac{2.2}{1.3} \frac{3.3}{3.5} \frac{4.4}{5.7} \dots \right)$ para m ímpar, em que

o produto infinito era já conhecido e tinha o valor de $\pi/2$, concluindo que

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \frac{1}{7} \cos 7y + \dots$$

Fourier refere que esta série é sempre convergente se $|y| < \pi/2$ e que a convergência se altera para $-\pi/4$ se y passar a pertencer ao 2º ou 3º quadrante, propondo de facto que a uma função periódica de período 2π definida por

$$f(y) = \begin{cases} 1 & |y| < \pi/2 \\ -1 & \pi/2 < |y| < \pi \end{cases}$$

e com descontinuidades para $y = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$ é representável por uma série trigonométrica.

A solução do problema será então

$$\frac{\pi}{4}v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} e^{-(2i-1)x} \cos(2i-1)y \quad (4)$$

Em seguida Fourier prova que esta é a solução geral e única do problema colocado. Para tal recorre não só a matemática mas também ao problema físico em estudo mostrando que se existisse uma outra solução ela evoluiria necessariamente para esta..

Se se substituir na equação 4 os cossenos pela sua expressão complexa

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}v &= e^{-(x+jy)} - \frac{1}{3}e^{-3(x+jy)} + \frac{1}{5}e^{-5(x+jy)} \\ &\quad - \frac{1}{7}e^{-7(x+jy)} + \dots \\ &+ e^{-(x-jy)} - \frac{1}{3}e^{-3(x-jy)} + \frac{1}{5}e^{-5(x-jy)} \\ &\quad - \frac{1}{7}e^{-7(x-jy)} + \dots \end{aligned}$$

Atendendo ao desenvolvimento em série da função arctan conclui-se que

$$\frac{\pi}{2}v = \arctan(e^{-(x+jy)}) + \arctan(e^{-(x-jy)}) \quad (5)$$

o que mostra que a solução encontrada está de acordo com a solução geral da equação 1 que deverá ser do tipo $v = \Phi(x+jy) + \Psi(x-jy)$ onde Φ, Ψ são funções arbitrárias. Fazendo na equação 5 $\tan p = e^{-(x+jy)}$ e $\tan q = e^{-(x-jy)}$ obtém-se $\frac{\pi}{2}v = p + q$. Calculando agora $\tan(p+q) = (\tan p + \tan q)/(1 - \tan p \tan q)$, fazendo as substituições e algumas simplificações obtém-se a forma final para a distribuição de temperaturas no referido sólido:

$$v = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{2 \cos y}{e^x - e^{-x}}$$

Nas figuras 3 e 4 mostram-se representações gráficas bi- e tridimensionais desta superfície.

Chegado aqui, Fourier sublinha as vantagens obtidas na representação das condições fonteira por séries trigonométricas e propõe-se generalizar para uma função arbitrária. Começa por procurar a solução em série de senos e continua a utilizar o seu método, ou seja, através de laboriosas manipulações algébricas conseguir determinar os coeficientes das séries. Continua a trabalhar usando o intervalo

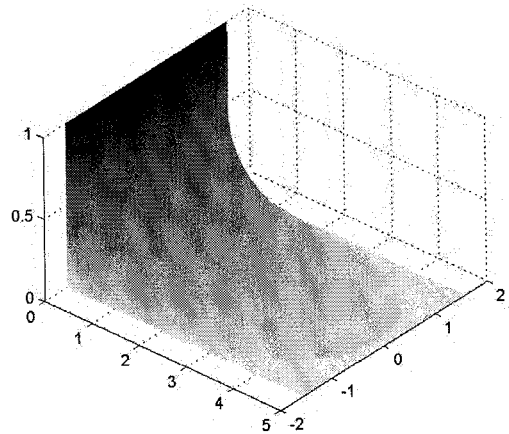


Fig. 3 - Vista 3-D da distribuição de temperaturas numa secção recta do sólido

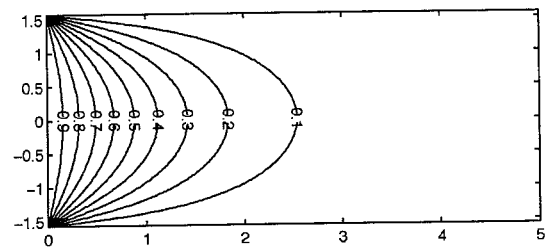


Fig. 4 - Curvas de igual temperatura numa secção recta do sólido

de $[\pi/2, -\pi/2]$ ou $[0, \pi]$ e consegue encontrar soluções. No entanto essas soluções apontam um caminho e, no artigo 221 da sua obra, propõe a determinação dos coeficientes de uma forma muito simples. Sendo $f(x)$ a função arbitrária representável por uma série trigonométrica

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin ix \quad (6)$$

os coeficientes b_i podem ser encontrados multiplicando ambos os membros por $\sin ix$ e integrando no intervalo $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \sin ix dx &= \int_0^{\pi} \left(\sin ix \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx \right) dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} b_j \sin ix \sin jx dx \right) \end{aligned}$$

A troca dos símbolos de somatório e de integração é feita sem qualquer comentário ou restrição, o que levanta problemas sobre convergência. No entanto, Fourier não se detém sobre esta questão e atendendo a que $\int_0^{\pi} b_i \sin ix \sin jx dx = 0$ se $i \neq j$ e tem o valor de $\pi/2$ quando $i = j$ facilmente conclui que

$$b_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin ix dx$$

De uma forma análoga propõe o desenvolvimento numa série de cossenos

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=0} a_i \cos ix \quad (7)$$

em que os coeficientes se podem determinar por

$$a_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos ix dx \text{ e } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$$

Fourier chama a atenção para a periodicidade das séries e propõe um intervalo correspondente a um período para o desenvolvimento em série. Todas as fórmulas propostas continuam válidas desde que se tenha em consideração os novos limites de integração de $-\pi$ a π e dividido por 2 os resultados obtidos para os coeficientes, ou seja,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos ix dx \\ b_i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin ix dx \end{aligned} \quad (8)$$

Sendo $\phi(x)$ uma função par com $\phi(x) = \phi(-x)$ e $\psi(x)$ uma função ímpar com $\psi(x) = -\psi(-x)$, uma função arbitrária $f(x)$ pode-se decompor na sua parte par e ímpar, ou seja, $f(x) = \phi(x) + \psi(x)$ desde que $\phi(x) = f(x)/2 + f(-x)/2$ e $\psi(x) = f(x)/2 - f(-x)/2$.

Atendendo a que a equação 7 define uma função par e a equação 6 define uma função ímpar, Fourier finalmente propõe a série que hoje é conhecida pelo seu nome:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=0} a_i \cos ix + \sum_{i=1} b_i \sin ix$$

sendo os coeficientes determinados pelo conjunto de fórmulas 8.

IV. NOTAS FINAIS

O que se apresentou segue de perto a forma como Fourier desenvolveu as suas ideias sobre séries trigonométricas na obra citada. No entanto o rigor matemático de então não exigia o que hoje se exige, nomeadamente nos cuidados que se deve ter com as questões de convergência de séries. Como consequência essas questões ocuparam muitos matemáticos (como por exemplo Dirichlet e Riemann) ao longo do século XIX até se estabelecerem todas as condições necessárias a que devem estar sujeitas as funções "arbitrárias" para serem representadas por séries trigonométricas. Embora parte dos resultados já fosse conhecido, Fourier tem o mérito de apresentar uma metodologia geral para o cálculo dos coeficientes e de utilizar estas séries na resolução de um problema físico.

É curioso notar que o homem que hoje tem o nome associado a métodos matemáticos tenha sido em vida reconhecido sobretudo como um grande administrador público, um dos primeiros egiptólogos e um cidadão participando

activamente na vida política do seu país. A redescoberta recente do seu pioneirismo no estudo do efeito de estufa é mais uma afirmação do seu valor como cidadão e cientista.

O estudo biográfico apresentado baseia-se em algumas biografias modernas publicadas ou disponíveis sob forma electrónica. Todas no entanto são suportadas na biografia publicada pelo seu contemporâneo astrónomo (e também político) François Arago. Essa biografia, traduzida para o inglês em 1859, incluída em *Biographies of Distinguished Scientific Men* está hoje disponível electronicamente em <http://www.gutenberg.org/ebooks/16775>. O leitor interessado também poderá encontrar uma biografia de Fourier em [3].

REFERÊNCIAS

- [1] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Chez Firmin Didot, père et fils, Paris, 1822.
- [2] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [3] J. James, *Remarkable Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.