

# A questão da incerteza tempo/frequência na Transformada de Fourier

Francisco Vaz

**Resumo** – Partindo de uma definição de incerteza associada a um sinal como o desvio quadrático médio da sua energia, apresenta-se uma simples demonstração da relação existente entre as incertezas no tempo e frequência. Apresentam-se também os resultados obtidos para alguns sinais de uso corrente em processamento de sinais.

**Abstract** – Assuming uncertainty for a signal as the mean square value of its energy, it is shown a simple demonstration of the relation standing for time and frequency uncertainties. Some results for standard signals used in signal processing are also presented.

**Palavras chave** – Transformada de Fourier, incerteza, sinal, processamento de sinais

**Keywords** – Fourier Transform, uncertainty, signal, signal processing.

## I. INTRODUÇÃO

Ao estudar a transformada de Fourier e as suas propriedades é usual referir-se que a resolução temporal e a resolução na frequência têm um comportamento inverso: uma grande resolução temporal significa uma baixa resolução na frequência. A explicação normalmente dada é qualitativa, limitando-se a referir que a resolução está relacionada com a janela de observação em qualquer dos domínios e que uma curta janela de observação num domínio implica uma grande janela no outro. Este texto pretende tratar este assunto de um modo quantitativo mostrando que as incertezas em cada domínio estão relacionadas e como variam com o tipo de sinal.

Um sinal é uma função do tempo que representa uma variável física originada num dado sistema. Um sinal é o agente que transporta a informação que permite ao observador o conhecimento do sistema e toda a análise e processamento de sinais tem como objectivo extrair de uma forma ótima essa informação.

O parâmetro do sinal que se vai utilizar por estar ligado à informação é a sua energia que, para um sinal  $f(t)$ , se define como  $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$ . Se o sinal concentrar a sua energia numa curta janela temporal fica-se com um conhecimento/informação definido com boa resolução no tempo para a energia do sinal. Se, pelo contrário, houver um espalhamento da energia por uma larga janela a definição temporal da informação diminui. Considerando-se incerteza como a falta de informação, esta pode ser associada à baixa resolução temporal da energia e portanto directamente ligada ao espalhamento da energia. De um modo análogo se pode considerar incerteza na frequência como uma característica associada ao espalhamento da energia na frequência. Para proceder a um estudo quantitativo da incerteza vai-se considerar o parâmetro que usu-

almente serve para caracterizar estatisticamente o espalhamento: o desvio quadrático médio, definindo-se como incerteza em cada domínio o desvio quadrático médio da energia do sinal. Desta forma o objectivo que se procura é determinar para um sinal os desvios quadráticos médios da energia no tempo e na frequência e procurar as suas eventuais relações.

Note que as incertezas aqui referidas apenas têm a ver com a representação tempo/frequência resultante da transformada de Fourier e, embora relacionadas, não implicam as relações de incerteza bem conhecidas da mecânica quântica.

## II. INCERTEZA NO TEMPO E NA FREQUÊNCIA

Dado um par de Fourier  $f(t) \leftrightarrow F(w)$  definido pelos integrais de Fourier (4) e (5), a sua energia nos dois domínios está relacionada pela fórmula de Rayleigh-Parseval (6), que se pode apresentar na forma normalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(t)}{E} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(w)|^2}{2\pi E} dw = 1$$

As funções  $\frac{f^2(t)}{E}$  e  $\frac{|F(w)|^2}{2\pi E}$  sendo claramente não negativas e obedecendo às relações anteriores, podem ser interpretadas como funções de densidade de probabilidade e representar a distribuição da energia normalizada nos domínios do tempo e frequência respectivamente. Sem perda de generalidade e uma vez que se está interessado apenas em caracterizar a dispersão da energia, pode-se considerar que os valores médios são nulos e definir a incerteza em cada domínio como sendo o desvio quadrático médio da energia do sinal nesse domínio:

$$\sigma_t = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{f^2(t)}{E} dt} \quad e \quad \sigma_w = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} w^2 \frac{|F(w)|^2}{2\pi E} dt}$$

Para que estes integrais existam é necessário:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^2 f^2(t) = 0 \quad e \quad \lim_{|w| \rightarrow \infty} w^2 |F(w)|^2 = 0 \quad (1)$$

ou seja a que  $f(t)$  decaia para 0 mais rapidamente que  $1/|t|$  e que  $|F(w)|$  decaia para 0 mais rapidamente que  $1/w$

Para se avaliar o comportamento conjunto de  $\sigma_t$  e  $\sigma_w$  definam-se as funções  $f(t) = t.h(t)$  e  $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$  em que  $h(t)$  é uma função real de variável real, contínua, diferenciável e integrável em  $\mathbb{R}$  e utilize-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz (7)

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} t.h(t) \frac{dh(t)}{dt} dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dh(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (2)$$

Os vários integrais que constituem a inequação anterior determinam-se da seguinte forma

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t.h(t) \frac{dh(t)}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{d(h^2(t)/2)}{dt} dt = \left[ \frac{1}{2} t h^2(t) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} h^2(t) dt = -\frac{E}{2}$$

pois sendo  $|t| < t^2$  para  $|t| > 1$ , atendendo a (1) tem-se  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t h^2(t) = 0$ .

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 h^2(t) dt = \sigma_t^2 E$

3. Usando a propriedade de  $\frac{dh(t)}{dt} \leftrightarrow jwH(w)$  e a fórmula de Rayleigh (6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dh(t)}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |jwH(w)|^2 dw = \sigma_w^2 E$$

desde que se verifique a condição  $\lim_{|w| \rightarrow \infty} w^2 H^2(w) = 0$  de acordo com (1).

Substituindo os resultados na inequação (2):

$$\left( -\frac{E}{2} \right)^2 \leq \sigma_t^2 E \sigma_w^2 E$$

e portanto

$$\sigma_t \sigma_w \geq \frac{1}{2} \tag{3}$$

Este resultado mostra a interdependência das dispersões de energia em cada um dos domínios de representação e permite tirar de imediato duas conclusões

1. Para um dado par de Fourier a diminuição da incerteza num dos domínios implica o aumento da incerteza no outro;
2. Existe uma condição de mínimo para o produto das dispersões que corresponde ao sinal igual na expressão anterior (3). Esta situação ocorre se as duas funções  $t.h(t)$  e  $\frac{dh(t)}{dt}$  forem proporcionais (8)

$$-\alpha t.h(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

equação diferencial que integrada tem a solução geral

$$h(t) = C e^{-\alpha t^2/2}$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária. O mínimo, ou seja, o melhor compromisso entre resoluções nos dois domínios, verifica-se para uma função gaussiana no tempo a que corresponde uma função gaussiana na frequência.

### III. DEFINIÇÕES E NOTAS AUXILIARES

*Definição 1:* Transformada de Fourier de uma função real de variável real  $f(t)$  é a função  $F(w)$  tal que

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt \tag{4}$$

*Definição 2:* Transformada inversa de Fourier de uma função de variável real  $F(w)$  é a função  $f(t)$  tal que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jw t} dw \tag{5}$$

Existe uma correspondência biunívoca entre  $f(t)$  e  $F(w)$  definida pelos integrais de Fourier e o par de funções  $f(t) \leftrightarrow F(w)$  é designado por par de Fourier.

Usando as definições das transformadas de Fourier tem-se

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{jw t} dw \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(w) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{jw t} dt \right) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(w) F^*(w) dw \end{aligned}$$

em que  $F^*(w)$  é a função complexa conjugada de  $F(w)$ , podendo-se concluir que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |F(w)|^2 dw \tag{6}$$

fórmula muitas vezes designada por fórmula de Parseval ou de Rayleigh e que traduz a manutenção da energia nos dois domínios de representação, facto relevante do ponto de vista de aplicações físicas.

*Teorema 3:* Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Quaisquer que sejam duas funções reais da variável real  $f$  e  $g$  integráveis e quaisquer que sejam dois números reais  $x_2 > x_1$  ter-e-á

$$\left( \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \int_{x_1}^{x_2} g^2(x) dx \tag{7}$$

#### Demonstração:

É trivial verificar que  $\int_{x_1}^{x_2} (f(x) + \alpha g(x))^2 dx \geq 0$  uma vez que a função integranda é sempre não negativa. Então o polinómio de 2º grau em  $\alpha$

$$\alpha^2 \int_{x_1}^{x_2} g^2(x) dx + 2\alpha \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx$$

terá de ter raízes imaginárias pelo que

$$\left( 2 \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_{x_1}^{x_2} g^2(x) dx \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx \leq 0$$

■

Pode-se concluir também que a igualdade só ocorre se

$$f(x) + \alpha g(x) = 0$$

ou seja quando existe uma relação de proporcionalidade entre as duas funções.

$$f(x) = -\alpha g(x) \tag{8}$$

É possível ainda concluir que a validade da desigualdade se mantem se os limites de integração se tornarem infinitos desde que se verifiquem as necessárias condições de integrabilidade das funções.

IV. EXEMPLOS

A. Função rectangular

A função rectangular define-se como sendo:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T/2 \\ 0 & , |t| \geq T/2 \end{cases}$$

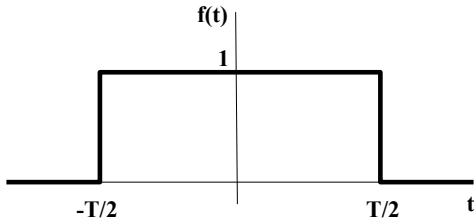


Fig. 1 - Função rectangular

cuja transformada de Fourier é

$$F(w) = T \frac{\sin(wT/2)}{wT/2}$$

A energia é  $E = T$  e o desvio médio quadrático na frequência

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} w^2 T^2 \frac{\sin^2(wT/2)}{(wT/2)^2 2\pi T} dw = \\ &= \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(wT/2) dw = \infty \end{aligned}$$

Pode-se concluir que o espalhamento da energia na frequência é infinito

A função de banda limitada na frequência terá um resultado dual: o espalhamento da energia no tempo é infinito.

B. Função triangular

A janela triangular define-se como sendo:

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| & , |t| < T \\ 0 & , |t| \geq T \end{cases}$$

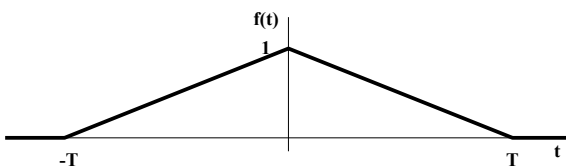


Fig. 2 - Função Triangular

A sua energia é  $E = \frac{2}{3}T$  e a sua transformada de Fourier é facilmente calculável atendendo a que  $g(t) = \frac{1}{T}f(t) *$

$f(t)$  em que  $f(t)$  é o impulso rectangular e  $*$  representa a operação de convolução. Então

$$G(w) = T \left( \frac{\sin(wT/2)}{wT/2} \right)^2$$

O cálculo das dispersões de energia conduz a

$$\sigma_t^2 = \int_{-T}^{+T} \frac{3}{2T} t^2 (1 - |t|/T)^2 dt = \frac{T^2}{10}$$

$$\sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{3}{2T} w^2 T^2 \left( \frac{\sin(wT/2)}{(wT/2)} \right)^4 dw = \frac{3}{T^2}$$

pelo que

$$\sigma_t \sigma_w = \sqrt{3/10} = 0.54772$$

C. Função trapezoidal

A janela trapezoidal define-se para  $T_2 < T_1$  como sendo:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq \frac{T_1 - T_2}{2} \\ -\frac{|t|}{T_2} + \frac{T_1 + T_2}{2T_2} & , \frac{T_1 - T_2}{2} < |t| < \frac{T_1 + T_2}{2} \\ 0 & , |t| \geq \frac{T_1 + T_2}{2} \end{cases}$$

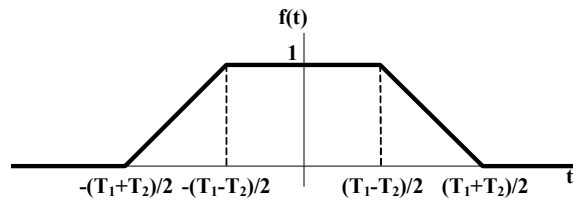


Fig. 3 - Função Trapezoidal

Como  $f(t) = \frac{1}{T_2} rect(t, T_1) * rect(t, T_2)$  a transformada de Fourier será:

$$F(w) = T_1 \frac{\sin(wT_1/2)}{wT_1/2} \frac{\sin(wT_2/2)}{wT_2/2}$$

A energia e a sua dispersão temporal serão:

$$\begin{aligned} E &= 2 \int_0^{\frac{T_1 - T_2}{2}} dt + 2 \int_{\frac{T_1 - T_2}{2}}^{\frac{T_1 + T_2}{2}} \left( -\frac{t}{T_2} + \frac{(T_1 + T_2)}{2T_2} \right)^2 dt = \\ &= T_1 - \frac{T_2}{3} \end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 = \frac{2}{E} \left[ \int_0^{\frac{T_1 - T_2}{2}} t^2 dt + \int_{\frac{T_1 - T_2}{2}}^{\frac{T_1 + T_2}{2}} t^2 \left( -\frac{t}{T_2} + \frac{(T_1 + T_2)}{2T_2} \right)^2 dt \right]$$

$$\sigma_t^2 = \frac{5T_1^3 - T_2^3 - 5T_2T_1^2 + 5T_2^2T_1}{20(3T_1 - T_2)}$$

A variação de  $\sigma_t/T_1$  com  $k = T_2/T_1$  será

$$\sigma_t/T_1 = \sqrt{\frac{5 - k^3 + 5k^2 - 5k}{20(3 - k)}}$$

A dispersão da energia na frequência será:

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 T_1^2 \frac{\sin^2(\frac{wT_1}{2})}{(\frac{wT_1}{2})^2} \frac{\sin^2(\frac{wT_2}{2})}{(\frac{wT_2}{2})^2} dw = \\ &= \frac{4}{\pi E T_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{wT_1}{2})}{\frac{wT_1}{2}} \frac{\sin^2(\frac{wT_2}{2})}{\frac{wT_2}{2}} d\left(\frac{wT_1}{2}\right) = \end{aligned}$$

fazendo  $wT_1/2 = x$ ,  $k = T_2/T_1$  e usando o integral determinado no anexo A

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \frac{4}{\pi E T_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \frac{\sin^2 kx}{kx} dx = \\ &= \frac{4}{\pi E T_2} \frac{\pi}{2} = \frac{2}{E T_2} = \\ &= \frac{2}{(T_1 - T_2/3) T_2} = \frac{6T_1}{3T_1 T_2^2 - T_2^3} \end{aligned}$$

A variação de  $\sigma_w T_1$  com  $k = T_2/T_1$  será

$$\sigma_w T_1 = \sqrt{\frac{6}{3k - k^2}}$$

O produto dos factores de incerteza será então

$$\sigma_t \sigma_w = \sqrt{\frac{5 - k^3 + 5k^2 - 5k}{20(3 - k)}} \sqrt{\frac{6}{3k - k^2}}$$

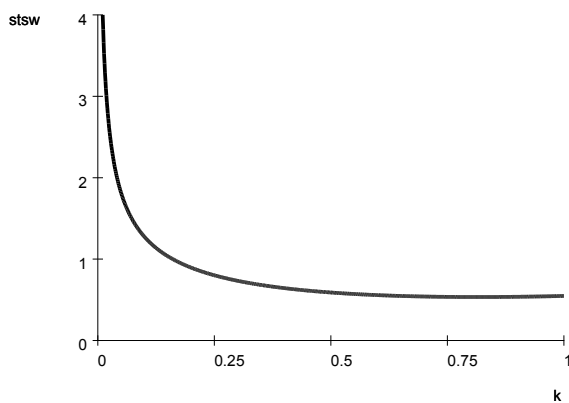


Fig. 4 - Gráfico de  $\sigma_t \sigma_w$  em função de  $k$

Como esta função é decrescente no intervalo  $(0, 1]$  e o seu valor para  $k = 1$  é  $\sqrt{0.3} = 0.5478$ , a condição de incerteza é sempre verificada

Note que se  $T_1 = T_2$  tem-se o impulso triangular e para  $T_2 \rightarrow 0$  tem-se o impulso rectangular. O leitor pode verificar que para os dois casos os valores coincidem.

D. Função exponencial (laplaceana)

Como exemplo de uma função de duração infinita apresenta-se a janela exponencial ou laplaceana definida por:

$$f(t) = e^{-|t|/T}$$

e cuja transformada de Fourier é

$$F(w) = \frac{2/T}{w^2 + 1/T^2}$$

A energia  $E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|/T} dt = \int_0^{\infty} e^{-2t/T} dt = T$  e os desvios médios quadráticos da energia normalizada no tempo e na frequência valem  $\sigma_t^2 = T^2/2$  e  $\sigma_w^2 = 1/T^2$  e, portanto,  $\sigma_t \sigma_w = \sqrt{2}/2$ , significativamente superior ao limite de  $1/2$ .

V.

VI. ANEXO A

O cálculo dos desvios quadráticos médios das janelas trapezoidal e triangular obrigam à solução do seguinte integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \frac{\sin^2 kx}{kx} dx$$

A procura da solução pode ser feita recorrendo ao programa de cálculo simbólico MAPLE incluído na biblioteca *symbolic* do Matlab. Desta forma pode-se obter para o integral a seguinte solução:

$$I = \frac{1}{k} \times \left[ \begin{aligned} &\frac{\cos 2x}{4x} + \frac{1}{2} \text{Si}(2x) - \frac{1}{4x} + \frac{k}{2} \left( \frac{\cos 2kx}{2kx} + \text{Si}(2kx) \right) \\ &- \frac{2k - 2}{8} \left( \frac{\cos((2k - 2)x)}{(2k - 2)x} + \text{Si}((2k - 2)x) \right) \\ &- \frac{2k + 2}{8} \left( -\frac{\cos((2k + 2)x)}{(2k + 2)x} - \text{Si}((2k + 2)x) \right) \end{aligned} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

em que  $\text{Si}(x)$  é a função seno-integral. Calculando os limites determina-se:

$$I = \frac{\pi}{4k} \begin{pmatrix} 2 + 2k \text{sign}(k) + \text{sign}(2k - 2) \\ -k \text{sign}(2k - 2) - \text{sign}(2k + 2) \\ -k \text{sign}(2k + 2) \end{pmatrix}$$

podendo finalmente concluir-se:

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < k \leq 1 \\ \frac{\pi}{2k} & k > 1 \end{cases}$$