

## Heaviside, 1850-1925

Francisco Vaz

**Resumo** – Neste artigo apresenta-se uma biografia de Oliver Heaviside físico matemático inglês referindo alguns aspectos das suas contribuições para a ciência e tecnologia.

**Abstract** – This paper presents a biography of the mathematical physicist Oliver Heaviside and brief introductions to some of his main contributions to science and technology

**Palavras chave** – Heaviside, história do eletromagnetismo, equações de Maxwell, linha de transmissão, cálculo operacional

**Keywords** – Heaviside, electromagnetism history, Maxwell equations, transmission line, operational calculus

### I. INTRODUÇÃO

Oliver Heaviside foi um dos mais proeminentes contribuintes para o estabelecimento da engenharia eletrotécnica, não sendo atualmente recordado de forma condizente com a importância das inovações que introduziu. É lembrado pela função hoje designada pelo seu nome e normalmente citado pela introdução do cálculo operacional para a resolução por métodos algébricos de equações diferenciais. É sistematicamente esquecido no que respeita à contribuição muito importante que deu à teoria do eletromagnetismo de Maxwell e à sua aplicação para explicar com rigor a transmissão de sinais elétricos em linhas e cabos então usados em telegrafia e telefonia. A sua vida não seguiu os tradicionais cânones, tendo vivido isolado, recusando contactos sociais fora do círculo familiar e de alguns escassos amigos, mantendo-se afastado da generalidade dos cientistas da sua época. Deixou uma vasta obra escrita, reunida nos dois volumes de *Electrical Papers* [1], [2], nos três volumes de *Electromagnetic Theory* [3], [4], [5] e em numerosos cadernos de notas pessoais e correspondência trocada.

No texto que se segue, procura-se recordar um pouco do homem através de uma breve biografia, relembrando também as suas numerosas contribuições para a ciência.

### II. OS PRIMEIROS ANOS

Oliver Heaviside nasce a 18 de maio de 1850 em Camden Town, um bairro da classe média baixa de Londres. É o quarto filho de Thomas e Rachel Heaviside. O pai é um artista gravador, gozando de uma saúde débil e a mãe, doméstica, complementa o orçamento familiar mantendo em casa uma escola de meninas. Mais tarde passa a aceitar hóspedes.

Londres de meados do século XIX tem condições sanitárias precárias quando comparada com o presente. As doenças infecciosas estão espalhadas e o jovem Oliver contrai escarlatina, de que recupera, mas que o deixa parcialmente surdo. Será talvez esta uma das razões para o seu

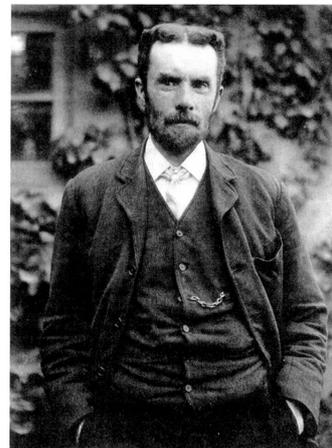


Fig. 1 - Oliver Heaviside (1893)

comportamento anti social futuro, já que ficou limitado nos seus contactos com crianças da sua idade. Em 1863, graças a uma pequena herança, a família consegue mudar para uma habitação de maior qualidade situada no mesmo bairro e não muito distante, mas permitindo uma significativa melhoria de qualidade de vida.

O irmão mais velho, Herbert, cedo sai de casa tornando-se telegrafista em Newcastle e afastando-se para sempre da família; Arthur segue também a mesma profissão, faz uma carreira como engenheiro que o leva a altos cargos no *Post Office* e será por vezes colaborador de Oliver ao longo da vida: finalmente Charles, com inclinações musicais, começa por trabalhar em Torquay numa loja de instrumentos musicais, que será sua mais tarde, e terá um papel importante na fase final da vida de Oliver.

Um membro próximo da família era Sir Charles Wheatstone - inventor, grande promotor da telegrafia e professor no King's College - casado com uma irmã de Rachel Heaviside. Este tio tem grande influência junto à família dada a sua boa situação económica e social, prestando ajuda em vários aspetos materiais na educação dos jovens e na escolha da profissão de telegrafista para três dos irmãos; a Oliver, para além de ajudas profissionais, facilitou-lhe o acesso a informação técnica atualizada e à sua biblioteca.

A educação de Oliver inicia-se aos cinco anos com a frequência da escola mantida pela mãe, mudando aos oito para uma escola local para rapazes. Aos onze anos passa a frequentar a *Camden House School*, um estabelecimento de ensino de qualidade que preparava os alunos para o exame do *College of Preceptors*, que na época equivalia a um atual certificado de ensino secundário. O ensino incluía latim, línguas modernas, matemática e ciências. Oliver foi um bom aluno, manifestando, contudo, fortes críticas sobre al-

gumas matérias conforme descreve mais tarde em escritos pessoais, onde manifesta a sua profunda aversão à geometria euclideana e à gramática, bem como à forma como eram ensinadas. Consegue fazer o exame aos quinze anos, sendo o quinto em mais de 500 candidatos e ser o primeiro nas áreas científicas apesar de uma bastante má classificação em geometria euclideana. E termina aqui a educação formal de Oliver Heaviside.

Considerando as condições financeiras da família, não pode continuar para a Universidade e, normalmente, deveria ter iniciado uma carreira profissional. Talvez por influência de seu tio foi decidido que ficaria em casa a estudar mais dois anos. Este período foi aproveitado para estudar mais matemática e ciências, bem como alemão, dinamarquês e o código Morse. Aos dezoito anos, após um curto estágio com o irmão Arthur, obtém um lugar de telegrafista na *Danish-Norwegian-English Telegraph Company* com um bom ordenado anual de £150 e parte para a Dinamarca para se juntar à equipa que explora o cabo submarino entre a Inglaterra e a Dinamarca.

### III. PROFISSÃO TELEGRAFISTA

A telegrafia iniciada há pouco mais de duas décadas, estava em plena expansão, existindo já uma rede com muitos milhares de quilómetros que cobria e interligava todos os continentes. O estado da arte da telegrafia estava nos cabos submarinos e era normal encontrar nas estações terrestres que os operavam todo o tipo de equipamento moderno e sofisticado para os manter em funcionamento. Foi um ambiente destes, semelhante ao que hoje designamos por laboratório de I&D, que Oliver foi encontrar em Fredericia, na Dinamarca.

A profissão de telegrafista era, sobretudo, ocupada com as tarefas rotineiras de receber e enviar mensagens. Mas eram também permanentemente chamados a cuidar do equipamento e ocasionalmente a reparar as avarias que ocorriam, ou seja, estavam sujeitos a um contacto experimental intenso com fenómenos eléctricos nem sempre explicáveis pelos incipientes conhecimentos de então sobre a electricidade. Um exemplo de observação de Heaviside foi o facto do comportamento assimétrico da linha, verificando-se que a velocidade de transmissão era superior no sentido de Newcastle para Fredericia do que em sentido inverso. Uma outra observação era a de que certos defeitos parciais no isolamento do cabo aumentavam a velocidade de transmissão possível, verificando-se contudo um aumento da atenuação do sinal. Estes dois casos foram mais tarde explicados por Heaviside.

Em 1869 a companhia para que trabalha, agora chamada *Great Northern Telegraph Company*, começa a substituir os operadores ingleses por dinamarqueses e, face a uma avaliação positiva do seu trabalho, no início de 1870 é transferido para Newcastle com um salário aumentado para £175 e instala-se em casa do seu irmão Arthur, então engenheiro superintendente dos serviços locais de telegrafia do *Post Office*.

A estadia em Newcastle permite-lhe o acesso a uma biblioteca pública onde pode encontrar os livros necessários para continuar a sua formação. Dedicar-se então a um estudo

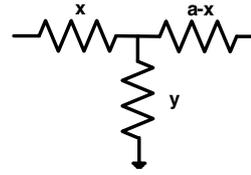


Fig. 2 - Diagrama das resistências envolvidas num defeito

aprofundado do cálculo e de equações diferenciais. Mas a sua vida profissional continua e começa a dar contribuições importantes para o seu empregador.

A localização de uma avaria (defeito no isolamento) num cabo submarino era feita por sucessivas medições de resistência feitas no cabo depois de o levantar, cortar e, em seguida, emendar. Para cada operação ficava-se a saber para que lado estava a avaria e repetia-se o procedimento até se ter limitado a avaria a uma porção de cabo economicamente substituível. Este procedimento era moroso e caro. Oliver propõe um método simples para a determinação aproximada da avaria. Chamando  $a$  à resistência total do cabo,  $x$  a resistência até ao defeito e  $y$  a resistência do defeito, basta medir a resistência  $b$  do cabo em circuito aberto e a resistência  $c$  do cabo em curto-circuito, para se determinar a valor da resistência  $x$ . Com efeito, conforme se deduz da figura 2, sendo  $b = x + y$  e  $c = x + (y(a-x)/(y+a-x))$ , o valor de  $x$  será  $x = c - \sqrt{(a-c)(b-c)}$ .

Conhecida a resistência por unidade de comprimento do cabo estava encontrada a distância  $a$  que a avaria se encontrava. Este método não original (deve-se a um francês de nome Blavier) não era de facto totalmente fiável mas, no caso de Heaviside, deu resultado o que muito lhe agradou assim como aos seus superiores, conforme registou nas suas notas.

É neste período que começa a usar o seu livro de notas onde regista as observações, análises matemáticas prévias, a sua visão sobre acontecimentos e opiniões sobre o que o rodeia. Este procedimento vai-se manter toda a vida e o conjunto destas notas que lhe sobreviveram são fundamentais para a compreensão das suas contribuições científicas e modo de viver e pensar.

Num ambiente profissional mais atrativo e desafiante e com acesso à informação científica, é com naturalidade que começa a publicar. O seu primeiro artigo surge em 1872 com o título *Comparing electromotive forces* [1] publicado em *English Mechanic* e trata de um problema de medida com certeza motivado pela sua profissão. Pouco depois publica, agora na reputada *Philosophical Magazine*, o artigo *On the best arrangement of Wheatstone's bridge for measuring a given resistance with a given galvanometer and battery* [1] que chama a atenção dos mais importantes cientistas da época, nomeadamente de William Thomson e Maxwell. Este último decide mesmo incluir uma referência ao método e autor na sua obra magna *A treatise on electricity and magnetism* (1873). É com grande surpresa e satisfação que Oliver regista esta citação quando pela primeira vez tem acesso a essa obra a que vai dedicar longos anos de estudo.

No fim de 1873 tem já seis publicações das quais se salientam *On duplex telegraphy (part I and II)* [1] sobre o tema da utilização simultânea de uma linha para transmitir nos dois sentidos. A proposta apresentada não era meramente teórica pois baseava-se na experimentação feita quer em circuitos laboratoriais quer em linhas reais disponibilizadas pelo seu irmão Arthur, seu colaborador neste trabalho. Para não causar problemas ao irmão, apenas Oliver aparece como autor, atitude avisada dadas as consequências deste artigo. O artigo foi muito mal recebido pelas hierarquias do *Post Office*, nomeadamente por William Preece, engenheiro superintendente da região sul e pelo seu superior Culley. Preece tinha publicado uma proposta para duplex e Culley era autor de um tratado geral sobre telegrafia onde o duplex não era referido. De facto a proposta de Preece não era correta e o referido tratado era uma obra medíocre, e caso Oliver os tivesse citado seria com certeza demolidor, conforme vai demonstrar ao longo da vida. No entanto, o método de Oliver para o duplex mostra-se correto, implementável e tornar-se-á comum. Mas aqui se iniciava uma relação conflituosa entre Heaviside e Preece que vai durar toda a vida.

Nesta altura já existia a *Society of Telegraph Engineers*<sup>1</sup> a que pertencia toda a nomenclatura das companhias de telegrafia. Arthur, que também é membro aconselha o seu irmão a candidatar-se dado o seu notável currículo. No entanto a entrada na sociedade é recusada, facto que Oliver atribui, com razão, a Preece e Culley. Na primeira oportunidade contacta W. Thompson, também membro, pedindo-lhe que o proponha, o que foi aceite mas não concretizado por falta de tempo. No entanto, a seu pedido, a proposta foi feita e submetida por W. Siemens, o presidente da sociedade e, obviamente, aceite.

Em 1874, Oliver Heaviside é um jovem com uma carreira promissora. No entanto a sua procura por independência leva-o a recusar uma oferta de emprego no *Post Office*, que parte de Preece e, depois de um pedido de aumento salarial recusado, a apresentar a demissão da *Great Northern*, argumentando que tinha uma melhor oferta.

Desta forma, em Maio de 1874, parte para Londres onde, sem emprego, vai viver com os pais para se dedicar aos seus estudos. Nunca mais teve um emprego assalariado.

#### IV. INVESTIGADOR INDEPENDENTE

Em Londres, vai finalmente dedicar todo o seu tempo ao estudo. Isso não acontece de imediato pois contrai uma doença mal identificada e que designava por doença do frio e do calor e que o vai acompanhar toda a vida. Como sofria também de dispepsia, as debilidades na saúde ditaram alguns comportamentos, nomeadamente uma escolha cuidada e limitada da sua dieta alimentar e o hábito de viver em ambientes ultra aquecidos. Estabelece um padrão de vida que passa por se encerrar durante o dia no seu quarto que continha muito equipamento elétrico e permitia trabalho experimental para além do estudo, reservando o período

<sup>1</sup>Em 1871 foi fundada a *Society of Telegraph Engineers*; em 1880 passa a chamar-se *Society of Telegraph Engineers and Electricians*; em 1989 passa a chamar-se *Institution of Electrical Engineers (IEE)*; em 2006 funde-se com *Institution of Incorporated Engineers* e assume o nome *Institution of Engineering and Technology (IET)*

noturno para trabalho mais teórico e de reflexão. Não descurava contudo o exercício físico, sendo normal passear longas horas pela cidade e mesmo fazer ginástica.

O seu programa de estudo é dirigido para aprofundar os seus conhecimentos matemáticos e de filosofia natural, nome então dado à física. São objeto deste estudo entre outras, as obras de Maxwell, o *Treatise of Natural Philosophy* de Thompson e Tait, e a famosa obra de Fourier *Théorie analytique de la chaleur*.

É com alguma naturalidade que as contribuições importantes começam a surgir. Num primeiro período dedica-se a assuntos muito ligados à sua anterior experiência profissional, publicando artigos cujo tema se centra nas linhas/cabos de transmissão.

O conhecimento de então baseava-se no trabalho desenvolvido por Thompson em 1854 que, no trabalho efetuado durante a instalação da linha transatlântica, apresentou um modelo para o cabo baseado na sua resistência e capacidade distribuídas. Sendo  $r$  a resistência por unidade de comprimento e  $c$  a capacidade por unidade de comprimento, a equação (caso particular da equação geral apresentada mais à frente) que rege a distribuição da tensão  $V(x, t)$  no cabo é

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rc \frac{\partial V}{\partial t}$$

Thompson faz notar que a solução é conhecida pois foi tratada por Fourier para a propagação de calor e juntamente com Stokes apresenta uma solução geral da tensão e da corrente. Da sua análise resulta que para um cabo de comprimento finito  $x$  a máxima corrente era observada à saída para um  $t_{\max}$  que era proporcional a  $x^2 rc$  e que um sinal telegráfico de duração limitada e curta aparecia não só atenuado como muito espalhado no tempo devido ao efeito da atenuação muito mais forte nas altas frequências. Em consequência, o tempo de transmissão entre sinais deveria ser superior a um certo valor também dependente de  $x^2 rc$  o que limitava a velocidade de transmissão para cabos longos. (Atualmente dir-se-ia talvez que a constante de tempo do circuito afetava a distinção entre símbolos). Este resultado foi mal interpretado por Preece que considerou que o produto  $x^2 rc = A$  poderia ser estendido a linhas aéreas, sendo  $A$  uma constante dependente do material do cabo. Ficou conhecido como lei KR já que K e R eram os símbolos então usados para representar a capacidade e resistência específicas.

Num artigo datado de 1876 e intitulado *On the extra current* [1], Heaviside propõe um novo modelo para o cabo que inclui  $l$  a indutância por unidade de comprimento e deduz uma nova equação

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rc \frac{\partial V}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Heaviside considera que a linha de comprimento  $L$  alimentada por uma tensão  $U$  se encontra em regime permanente em que as distribuições de tensão e corrente são, respetivamente  $V(x) = U(1 - x/L)$  e  $I(x) = U/(rL)$ . Supondo que se desligava a alimentação e se ligavam os extremos à massa, Heaviside determina, usando séries de Fourier, quais as soluções  $v(x, t)$  e  $i(x, t)$  para a tensão

e corrente de descarga que são funções oscilatórias amortecidas. Em seguida argumenta que partindo de uma linha em vazio se se ligar uma tensão  $U$  a evolução será a inversa da descarga e a tensão e corrente de carga serão dadas por  $v'(x, t) = U(1 - x/L) - v(x, t)$  e  $i'(x, t) = U/(rL) - i(x, t)$ , esta última expressão justificando o título do artigo. Ficou assim demonstrado o comportamento observado por ele e muitos outros operadores e a importância que a indutância tem no comportamento das linhas e cabos telegráficos. No entanto a maneira complexa como apresentou os resultados reduziu muito o seu impacto.

Em seguida publica o artigo *On the speed of signalling through heterogeneous telegraph circuits* [1] em que explica a assimetria observada na velocidade de transmissão do cabo quando trabalhava em Fredericia, que de facto se devia à assimetria das duas linhas terrestres ligadas ao cabo e, sobretudo, às diferenças de resistência interna dos aparelhos usados como detetores nas duas estações terminais. Já em 1877 publica *On the theory of faults in cables* [1] onde mostra que os defeitos podem ser benéficos à transmissão e onde chega a propor a utilização de defeitos artificiais com um valor controlado de resistência para melhorar a exploração de um cabo, indicando como solução o uso de uma ligação à massa com um valor  $1/32$  da resistência total do cabo e colocada a meio do seu comprimento. Esta solução não foi ensaiada por nenhuma companhia.

Ainda em 1878, publica um artigo onde apresenta as relações entre tensão e corrente em circuitos indutivos alimentados por correntes sinusoidais, onde pela primeira vez encara a derivação em ordem ao tempo como um operador. No entanto não usa ainda a sua substituição pelo operador  $p$  mais tarde utilizado. Apresenta as fórmulas corretas para o que hoje se designa por impedância cerca de 20 anos antes da introdução de circuitos de distribuição de corrente alterada.

Em 1882 recebe um convite para publicar em *The Electrician*. Trata-se de um semanário editado por C.H. Biggs que não é propriamente um jornal científico. Destinava-se a um público que englobava profissionais da indústria elétrica de vários graus, leigos e homens de negócios, publica sobre assuntos legais e relatórios financeiros de empresas para além de artigos sobre ciência e tecnologia da eletricidade. O convite é imediatamente aceite e em Junho de 1882 publica o artigo *Dimensions of a magnetic pole* [1], o primeiro de uma longa colaboração de duração superior a duas décadas. Heaviside consegue assim um modesto rendimento de cerca de £40 anuais que ajudará a pagar a sua subsistência na casa dos pais.

Nesta altura da sua vida já Heaviside dominava o trabalho de Maxwell e chegara o momento de iniciar a publicar os seus contributos para o desenvolvimento da teoria do eletromagnetismo.

## V. A HERANÇA DE MAXWELL

Maxwell morre cedo, aos 48 anos de idade, em 1879, deixando iniciada a revisão do seu tratado. A forma como deixa apresentada a sua teoria é bem diferente da que hoje se ensina em cursos universitários de eletromagnetismo. A sua teoria compreendia nada menos que 20 equações todas

escritas em coordenadas cartesianas envolvendo não só as intensidades de campo como também os potenciais escalar e vetor. Na parte final da sua obra, Maxwell propõe uma notação simplificada baseada em quaterniões (ou números hipercomplexos) que lhe permite reduzir para 8 equações.

Quaterniões são entidades introduzidas pelo matemático irlandês Hamilton que pretendem generalizar alguns conceitos ligados aos números complexos. Com efeito, um complexo  $c = a + ib = \rho e^{i\theta}$  pode ser interpretado como um operador que efetua uma multiplicação por  $\rho$  seguida de uma rotação no plano de um ângulo  $\theta$ . Hamilton generaliza esta rotação para um espaço tridimensional considerando o quaterniões  $q = w + xi + yj + zk$  definido por 4 números reais  $w, x, y, z$  ligados por três unidades imaginárias  $i, j, k$  para as quais é válida a seguinte tabela de multiplicação:  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$ ;  $ki = j$ ,  $ji = -k$ ,  $kj = -i$ ;  $ik = -j$ . Uma consequência é que a multiplicação de quaterniões deixa de ser uma operação comutativa o que, aliado ao facto do quaterniões ser a soma de um escalar com um vetor, não parece conduzir a uma simplificação de uma teoria já de si bastante complexa.

O desenvolvimento do eletromagnetismo vai dever-se a numerosas contribuições, nas quais se destacam Heaviside, Oliver Lodge e Fitzgerald e o alemão Hertz que será o primeiro a demonstrar a existência de ondas eletromagnéticas. Entre eles estabeleceram-se fortes ligações bem documentadas em correspondência trocada e ainda existente. Heaviside, embora só raramente os tenha encontrado, ficou-lhes ligado por fortes laços de amizade.

Heaviside inicia a publicação de trabalhos sobre o eletromagnetismo em *The Electrician* em Novembro de 1862, uma série de artigos mais tarde reunidos para os *Electrical Papers* com o nome *The relations of magnetic force and electric current* [1]. Neste artigo introduz o cálculo vetorial que lhe permite uma simplificação das fórmulas, abandonando a notação quaterniônica. A introdução de vetores na descrição formal de grandezas físicas é só por si uma inovação de enorme importância para toda a física que rapidamente adopta o método. O cálculo vetorial introduzido por Heaviside foi simultaneamente desenvolvido pelo matemático norte-americano Gibbs, diferindo os dois na notação usada. Em geral foi adotada a de Gibbs, mas aqui vai-se seguir a utilização do negrito para indicação de vetor que Heaviside introduziu e que é ainda hoje uma notação muito usada.

Mas é em 1885-86 que publica uma série longa de artigos que totalizam 130 páginas e reunidos em *Electromagnetic induction and its propagation* [1] onde apresenta a sua proposta para as quatro equações básicas do eletromagnetismo. Começa por escolher as equações de definição dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  e suas relações com o deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e a indução magnética  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

Em seguida reescreve as duas equações da divergência

$$\operatorname{div} \epsilon\mathbf{E} = \rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mu\mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

Seleciona a seguir a equação que traduz a lei de Ampère que, segundo Maxwell é  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$  em que

$\mathbf{J}$  é a densidade de corrente elétrica. Esta equação associada à lei de Ohm  $\mathbf{J} = k\mathbf{E}$  conduz a

$$\text{rot } \mathbf{H} = k\mathbf{E} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

Maxwell incluía a seguinte equação para caracterizar o campo elétrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \psi \quad (4)$$

em que  $\mathbf{u}$  é a velocidade do condutor,  $\mathbf{A}$  e  $\psi$  são os potenciais vetor e escalar, respetivamente. O primeiro termo traduz a contribuição do movimento de uma corrente num campo magnético, o segundo termo o efeito da indução magnética e, finalmente, a contribuição devida à existência de cargas elétricas. Heaviside decide por um lado abandonar os potenciais como grandezas descritoras do campo e por outro garantir uma simetria nas equações. A partir da equação 4 se se considerar a solução estática com  $\mathbf{u} = 0$ , aplicar o operador rot a ambos os membros e efetuar as simplificações conclui-se facilmente que

$$-\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5)$$

No entanto Heaviside apresenta esta equação como uma consequência direta da lei de Faraday que liga a tensão gerada num circuito à variação do fluxo que o atravessa.

A busca de simetria levou-o de facto a considerar a existência de carga magnética  $\sigma$  e respetiva corrente caracterizada por uma condutividade magnética  $g$ . Considerando haver movimento,  $\mathbf{u} \neq 0$  era necessário considerar duas densidades de corrente  $\rho\mathbf{u}$  e  $\sigma\mathbf{u}$ , a contribuição para os campos devida ao movimento  $\mathbf{h} = \varepsilon\mathbf{E} \wedge \mathbf{u}$  e  $\mathbf{e} = -\mu\mathbf{H} \wedge \mathbf{u}$  e haver campos impostos externamente  $\mathbf{e}_0$  e  $\mathbf{h}_0$ , leva Heaviside a propor uma forma mais geral das equações do eletromagnetismo

$$\text{div } \varepsilon\mathbf{E} = \rho \quad \text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{h}_0 - \mathbf{h}) = k\mathbf{E} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \rho\mathbf{u}$$

$$\text{div } \mu\mathbf{H} = \sigma \quad -\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}) = g\mathbf{H} + \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} + \sigma\mathbf{u}$$

considerando em todas as aplicações que  $\sigma = 0$  e  $g = 0$  atendendo ao conhecimento experimental de então.

O impacto foi grande e na década de 90 do século XIX era já a forma normal de apresentar a teoria eletromagnética. Hertz, de forma independente, também chegou a uma formulação semelhante pelo que as 4 equações chegaram a ser chamadas de Hertz-Heaviside e Hertz-Maxwell, mas no século XX passaram a ter a designação de Equações de Maxwell.

Para Maxwell, a energia estava espalhada no espaço ocupado pelo campo e, na sua obra, determina a sua densidade como sendo  $1/2\varepsilon\mathbf{E}^2 + 1/2\mu\mathbf{H}^2$ . No artigo que se tem estado a comentar, Heaviside baseado na fórmula dada por Maxwell para a densidade de energia e no facto da energia não poder desaparecer num ponto para reaparecer num

outro, conclui que a energia deverá fluir e enuncia sem fazer uma demonstração formal que este fluxo pode ser caracterizado pelo vetor  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ . Este resultado já tinha sido publicado alguns meses antes pelo professor Poynting da universidade de Birmingham, mas era desconhecido de Heaviside que nunca contestou a prioridade da descoberta. Heaviside usa este resultado para mostrar como flui a energia no campo eletromagnético associado a uma linha constituída por dois condutores paralelos e de comprimento infinito. Atendendo à orientação dos vetores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  facilmente conclui que o fluxo é paralelo aos condutores e exterior aos mesmos. À superfície dos condutores, o campo elétrico torna-se paralelo ao condutor devido à lei de Ohm  $\mathbf{J} = k\mathbf{E}$  e o fluxo da energia passa a ser na direção do interior do condutor, resultando nas perdas resistivas aí verificadas. Anos mais tarde mostrará que a penetração do campo no condutor é função da frequência, constituindo o que hoje se designa por efeito pelicular. Toda esta descrição sobre a energia foi revolucionária contrariando muitas ideias sobre o funcionamento das linhas de transmissão e, portanto, recebida com ceticismo e oposição.

Outra contribuição importante e muitas vezes esquecida foi a introdução de nova nomenclatura. A ele se deve os termos impedância, admitância, condutância, suscetância, condutividade, permissividade, atenuação, entre outros.

Heaviside continua por muitos anos a fazer importantes publicações sobre o campo eletromagnético. Dos seus trabalhos vale a pena recordar ainda um dedicado ao estudo do campo elétrico de uma carga em movimento que foi publicado em Abril 1889 na *Philosophical Magazine* com o título *On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric* [2]. O método que usou foi de considerar a carga em movimento como uma corrente que gera um campo magnético variável que por sua vez gera um campo elétrico que irá alterar o eletrostático. Repetindo o processo determina uma série que é convergente e com uma soma calculável. Desta forma pôde fornecer a seguinte fórmula para o campo elétrico

$$\varepsilon E = \frac{q}{r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

em que  $q$  é a carga elétrica,  $r$  a distância a que se está a calcular o campo,  $v$  a velocidade da carga,  $c$  a velocidade da luz no vázio e  $\phi$  o ângulo da direção que se está a considerar com a direção do movimento. Como se pode verificar na direção do movimento,  $\phi = 0$ , há uma diminuição do valor do campo pelo fator  $1 - v^2/c^2$ . Esta descoberta teve grande impacto e Fitzgerald conjecturou mesmo que a velocidade da luz fosse um limite inatingível. Esta fórmula foi alguns anos depois confirmada através da relatividade de Einstein.

Para finalizar as suas contribuições sobre o eletromagnetismo deve ser lembrado que Heaviside no último artigo citado apresenta um estudo sobre o movimento de cargas com velocidade superior à da luz prevendo o aparecimento de uma onda de choque cónica, à semelhança do que era conhecido para corpos animados de velocidades supersónicas movendo-se no ar. No entanto confessa-se incapaz de determinar uma solução analítica completa que caracterizasse o fenómeno. Mais tarde, em 1934, o físico

russo P.Cerenkov demonstrou a existência desta emissão de radiação em partículas carregadas eletricamente que se deslocam num meio a velocidade superior à da luz nesse meio, fenómeno que passou a ter o nome de efeito Cerenkov e que valeu ao seu descobridor o prémio Nobel em 1958.

## VI. GRANDES POLÉMICAS

Em meados da década de 80, Heaviside continua a manter a sua vida solitária em Londres. Contactos com a ciência e tecnologia, apesar da oferta de uma grande cidade como Londres, são apenas os que mantém com o seu irmão Arthur entretanto promovido a engenheiro chefe da divisão norte do *Post Office*. Os seus numerosos artigos publicados sobretudo no *The Electrician* não tinham tido grande impacto por serem, por um lado, de difícil leitura, por outro o público que o lia constituído por técnicos de eletricidade, de telegrafia e de telefonia com percursos profissionais relevantes e sólida formação empírica mas em geral desinteressados da formulação teórica e formal apresentada por Heaviside. Em 1986 D.Hughes, um conceituado inventor britânico com um percurso longo nos EUA, assume a presidência da *Society of Telegraph Engineers and Electricians* e no seu discurso inaugural apresenta os resultados de uma série de experiências por si efetuadas sobre o comportamento de condutores de diferentes tipos e formas quando sujeitos a tensão constante ou a tensão rapidamente variável. As conclusões que tira são em parte a negação da lei de Ohm e contra a teoria de Maxwell. Heaviside toma conhecimento deste discurso através da sua publicação e analisando as experiências feitas conclui que Hughes não só tinha errado na parte experimental como ignorava tudo o que ele tinha vindo a publicar nos últimos 10 anos pois parte do observado tinha a ver com o efeito pelicular já por si tratado e com a autoindução. Resolve escrever um comentário sobre o trabalho de Hughes que acabou por ser publicado no *The Electrician*. Apesar de alguns cuidados censórios da parte do editor Biggs, o tom do artigo é suficientemente forte para despertar as atenções e merecer uma resposta de Hughes. Heaviside contra-ataca de imediato e mais uma vez o faz de uma forma bastante sarcástica.

Esta desavença passa, contudo, para segundo plano face à que em breve se vai reacender com William Preece.

Arthur Heaviside que tinha entretanto acedido a uma posição de chefia do *Post Office* em Newcastle, desenvolve uma proposta para uma nova arquitetura das linhas telefónicas em que os receptores telefónicos eram ligados em paralelo. Oliver de imediato compreende que este paralelismo é equivalente ao aumento da corrente de fugas na linha, assunto por ele já estudado e que potencialmente conduzia a melhor qualidade de transmissão. Um estudo mais aprofundado leva-o a concluir que a representação da linha por uma resistência  $r$ , capacidade  $c$  e indutância  $l$  distribuídas não é suficiente, sendo necessário introduzir um quarto parâmetro a resistência ou o seu inverso, a condutância de fugas  $g$ . A partir desta representação da linha era possível determinar uma condição de transmissão sem distorsão que se traduzia pela simples relação  $l/r = c/g$ . Como para linhas aéreas  $l/r \ll c/g$  as

hipóteses possíveis para se aproximar da igualdade eram: i) diminuir a resistência  $r$  usando outros materiais ou maior secção, solução cara e que não conduzia a grandes ganhos; ii) diminuir a capacidade, solução não muito viável; iii) aumentar a condutância de fugas  $g$ , solução que tinha o inconveniente de aumentar a atenuação; iv) aumentar a indutância  $l$ . Heaviside obviamente que defende a última solução como a única viável e a indutância tida até então como o grande problema de transmissão que todos queriam evitar surge como a solução para melhorar o comportamento das linhas de transmissão.

Os dois irmãos escrevem um extenso artigo para ser publicado pela *Society of Telegraph Engineers* que, por causa da afiliação de Arthur, tem de ser submetido para aprovação à direção do *Post Office*. Ora o engenheiro chefe do *Post Office* era então Preece que ao ler o artigo e verificando que o seu conteúdo contrariava totalmente as ideias que vinha defendendo, não só impede a publicação como se recusa a devolver aos autores o original submetido.

William Preece é natural de Gales, onde nasceu em 1834, e oriundo de uma família da média burguesia que se muda para Londres sendo Preece ainda uma criança. Aqui estuda no *King's College School* preparando-se para uma carreira militar. No entanto por dificuldades financeiras familiares abandona este objetivo e começa a trabalhar aos 19 anos na *Electric Telegraph Company* onde rapidamente se torna assistente de engenharia e é encarregado de ajudar Faraday num trabalho experimental sobre cabos submarinos. Em 1870 quando o *Post Office* toma conta de todas as companhias de telegrafia torna-se superintendente da região sul com a responsabilidade de todos os trabalhos de engenharia. Mostra ser um bom gestor, um engenheiro experiente e publica alguns artigos, entre os quais um sobre transmissão duplex, trabalho questionado em 1872 pelo desconhecido e jovem Oliver Heaviside, como já foi referido. Em 1880 torna-se presidente da *Society of Telegraph Engineers* e no ano seguinte é nomeado *Fellow of the Royal Society*. Em 1886, Preece está envolvido num projeto de melhoramento das comunicações telefónicas baseado na substituição do ferro até então usado por cobre. Embora tivesse toda a razão na proposta a argumentação usada era errada já que se baseava na famosa lei KR de Thomson que Preece usava simplesmente para afirmar que o máximo comprimento de uma linha seria  $x = \sqrt{A/(rc)}$  e atribuía valores a  $A$  que mostravam a vantagem do cobre. Também argumentava que o uso do cobre baixava a autoindução da linha aumentando a constante  $A$ . Não é pois de estranhar a reação forte e radical que teve quando leu o artigo dos irmãos Heaviside. Arthur, dada a sua ligação profissional ao *Post Office*, aceita este ato de censura, mas o irmão mais novo decide partir para a luta para ver reconhecido publicamente o valor do seu trabalho. Começa por tentar publicar no *The Electrician* uma denúncia do que ocorrera mas os termos em que o fazia não foram aceites por Biggs. No entanto ainda em 1987, em Junho, publica e explica a sua fórmula para transmissão sem distorsão num artigo no *The Electrician*. Fê-lo no fim da parte XL de uma série de artigos intitulada *Electromagnetic induction and its propagation* [2]. No entanto como se tratava de uma pequena nota não despertou muita atenção

nem teve impacto.

Os problemas para Heaviside agravam-se quando Biggs é afastado de *The Electrician* e o novo editor lhe envia uma carta comunicando a cessação da publicação dos seus artigos no jornal. Heaviside atribui e mais uma vez com razão este facto à intervenção da hierarquia do *Post Office*, sob a influência de Preece. Decide então mudar de tática e inicia a escrita de uma nova série de artigos intitulada *On electromagnetic waves* enviando as duas primeiras partes para Thompson. Aparentemente Thompson aprecia os artigos e Heaviside vê abrirem-se portas na *Philosophical Magazine* onde publica um artigo em Dezembro de 1887 e vê aceite a sua série *On electromagnetic waves* que começará a ser publicada em 1888.

Nesta altura Preece também estava envolvido numa discussão pública com Lodge sobre o problema das normas em vigor sobre proteção contra descargas atmosféricas. Lodge, tomando como modelo laboratorial a descarga de condensadores sobre circuitos indutivos, apresentou uma série de resultados que contrariavam os procedimentos então recomendados e resultantes do trabalho de uma comissão que integrara Preece. Como as descargas observadas eram oscilatórias Lodge argumentava sobre a necessidade de se considerar os efeitos da autoindução nos circuitos de descarga dos pára-raios o que contrariava a prática de então que se preocupava apenas em garantir circuitos de baixa resistência. Lodge recorre inclusivamente aos trabalhos de Heaviside que cita elogiosamente numa conferência em Março de 1888. (Deve-se contudo salientar que, neste caso, Preece estava correto pois, como muito mais tarde se mostrou, as descargas atmosféricas não são oscilatórias).

Este debate que atraía as atenções de um vasto público era visto como o confronto entre os que defendiam um conhecimento "prático" e os que optavam por um conhecimento "científico". Atingiu o seu climax na conferência anual de 1888 organizada pela *British Association for the Advancement of Science* na cidade de Bath. Foi aqui que nas sessões conjuntas das secções de Matemática e Física e de Engenharia se defrontaram Preece e Lodge e respetivos apoiantes. Foi também aqui que FitzGerald apresentou em público pela primeira vez no Reino Unido os resultados das experiências de Hertz que provavam a existência de ondas eletromagnéticas. O resultado de discussões muito vividas foi a clara afirmação da teoria de Maxwell e um forte abalo das posições defendidas por Preece. Heaviside, sem estar presente, é citado como um dos maiores especialistas nesta teoria e responsável por muitos aspetos da sua evolução.

É a partir deste evento que se vão fortalecer as suas relações com o mundo da ciência através de Lodge e FitzGerald. Mas é em Janeiro de 1889 que Heaviside se vê reconhecido como uma das autoridades mundiais em eletromagnetismo após o discurso muito elogioso de Thompson na abertura da *Institution of Electrical Engineers*.

Mais tarde, em fins de 1889, os pais de Heaviside de avançada idade e saúde débil, decidem abandonar a sua residência de Londres e os três vão para Paington próximo de Torquay, na costa sul da Grã-Bretanha.

## VII. TRANSMISSÃO SEM DISTORSÃO

É num artigo escrito nessa altura mas apenas publicado mais tarde nos *Electrical papers-vol2*, intitulado *On the self induction of wires-part VIII: The transmission of electromagnetic waves along wires without distortion* [2] que Heaviside apresenta de forma detalhada a sua proposta de representação mais geral de uma linha de transmissão em que passa a incluir a condutância de fugas por unidade de comprimento  $g$  conforme se indica na figura 3, a partir da qual facilmente se determinam as equações da linha, também conhecidas por equações dos telegrafistas

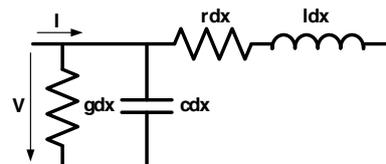


Fig. 3 - Circuito equivalente de uma seção infinitesimal de linha de transmissão

$$\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= gV + c \frac{\partial V}{\partial t} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= rI + l \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned}$$

e das quais se deriva

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = rgV + (rc + lg) \frac{\partial V}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Heaviside introduz agora condição de não haver distorsão

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} \quad (6)$$

e chamando a  $v^2 = lc$ ,  $s = r/l$  e substituindo  $d/dt$  por  $p$ , conforme o seu famoso cálculo operacional que será considerado mais à frente, obtém-se

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (s + p)^2 V$$

Considerando que  $V = ue^{-st}$  a equação anterior reduz-se a  $\partial^2 u / \partial x^2 = p^2 u$  que tem soluções bem conhecidas conduzindo à solução geral

$$V = f(x \pm vt)e^{-st}$$

que mostra que em qualquer ponto da linha a forma de onda de tensão é sempre a mesma a menos de um fator de atenuação exponencial e portanto a linha não distorce o sinal.

A mesma conclusão foi também publicada em Dezembro de 1987, mas justificada de uma forma diferente no já citado artigo publicado na *Philosophical Magazine* com o título *On resistance and conductance operators and their derivatives inductance and permittance specially in connection with electric and magnetic energy* [2], onde determina a condição de não distorsão a partir da impedância da linha  $Z = V/I$ . Para tal considera que dada uma linha infinita com impedância  $Z$  esta não se altera se se acrescentar

no seu início um circuito de parâmetros concentrados proporcionais aos parâmetros da linha conforme se indica na figura 4 e de onde resulta

$$\frac{1}{Z} = gX + cXp + \frac{1}{rX + lXp + Z}$$

e

$$Z^2 + Z(rXp + lXp) = \frac{r + lp}{g + cp}$$

Fazendo agora  $X \rightarrow 0$  determina-se

$$Z = \sqrt{\frac{r + lp}{g + cp}} = \sqrt{\frac{r}{g} \frac{1 + pl/r}{1 + pc/g}}$$

Se se impuser a condição de não distorsão 6

$$Z = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{l}{c}}$$

Sendo a impedância da linha um número real, Heaviside conclui que não haverá distorsão na frequência.

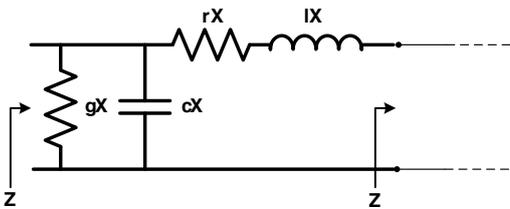


Fig. 4 - Circuito auxiliar para a determinação da impedância de uma linha

Mais tarde, em 1893., Heaviside publica um artigo onde descreve a maneira de implementar a condição de não distorsão em linhas aéreas. Inicialmente publicado em *The Electrician* foi também incluído no 4º capítulo do primeiro volume de *Electromagnetic Theory* com o título *Various ways, good and bad, of increasing the inductance of circuits* [3]. Nele se analisavam as formas como a inserção de bobinas com alta indutância e baixa resistência permitiam elevar a autoindução média distribuída na linha. Atendendo a que este artigo surge como um pequeno texto no fim do livro, passa despercebido pelo público e como habitualmente Heaviside não se preocupa em garantir a sua difusão nem a defesa de direitos sobre aplicações.

No Reino Unido, estas ideias não foram de imediato exploradas dadas as posições antagónicas prevaletentes no *Post Office*, mas nos Estados Unidos o mesmo não se verificou. Inicialmente Campbell, um engenheiro conhecedor e admirador de Heaviside e trabalhando para a AT&T, experimenta com êxito a técnica de aumentar a indutância usando bobinas inseridas em série no circuito. Quando se prepara para registar a patente surge Mikael Pupin, um professor de origem sérvia da Universidade da Columbia com uma patente concorrente. A disputa resolve-se em tribunal em 1900 a favor de Pupin e a AT&T resolve adquirir os direitos da patente, deixando cair Campbell, pagando a Pupin \$185000 mais \$15000 por ano durante a vigência da patente. Pupin

torna-se assim num homem rico e vê o seu nome para sempre associado às bobinas inseridas nos circuitos telefónicos para melhoria de qualidade de transmissão. Apesar de Pupin ter reconhecido a prioridade dos trabalhos publicados por Heaviside, para este não houve proveitos financeiros, apenas viu serem-lhe retirados os louros de uma tão importante invenção.

## VIII. RECONHECIMENTO

O irmão Charles Heaviside tinha partido ainda jovem para Torquay tornando-se proprietário de uma loja de instrumentos musicais. Mais tarde abre um segundo estabelecimento na vizinha Paington. É para o primeiro andar desta loja que a família Heaviside vinda de Londres vai morar. Para Oliver esta mudança trouxe modificações fortes já que a sua vida social sempre muito limitada se expandiu significativamente com o contacto direto com o irmão e seus familiares. Vários dos sobrinhos e alguns dos seus amigos eram amantes e executantes de música. Oliver, que apesar da sua surdez sempre apreciou música, tendo aprendido a tocar piano de forma elementar, passou a ter a possibilidade de a escutar regularmente. Outra inovação foi a adoção entusiástica da bicicleta como meio de transporte. Com muita frequência fazia longos passeios na zona, muitas vezes acompanhado por um dos seus sobrinhos. No entanto a rotina de trabalho manteve-se e continuou a pensar e a escrever sobre as questões do eletromagnetismo que se lhe iam pondo.

FitzGerald e Lodge sugerem a sua nomeação para a *Royal Society*. A sua reação inicial é francamente negativa e apenas o seu irmão Arthur o convence a aceitar. Desta forma é proposto por um conjunto de membros que incluem todos os mais importantes cientistas da época e em 1891 torna-se *Fellow of the Royal Society*, podendo usar as famosas iniciais F.R.S. após o seu nome. Como seria de esperar recusa-se a ir a Londres para a cerimónia formal de admissão.

Decide fazer a publicação conjunta de todos os artigos escritos até então e, em 1892, surgem os dois volumes intitulados *Electrical Papers*. Influenciado pelos seus amigos começa a escrever um tratado sobre o eletromagnetismo e em 1893 é publicado o primeiro volume da *Electromagnetic Theory* publicado por *The Electrician* que tinha entretanto retomado a sua colaboração após a substituição do editor. Nenhuma das obras, apesar de muitas recensões elogiosas, se torna um êxito de vendas, embora algumas centenas se tenham distribuído e escoado.

No seu livro *Electromagnetic Theory* inclui um tópico sobre a proliferação do fator  $4\pi$  que designa por *The eruption of "4π"s* [3] e foi publicado em Outubro de 1891 em *The Electrician*. De facto este factor aparecia repetidas vezes nas fórmulas do eletromagnetismo e Heaviside identificou a causa como sendo a lei de Coulomb que estabelecia que a força entre duas cargas elétricas era dada por  $F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$ . Usando esta fórmula é fácil de calcular que o fluxo do campo elétrico provocado por uma carga  $q$  através de uma superfície esférica nela centrada e de raio  $r$  é  $4\pi q$ . A sua sugestão foi alterar a expressão da lei de Coulomb para  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$  e a constante  $4\pi$  desaparecia do resultado do exemplo e de grande parte das fórmulas em que estava presente. No entanto fazia notar que esta alteração obrigava a

alterar a unidade de carga elétrica e todas as outras unidades relacionadas. Esta alteração de unidades não agradou em geral e gerou-se uma discussão ampla sobre como resolver o problema já que a sugestão da alteração da fórmula da lei de Coulomb foi bem aceite. A discussão sobre onde colocar o factor  $4\pi$  prolongou-se por dezenas de anos, terminando só em 1960 quando o Sistema Internacional de unidades aceitou definitivamente a sua associação à permeabilidade magnética do vazio definindo  $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \text{ H/m}$ .

O seu principal problema continua a ser a sua situação financeira. Os únicos proveitos que tem resultantes da venda dos seus artigos e dos seus livros são insuficientes e Oliver continua a viver no limiar da pobreza apesar do apoio sempre presente dos familiares. FitzGerald resolve tentar ajudar e consegue que a *Royal Society* lhe atribua em 1894 uma ajuda proveniente de fundos próprios assistenciais. No entanto, dada a natureza caritativa deste apoio, Heaviside recusa-o liminarmente. Os seus amigos continuam a procurar soluções que permitam minorar as dificuldades financeiras e, em 1896, o Governo atribui-lhe uma pensão de £120 anuais por excepcionais serviços prestados ao país e Heaviside aceita-a de bom grado já que lhe é atribuída pelo trabalho realizado.

A década de 90 vê-o envolto em várias disputas científicas. A primeira deve-se à sua associação com a *Royal Society* que lhe permite, como a qualquer membro, a publicação de artigos nos seus *Proceedings* sem prévia avaliação. Heaviside decide publicar uma série de artigos sobre o seu cálculo operacional que vinha a utilizar há já alguns anos. Desta forma são publicadas em Fevereiro e Julho de 1893 as duas primeiras partes de *On operators in physical mathematics* [6] e [7] mas o seu conteúdo levanta questões sobre rigor matemático por parte de muitos membros. A terceira parte quando recebida é sujeita a pré avaliação e rejeitada por razões que essencialmente tinham a ver com o uso de séries divergentes. Heaviside fica, evidentemente, insatisfeito mas não inicia um debate público como na década anterior. A sua reação é sobretudo de desilusão e não esquecerá o episódio quando anos mais tarde recusa receber uma medalha de honra que lhe foi atribuída pela *Royal Society*.

Uma outra questão que teve foi sobre os quaterniões. Como se viu, Heaviside tinha abandonado os quaterniões em favor de uma representação vetorial mas Tait, professor da universidade de Edimburgo resolve defender os quaterniões e fazer alguns comentários endereçados sobretudo a Gibbs, em que apresenta a sua discordância relativamente ao uso de vetores, defendendo vantagens dos quaterniões. Heaviside resolve responder e conforme se pode verificar no capítulo três do primeiro volume de *Electromagnetic Theory* [3] fá-lo com a sua habitual agressividade o que provoca uma série de respostas e contra respostas que se prolongará por alguns anos.

A sua vida pessoal altera-se muito pois em 1894 morre a sua mãe e um pouco mais tarde em 1896 é a vez de perder o seu pai. Heaviside fica a habitar sozinho, embora conte com o apoio de uma governanta que lhe cuida da casa. Em 1897 decide comprar uma casa no campo em Newton Abbot situada alguns quilómetros para o interior e para lá se muda. A década de 90 e o século XIX terminam do ponto de vista

científico para Heaviside com a publicação, em 1899, do segundo volume de *Electromagnetic Theory* [4].

## IX. CÁLCULO OPERACIONAL

Embora as suas ideias sobre o cálculo operacional tenham surgido cedo nos seus escritos, é no artigo *On resistance and conductance operators and their derivatives inductance and permittance specially in connection with electric and magnetic energy* [2] de 1887 que Heaviside começa a formalizar as suas ideias. Faz notar que a lei de Ohm  $V = RI$  pode ser interpretada como a aplicação de um operador  $R$  que transforma a corrente em tensão. Faz em seguida a generalização para um circuito  $RL$  série definindo um operador resistência  $Z = R + Lp$  com  $p = d/dt$  considerado como uma simples quantidade algébrica. Desta forma pode generalizar a lei de Ohm para  $V = ZI$ . Paralelamente, introduz para um circuito  $GC$  paralelo o operador condutância  $Y = G + Cp$  para o qual é válido  $I = YV$ . Para um mesmo circuito os dois operadores estarão relacionados por  $ZY = 1$ . E generaliza para qualquer circuito considerando que qualquer um dos operadores pode ser expresso sempre com função racional  $Z(p)$  dos elementos do circuito e de  $p$ . Deste modo conhecendo  $Z(p)$ , dada uma tensão  $v(t)$  pode-se determinar a corrente no circuito  $i(t) = v(t)/Z(p)$ .

Como em geral se procura a resposta de um circuito a partir de um dado instante, Heaviside introduz a função degrau unitário que é nula para qualquer  $t < 0$  e igual à unidade para  $t \geq 0$  e utiliza para a sua notação  $1$ . Actualmente é conhecida por degrau de Heaviside ou função de Heaviside em sua homenagem e representada por  $H(t)$ .

O exemplo mais simples será procurar qual a função cuja derivada seja um degrau, isto é, em que  $Z = p$ . e  $py(t) = H(t)$  Heaviside considera que  $1/p$  é a operação de integração e portanto

$$y(t) = \frac{1}{p}H(t) = \int_0^t H(t)dt = tH(t)$$

Este resultado é facilmente generalizável para  $p^n$

$$y(t) = \frac{1}{p^n}H(t) = \frac{t^n}{n!}H(t)$$

Considerando agora o circuito  $RL$  série em que  $Z = R + Lp$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{H(t)}{R + Lp} \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{R}{L} p^{-1} - \left( \frac{R}{L} \right) p^{-2} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 p^{-3} - \dots \right) H(t) \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{R}{L} t - \left( \frac{R}{L} \right) \frac{t^2}{2!} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{t^3}{3!} - \dots \right) H(t) \\ y(t) &= \frac{H(t)}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) \end{aligned}$$

Heaviside demonstra também um teorema da expansão que permite decompor  $Z$  em frações e obter grandes simplificações em problemas complexos.

No entanto, os seus métodos levantam questões da parte dos matemáticos. Para além da questão do uso de séries divergentes que lhe valeu a recusa de publicação pela *Royal Society* existem outros problemas na sua teoria. Por exemplo a simples consideração que  $1/p$  é um operador de integração pressupõe condições iniciais nulas o que não levado em consideração conduz a soluções erradas.

Mas mais estranho era o que acontecia quando se aplicava o método a certos circuitos de parâmetros distribuídos (caso das linhas de transmissão) em que se chegava a  $\sqrt{p}$ . O que seria  $\sqrt{d/dt}$ , a raiz quadrada de uma diferenciação?

Este assunto que hoje se inclui num ramo das matemáticas designado por cálculo fraccional já tinha sido objecto de alguns estudos entre os quais se encontram os de Euler e de Liouville. Heaviside arranhou uma solução expedita recorrendo à função gama  $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ . Para  $x = n \in \mathbb{N}$  a função tem o valor  $\Gamma(n) = (n-1)!$  e como  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  levou Heaviside a concluir que  $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$ . Como  $\frac{d^m}{dt^m} t^n H(t) = \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m} H(t)$ , ( $n > m$ ) generalizando para não inteiros e fazendo  $n = 0, m = 1/2$  pode concluir-se que

$$p^{1/2} H(t) = \frac{0!}{(-1/2)!} t^{-1/2} H(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} H(t)$$

Resultado um pouco estranho que perturbou muitos matemáticos mas que conduzia a soluções correctas para certos problemas.

Um curioso problema que mostra como Heaviside usava o seu método é o da determinação da idade da Terra e que é apresentado como um dos capítulos de *Electromagnetic Theory-Vol2* [4].

A solução baseia-se num modelo apresentado por Thompson que considera a Terra como um corpo homogénio que partindo de uma dada temperatura inicial tem vindo continuamente a arrefecer. Considerando ainda que o raio da Terra é muito elevado e portanto a sua superfície se pode considerar plana, Thompson chega à equação

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{c}{k} \frac{\partial U}{\partial t}$$

em que  $U$  é a temperatura de um ponto à distância  $x$  da superfície,  $c$  e  $k$  são, respectivamente a capacidade calorífica e a condutividade térmica da Terra. Trata-se de uma equação de difusão, bem conhecida desde Fourier, e que Heaviside resolve de uma forma expedita:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{c}{k} p U$$

que tem a solução geral

$$U = A_1 e^{x\sqrt{cp/k}} + A_2 e^{-x\sqrt{cp/k}}$$

As condições fronteira conduzem a  $A_1 = 0$  para que a solução seja sempre finita e  $A_2 = U_0$  em que  $U_0$  é temperatura superficial ( $x = 0$ ). Como apenas se está interessado no gradiente de temperatura

$$\left[ -\frac{dU}{dx} \right]_{x=0} = U_0 \sqrt{\frac{cp}{k}} = U_0 \sqrt{\frac{c}{\pi kt}}$$

Para o gradiente actual  $g$  a idade da Terra  $T$  será dada por

$$T = \frac{U_0^2 c}{\pi g^2 k}$$

o que para os valores então conhecidos conduzia a  $T = 98 * 10^6$  anos valor que não agradava aos geólogos e evolucionistas que acreditavam ser demasiado baixo para factos observados. Heaviside baseado num modelo mais complexo de Perry determina uma outra fórmula que conduzia a valores superiores a  $300 * 10^6$  anos. Como hoje se sabe estes modelos estavam errados já que não incluíam a geração de calor no interior da Terra por efeito da desintegração de materiais radioativos.

Apesar das muitas reservas levantadas o cálculo despertou a atenção de muitos. Por um lado os engenheiros abraçaram com entusiasmo um método que em muito simplificava os cálculos, por outro alguns matemáticos que procuraram uma justificação formal do método. Na América, Steinmetz investigador na Westinghouse e professor universitário aplica o método ao caso particular de circuitos alimentados por tensões alternadas sinusoidais e introduz o operador  $jw$  equivalente a  $p$  que permite estender com facilidade toda a teoria de circuitos de corrente contínua para a corrente alternada. Em Cambridge o matemático Bromwich consegue em 1916 provar muitos dos resultados de Heaviside considerando  $p$  uma variável complexa e usando técnicas de integração no plano complexo. Nos anos 20, o americano Carson da AT&T deduz uma fórmula que permite calcular a função de  $p$  correspondente a uma função do tempo. Nos anos 30, o alemão Gustav Doetsch reúne todas as contribuições numa teoria coerente e formalmente bem justificada que é hoje generalizadamente aplicada sob o nome de transformada de Laplace.

## X. ÚLTIMOS ANOS

A vida em Newton Abbot é uma aventura para Heaviside. Pela primeira vez na sua vida assume a direcção da sua vida doméstica, embora contando com o apoio de uma governanta que trouxe de Paington. Os seus comentários escritos são otimistas mostrando uma grande satisfação pela vida no campo., o que é confirmado por um dos seus amigos mais recentes, o professor Searle de Cambridge que o visita com regularidade. Com ele fará muitos passeios de bicicleta o que também sucederá com FitzGerald, outro entusiasta das duas rodas, numa rara visita. Mas a sua natural reserva isola-o de contatos com os seus vizinhos impedindo-o de uma integração na comunidade. As suas visitas aos familiares em Torquay vão rareando e a solidão aumenta.

No entanto o reconhecimento nacional e internacional aumenta recebendo uma elevada correspondência de toda a parte, é chamado a pronunciar-se sobre assuntos técnicos e científicos e não resiste em se envolver em algumas polémicas (por exemplo com Planck sobre entropia).

A governanta tem problemas de saúde graves e afasta-se e as condições de vida em sua casa degradam-se, já que Heaviside aparentemente apenas se preocupa em a manter super aquecida. A sua saúde também não ajuda, as doenças crónicas vão-se agravando e os invernos são de facto muito penosos.

Continua, contudo, a trabalhar. Em 1902 é convidado pela *British Encyclopedia* a escrever um artigo sobre *The Theory of Electric Telegraphy* que fará parte da 10ª edição da enciclopédia. Nele ficará incluída a sua última contribuição notável para a ciência. Nas comunicações sem fio verificava-se que as ondas não se propagavam retilineamente, antes acompanhavam a curvatura da Terra. Como explicação existiam diversas teorias das quais se destacava uma teoria de difração contínua na atmosfera. Heaviside resolve apresentar, justificando-a, uma causa bem diferente. Para ele existia na parte superior da atmosfera terrestre uma camada condutora que conjuntamente com a superfície condutora da terra guiava a propagação da onda. Essa hipotética camada que se designou então por camada de Heaviside, nome que veio a ser abandonado quando anos mais tarde se demonstrou experimentalmente a sua existência e passou a designar-se por ionosfera.

As honrarias sucedem-se, tendo recebido o doutoramento *honoris causa* pela universidade de Göttingen em 1905 e em 1908 é nomeado membro honorário da *Institution of Electrical Engineers*. Também neste ano o seu nome faz parte da lista reduzida dos nomeados para o prémio Nobel. Apesar de estarem incluídos também nomes como Einstein, Planck e Lorentz o prémio veio a ser atribuído a N.G. Dalen pela sua contribuição para o sistema automático de alimentação de combustível das lâmpadas de faróis e bóias de navegação.

A situação em Newton Abbot torna-se insustentável e por sugestão de seu irmão Charles, Oliver vai, em 1908, viver para Torquay partilhando uma residência chamada Homefield com Miss Mary Way, uma irmã mais velha da esposa de Charles. A situação era vantajosa para ambos já que Oliver passava a ter um apoio na sua vida doméstica e Mary recebia uma ajuda financeira que lhe permitia manter a casa. A nova vida começa com harmonia, tendo Heaviside ficado com o andar superior da casa. Nos primeiros anos as relações são boas entre ambos, Mary é um suporte importante nas fases de doença mas começam a aparecer sinais de uma crescente incompatibilidade. Em 1911 torna-se dono de Homefield tendo efectuado a compra mediante hipoteca. As suas condições financeiras agravam-se apesar da sua pensão ter sido actualizada em 1914 para £220. Mary que também vê a sua saúde deteriorar-se, acaba por ir viver com uma sobrinha em 1916, deixando Oliver sózinho.

Do ponto de vista científico apenas se pode referir a publicação do terceiro volume da *Electromagnetic Theory* [5] em 1912. Heaviside fica ligado às suas ideias e métodos que são já o passado, não aceitando por exemplo, o electrão descoberto em 1897 por J. J. Thomsom em Cambridge como uma partícula elementar portadora de carga eléctrica. Continua contudo a ser homenageado tendo sido nomeado em 1918 membro honorário do *American Institute of Electrical Engineers* e recebido em 1921 a *Faraday Medal* de *Institution of Electrical Engineers*.

A sua vida torna-se cada vez mais fechada, o casal Searle e alguns familiares são das poucas visitas que recebe. Começa a ter algumas atitudes mais bizarras como o ter assumido o título W.O.R.M. com que passa a assinar. Os últimos anos são caracterizados pelo isolamento e proble-

mas de saúde a que se soma a perda sucessiva de muitos de seus amigos e familiares.

No final do ano de 1924 recebe a visita dos Searl que o encontram muito fragilizado. Nos primeiros dias de 1925 é encontrado inconsciente em sua casa depois de uma queda nas escadas. Foi transportado para um hospital na cidade onde começa a recuperar tendo mesmo recebido alguns amigos. Mas a sua idade e debilidade não perdoam e acaba por morrer no dia 3 de fevereiro de 1925. Foi sepultado num cemitério local junto a seus pais.

## XI. NOTAS FINAIS

A informação biográfica utilizada foi recolhida principalmente nas duas biografias modernas [8] e [9] embora esteja em grande parte disponibilizada na internet. Para a história do eletromagnetismo usou-se a ensaio histórico *The Maxwellians* [10] cuja leitura se recomenda. As obras de Heaviside continuam a ser editadas mas neste trabalho consultaram-se apenas as versões digitalizadas existentes na internet em <http://www.archive.org/>.

É curioso lembrar que Heaviside, um amante de música, tem hoje o seu nome associado a uma pequena peça musical: *The Journey to the Heaviside Layer* incluída em *Cats*, grande êxito musical dos anos 80-90 do século XX na Broadway. T.S. Elliot autor do poema que inspira este musical usa o nome desta camada ionosférica como o do paraíso dos gatos. O leitor interessado poderá vê-la e ouvi-la em <http://www.youtube.com/watch?v=AvsRZ8FVx4o>.

## REFERÊNCIAS

- [1] O. Heaviside, *Electrical Papers-Volume I*, Macmillan and Co., London, 1892.
- [2] O. Heaviside, *Electrical Papers-Volume II*, Macmillan and Co., London, 1894.
- [3] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory-Volume I*, The Electrician Printing and Publishing Co.Ld., London, 1893.
- [4] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory-Volume II*, The Electrician Printing and Publishing Co.Ld., London, 1899.
- [5] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory-Volume III*, The Electrician Printing and Publishing Co.Ld., London, 1912.
- [6] O. Heaviside, "On operators in physical mathematics, part I", em *Proceedings of RS. Royal Society*, 1893, vol. 52.
- [7] O. Heaviside, "On operators in physical mathematics, part II", em *Proceedings of RS. Royal Society*, 1893, vol. 54.
- [8] P. Nahin, *Oliver Heaviside. The life, work and times of an electrical genius of the Victorian age*, The John Hopkins University Press, Baltimore, 2002.
- [9] B. Mahon, *Oliver Heaviside. Maverick mastermind of electricity*, The institution of Engineering and Technology, UK, 2009.
- [10] B.J. Hunt, *The Maxwellians*, Cornell University Press, Ithaca, 2005.