



A álgebra na formação inicial de professores dos primeiros anos: Uma experiência de formação

Neusa Branco

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação – Universidade de Lisboa
jpponte@ie-ul.pt

Resumo: Esta investigação estuda o desenvolvimento do pensamento algébrico de futuros professores e educadores e a sua aprendizagem sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no âmbito de uma experiência de formação com uma abordagem exploratória, com particular enfoque em situações que envolvem modelação matemática. O estudo segue uma metodologia qualitativa, usando estudos de caso. Os participantes são formandos de uma turma da unidade curricular Álgebra e Funções da Licenciatura em Educação Básica, lecionada pela primeira autora. Foram selecionados quatro formandos para estudos de caso. Os dados são recolhidos por dois questionários realizados aos 20 formandos da turma antes e depois da realização da experiência de formação. Foram ainda realizadas três entrevistas individuais em diferentes momentos da experiência de formação aos quatro formandos, tendo por base tarefas matemáticas que abordam diferentes tópicos da Álgebra. São ainda fontes de dados a observação participante e os documentos produzidos pelos formandos. Este artigo apresenta dados relativos ao trabalho desenvolvido pela turma e, de um modo particular, por Alice no âmbito do trabalho da modelação matemática. Os resultados referem-se ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e à sua compreensão do ensino e da aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no âmbito da experiência de formação, quando analisam produções de alunos do 6.º ano e refletem sobre a abordagem de ensino seguida pela professora para desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver situações de modelação. Os formandos identificam aspetos fundamentais que visam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Ensino elementar; Experiência de formação; Ensino aprendizagem da Álgebra.



Abstract: This research project analyzes the development of algebraic thinking of future teachers and educators and their learning about the teaching and learning of algebra in the early years, in the scope of a training experiment within an exploratory approach, with particular emphasis on situations involving mathematical modeling. The study follows a qualitative approach, using case studies. The participants are students from a class of Algebra and Functions course of a teacher education program, taught by the first author. Four prospective teachers are selected for case studies. Data are collected by two questionnaires applied to the 20 students of the class before and after the training experiment. Three individual interviews were also conducted at different moments of the training experiment with four students, based on mathematical tasks dealing with different topics of algebra. Data sources are also provided by participant observation and by documents produced by the future teachers. This article presents data on work done by the class and, in particular, by Alice, in the scope of the work with mathematical modeling. The results relate to the development of algebraic thinking of the future teachers and their understanding of the teaching and learning of algebra in the early years, in the scope of the training experiment, when analyzing the productions of students from the 6th grade and reflecting on the approach followed by the teacher to develop their students' ability to resolve situations of modeling. Future teachers identify key issues that aim at the development of students' algebraic thinking.

Keywords: Future teachers' education program; Elementary school; Teaching experiment; Teaching and learning of algebra.

Resumen: Esta investigación estudia el desarrollo del pensamiento algebraico de los futuros maestros y educadores y su aprendizaje sobre el proceso enseñanza/aprendizaje del álgebra en los primeros años, como parte de una experiencia de formación con un enfoque exploratorio, con énfasis particular en situaciones que implican modelación matemática. El estudio sigue una metodología cualitativa, utilizando estudios de caso. Los participantes son estudiantes de una clase de la asignatura de Álgebra y Funciones de la Licenciatura de Educación Primaria, impartida por la primera autora. Se seleccionan cuatro estudiantes para los estudios de caso. Los datos se recogen mediante dos encuestas realizadas a los 20 estudiantes de la clase antes y después de la realización de la experiencia de formación. Se realizaron también tres entrevistas individuales, en diferentes momentos de la experiencia de formación, a los cuatro futuros maestros, basadas en tareas matemáticas que plantean diferentes temas de álgebra. Fuentes de



datos son también la observación participante y los documentos elaborados por los estudiantes. Este artículo presenta los datos sobre la labor realizada por la clase y, en particular, por Alice en el ámbito del trabajo de la modelación matemática. Los resultados conciernen al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes y su comprensión de la enseñanza y del aprendizaje del álgebra en los primeros años, en el marco de la experiencia de formación, al examinar las producciones de los alumnos de 6 ° grado y reflexionar sobre el enfoque seguido por la profesora para desarrollar en sus alumnos la capacidad de resolver situaciones de modelación. Los estudiantes identifican los aspectos esenciales que tienen por objetivo el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos.

Palabras-clave: Formación inicial del profesorado; Enseñanza primaria; Experiencia de formación; Enseñanza/aprendizaje del álgebra.

Introdução

A formação inicial de futuros professores e educadores constitui um importante suporte para o posterior desempenho da sua atividade profissional. Nesta formação, o desenvolvimento do seu conhecimento profissional relativo às diversas áreas curriculares deve, naturalmente, merecer uma especial atenção.

A formação inicial de professores e educadores foi recentemente reestruturada, passando a Licenciatura em Educação Básica a dar acesso a Mestrados que habilitam para a docência, da educação pré-escolar ao ensino do 2.º ciclo do ensino básico. As atuais orientações nacionais e internacionais para a formação de professores na área da Matemática (Albuquerque, Veloso, Rocha, Santos, Serrazina & Nápoles, 2006; CBMS, 2001) sugerem que é preciso estudar o modo de preparar os professores para ensinar Números e Operações, Geometria e Medida, Álgebra e Organização e Tratamento de Dados. Este artigo surge no âmbito de uma investigação centrada na formação inicial de futuros professores e educadores que estuda o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e da sua perspetiva sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

A reformulação do Programa de Matemática do Ensino Básico atribui uma maior visibilidade da Álgebra, salientando o contributo do trabalho neste tema para o pensamento matemático, desde os primeiros anos, e tornando assim premente o seu estudo específico na formação de professores. Lins & Kaput (2004) apontam para a importância de nos primeiros anos, mais que o ensino e aprendizagem de conteúdos específicos da Álgebra, o foco estar no desenvolvimento do pensamento



algébrico dos alunos. Ponte, Branco & Matos (2009) salientam o trabalho em três vertentes que se articulam para o desenvolvimento deste pensamento: (i) representar, (ii) raciocinar, e (iii) resolver problemas e modelar situações. Contudo, constitui ainda um significativo desafio teórico aprofundar e clarificar o que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade e no modo de o promover, bem como o conhecimento a desenvolver neste âmbito pelos futuros professores e educadores. Este desafio, por sua vez, tem importantes implicações práticas, permitindo perceber como levar os formandos a compreender profundamente os conceitos a desenvolver e conhecer os aspetos respeitantes ao seu ensino a mobilizar na sua prática futura.

Neste contexto, torna-se pertinente investigar o modo de promover o ensino da Álgebra junto dos formandos, proporcionando-lhes o desenvolvimento do conhecimento matemático e do conhecimento didático adequado ao ensino deste tema a alunos dos primeiros anos. O artigo tem como principal propósito analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos, em particular no que respeita à exploração de situações de modelação matemática e à compreensão de aspetos da sua Didática nos primeiros anos de escolaridade, no âmbito de uma experiência de formação de carácter exploratório no contexto de formação inicial de professores e educadores.

Enquadramento Teórico

A Álgebra nos primeiros anos

O ensino-aprendizagem da Álgebra tem dado uma ênfase crescente ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade (Blanton & Kaput, 2005; Carraher & Schliemann, 2007). O intuito é promover a interligação entre este e os outros temas matemáticos neste nível de ensino, tornando o fundamental para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Segundo Blanton, Schifter, Inge, Lofgren, Willis, Davis & Confrey (2007), esta perspetiva de trabalho em Álgebra nos primeiros anos, designada por early algebra, promove:

“uma forma de pensar que traz um novo significado, profundidade e coerência à compreensão matemática das crianças por mergulhar mais profundamente em conceitos que já estão a ser ensinados para que haja oportunidade de generalizar relações e propriedades em Matemática” (p. 7).



Lins e Kaput (2004) salientam duas características essenciais do pensamento algébrico: (i) generalizar e expressar essa generalização, e (ii) raciocinar sobre as formas de generalização, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente. Kaput (2008) clarifica estes dois aspetos que afirma como centrais no desenvolvimento do pensamento algébrico e identifica três vertentes em que ambos surgem de algum modo. Este autor desenvolve estes aspetos centrais e vertentes da Álgebra na perspetiva da Matemática escolar, em particular, dos primeiros anos de escolaridade. As três vertentes envolvem: (1) o estudo de estruturas e sistemas abstratos a partir de cálculos e relações, decorrentes da Aritmética e de raciocínio quantitativo; (2) o estudo de funções, relações e variação, e (3) a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto dentro como fora da Matemática.

O trabalho desenvolve-se nos primeiros anos, nestas vertentes, com situações “em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade” (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). Investigações recentes realizadas em Portugal (Alvarenga & Vale, 2007; Santos & Oliveira, 2008) têm reforçado a perspetiva de fomentar o pensamento algébrico, nomeadamente, através da exploração de regularidades e relações, procurando a sua generalização, o que se enquadra nas vertentes identificadas por Kaput (2008).

Neste artigo, o foco recai sobre a terceira vertente apresentada por Kaput (2008) em duas dimensões: a compreensão de situações algébricas pelos futuros professores e educadores e a possibilidade de desenvolver este tipo de situações com alunos dos primeiros anos. A modelação é apresentada, por este autor, como uma atividade algébrica que envolve os dois aspetos centrais da Álgebra, uma vez que as situações propostas podem ser modeladas por sistemas de equações e as soluções podem ser determinadas por ações sintaticamente guiadas.

Nos primeiros ciclos de ensino é importante que os alunos generalizem e modelem situações usando linguagem natural e representações pictóricas antes de se introduzir a simbologia algébrica ou os gráficos. O ensino deste tema deve seguir uma abordagem que possibilite aos alunos a utilização de estratégias informais, onde eles descubram e verifiquem as soluções, e adotando progressivamente estratégias mais formais. A determinação de soluções pode ser informada pela identificação de relações lineares envolvendo quantidades desconhecidas. Os alunos não têm necessariamente que começar a resolução de um problema com a representação da informação por meio de símbolos. Wijers e Reewijk (apud



Sutherland, 2004) sugerem que “os alunos são livres para apresentar as suas próprias notações, tais como atalhos e abreviaturas” (p. 83). As suas estratégias e notações devem ter significado para eles próprios e ter um significado de acordo com o problema. A reflexão sobre esta perspetiva de ensino aprendizagem é proposta aos participantes do estudo na experiência de formação cujo trabalho é abordado neste artigo.

A formação inicial

Nos últimos anos, tem-se desenvolvido uma melhor compreensão dos processos pelos quais se aprende a ensinar Matemática e se desenvolve a identidade profissional do professor durante a sua formação inicial (Ponte & Chapman, 2008). Esta formação deve promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos, a especificidade dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade, e as orientações curriculares. O desenvolvimento desse conhecimento surge “integrando conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos” (Ponte & Chapman, 2008, p. 256). Esta perspetiva assenta nas orientações para a formação inicial (CBMS, 2001) que apontam para o desenvolvimento do conhecimento matemático e o contacto com diversas opções pedagógicas. As tarefas a realizar ao longo da formação inicial devem proporcionar experiências que reflitam boas práticas de Didática da Matemática e a sua vivência permite desenvolver o conhecimento matemático e didático dos formandos possibilitando-lhes que “experimentem e vivam de forma continuada aquilo que se pretende que depois venham a utilizar enquanto professores” (Albuquerque et al., 2006, p. 23).

No âmbito da formação inicial em Álgebra é necessário, tal como noutros temas matemáticos, proporcionar aos formandos um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem sobre esse tema, promovendo o conhecimento para o ensinar. A este respeito, Doer (2004) salienta que a aprendizagem sobre o ensino da Álgebra pode beneficiar da observação, análise e reflexão de situações de ensino aprendizagem. A perspetiva de iniciar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos exige um aprofundamento da compreensão da Álgebra, do que esta envolve e de onde está presente e, também, das suas relações com outros temas matemáticos, de modo a fomentar o estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática, fundamental para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.



Experiência de formação

O presente estudo tem por base a concretização de uma experiência de formação que decorre no âmbito da unidade curricular Álgebra e Funções do curso de Licenciatura em Educação Básica. Nesta são abordados os tópicos Relações, Sequências e regularidades, Sucessões, Funções e Modelação matemática e tem por base princípios decorrentes da fundamentação teórica apresentada. O trabalho desenvolvido na experiência de formação tem um cunho exploratório que visa envolver os formandos na discussão dos conceitos algébricos e na análise de situações de ensino-aprendizagem da Álgebra, promovendo:

- a) O desenvolvimento do seu pensamento algébrico e a consolidação da sua compreensão dos conceitos algébricos,
- b) O conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, de modo a contribuir para o desenvolvimento do conhecimento necessário para a ensinar.

Os formandos realizam tarefas de natureza exploratória suscetíveis de contribuir para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e do conhecimento sobre ensinar e aprender Álgebra nos primeiros anos de escolaridade, no âmbito de diversos tópicos. Esta abordagem de formação contempla a análise de situações de ensino-aprendizagem que favorecem o desenvolvimento da sua perspetiva de como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus futuros alunos. São propostas, nomeadamente, a análise de estratégias usadas por alunos dos primeiros anos, a compreensão dos seus conhecimentos e dificuldades, a observação e exploração das suas representações e a reflexão sobre situações de trabalho na sala de aula que fomentem o desenvolvimento do pensamento algébrico desses alunos.

Uma das tarefas, relativa ao trabalho com situações envolvendo quantidades desconhecidas, propõe a análise de estratégias de resolução usadas por alunos do 6.º ano de escolaridade para resolver o problema¹ das galinhas que se segue:



Quanto pesam as três galinhas? Quanto pesa cada galinha?

Figura 1 – Problema das galinhas (Tarefa 2)

A tarefa propõe, ainda, a reflexão sobre a abordagem de ensino seguida pela professora para promover a apresentação de diferentes estratégias usadas pelos alunos e sua discussão, bem como a discussão sobre o uso da letra e do seu significado.

Metodologia de investigação

A investigação segue uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo, recorrendo a estudos de caso. Esta metodologia permite conhecer a realidade tal como ela é vista pelos participantes, pelo que tem uma significativa componente descritiva (Ponte, 2006). A metodologia de investigação procura dar a conhecer em pormenor as compreensões e perspetivas dos participantes quanto a aspetos relativos ao pensamento algébrico e à sua compreensão do ensino e da aprendizagem da Álgebra, no quadro da experiência de formação cujos objetivos e modo de trabalho foram apresentados atrás.

Os participantes são os 20 formandos de uma turma da unidade curricular Álgebra e Funções, lecionada entre setembro de 2009 e janeiro de 2010, pela própria investigadora, a primeira autora. Foram selecionados quatro formandos para estudo de caso, atendendo ao seu percurso escolar na disciplina de Matemática antes da entrada no ensino superior e os seus interesses. Assim, na experiência anterior em Matemática foi considerada a frequência apenas até ao 9.º ano, num ou dois anos no ensino secundário e em três anos no ensino secundário. Foi também tido em conta o mestrado que o formando pensava frequentar, de entre os que habilitam para a docência, de modo a contemplar a identificação de possíveis contributos

da experiência de formação em formandos com características distintas. Este artigo foca apenas o caso de Alice, que não frequentou qualquer disciplina de Matemática após o ensino básico e indicou pretender frequentar o Mestrado em Educação Pré-escolar.

Este estudo tem como propósito contribuir para uma melhor compreensão do contexto de formação de futuros professores e educadores no domínio da Álgebra, atendendo às suas próprias perspetivas, aos seus conhecimentos prévios da Álgebra e aos seus objetivos futuros. Os estudos de caso podem servir este propósito, contribuindo para refinar o conhecimento teórico já existente e para levantar novas questões para futuras investigações (Stake, 1994). No que respeita à investigação em educação matemática, Ponte (2006) refere que os estudos de caso interpretativos procuram ir “a pouco e pouco acrescentando novos elementos que enriquecem o nosso conhecimento colectivo acerca desses problemas e fenómenos” (p. 16).

Dada a natureza desta investigação, as fontes de dados são, principalmente, entrevistas, observação e documentos que suportam a vertente descritiva. São recolhidos dados através de dois questionários que integram tarefas matemáticas realizados a toda a turma, um antes e um depois da concretização da experiência de formação. São feitas entrevistas individuais aos quatro formandos objeto de estudo em três momentos (figura 2), com base nas suas respostas aos questionários e de modo a conhecer a sua vivência da experiência de formação. Finalmente, é feita observação participante durante a concretização das tarefas em sala de aula, no âmbito dos tópicos descritos na experiência de formação, e são recolhidos documentos produzidos pelos formandos.

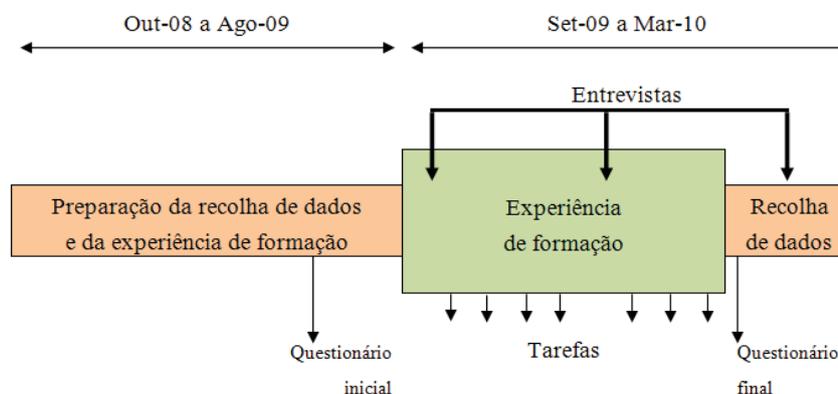
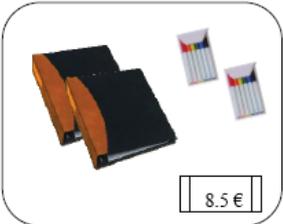


Figura 2 – Momentos de recolha de dados

Constitui um significativo desafio metodológico estudar as aprendizagens dos formandos no quadro da experiência de formação conduzida pela própria investigadora. Atendendo à proximidade entre a investigadora e o objeto de estudo, houve especial empenho em definir de um modo claro e rigoroso as opções metodológicas. A finalidade desta investigação e a natureza que assume permite desenvolver conhecimento para o próprio docente sobre o seu saber, conhecimento para outros docentes e investigadores e conhecimento que pode dar contributos no domínio da gestão curricular (Cochran Smith & Lytle, 1993).

As tarefas de natureza matemática integradas nos questionários inicial e final são constituídas por questões que focam diversos tópicos tratados na experiência de formação. O presente artigo centra-se em duas questões semelhantes que abordam situações de modelação envolvendo duas quantidades desconhecidas. Na figura 3 apresentam-se essas duas questões: a questão A, do questionário inicial, e a questão B, do questionário final.

Questão A	Questão B
<p>Dois amigos foram comprar material de escritório de que precisavam. Um dos amigos comprou duas pastas e dois conjuntos de marcadores, tendo gasto 8,5 euros. O</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>8.5€</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>10.25€</p> </div> </div> <p>Determine o preço de uma pasta e de um conjunto de marcadores. Explique como fez.</p>	<p>A Maria e a Raquel foram às compras. A Maria comprou um par de óculos e duas malas iguais por 64 euros. A Raquel gastou 101 euros na compra de produtos iguais aos da Maria mas em quantidade diferente, comprou dois pares de óculos e três malas iguais.</p> <div style="text-align: center; margin: 20px 0;">  </div> <p>Determine o preço de um par de óculos e de uma mala. Explique como fez.</p>

Quadro 1 – Tarefas matemáticas dos questionários

A recolha e análise de dados decorre, em parte, em simultâneo, de modo que o primeiro momento de análise assista a algumas das decisões a tomar relativamente a momentos seguintes de recolha de dados (Merriam, 1988). A análise tem em conta as estratégias usadas pelos participantes em situações que envolvem quantidades desconhecidas e informa sobre o contributo da abordagem exploratória no desenvolvimento do seu conhecimento sobre como promover a aprendizagem da Álgebra.



Resultados

A primeira questão de cada questionário solicita que “Escreva 5 palavras que associe ao ensino e à aprendizagem da Álgebra”. No questionário inicial, 45% dos formandos não responde e os que respondem referem doze palavras relacionadas com o tema Números e Operações, havendo apenas uma referência a “Raciocínio”, três a “Funções” e duas a “Equações”. No questionário final, todos os formandos respondem e as palavras indicadas estão em grande medida centradas na Álgebra, sendo, por exemplo, vinte e duas delas relativas ao raciocínio (“Raciocínio”, “Pensamento algébrico”...), vinte e uma a sequências (“Sequências”, “Termo Geral”...) e doze a conceitos diversos (“Incógnita”, “Funções”, “Sistemas”...). Estes resultados mostram uma alteração significativa do conhecimento dos formandos sobre o ensino aprendizagem da Álgebra. A experiência de formação contribui para clarificar aspetos que intervêm neste processo, sendo, nomeadamente, significativa a referência ao raciocínio e ao pensamento algébrico, bem como a vocabulário e a conceitos específicos do tema.

Questões de modelação matemática

Os resultados das respostas dos vinte participantes a ambas as questões A, sintetizados na tabela 1, mostram que há um maior número de formandos que apresenta uma resolução e determina uma solução adequada na questão B:

	Solução correta	Solução errada	Resolução incompleta e sem solução	Sem solução ou resolução
Questão A	5	1	2	12
Questão B	15	2	2	1

Tabela 1 – Respostas às questões matemáticas A e B

Na questão A, apenas quatro formandos justificam a sua resposta:

- Um descobre por tentativas os valores, sendo essas tentativas apoiadas na diferença de preços.
- Três resolvem a situações usando um sistema de equações de 1.º grau.

Na questão B, os quinze formandos indicam como obtiveram os valores pedidos usando representações pictóricas, a linguagem natural ou símbolos:

- Três resolvem o sistema de equações do 1.º grau (não são exatamente os mesmos três formandos que usaram sistemas de equações na questão A).
- Doze realizam estratégias próprias baseadas em relações que identificam entre as quantidades desconhecidas e as quantidades dadas, como é exemplo a resolução da Formanda 1:

= 165€

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 101 \\ +64 \\ \hline 165\text{€} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \\ 165 \\ -128 \\ \hline 37 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{3} \\ 64 \\ -37 \\ \hline 27 \end{array}$$

Figura 3 – Questionário inicial, Questão A, Formanda 1

Na questão A, Alice indica os valores corretos dos preços da pasta e do conjunto de marcadores, contudo não indica como procede para os determinar, escrevendo apenas o que se segue:

$$3\text{€ cada pasta} + 1,25 \text{ cada conjunto de marcadores}$$

Figura 4 – Questionário inicial, Questão A, Alice

Na entrevista, Alice esclarece que determina os valores por tentativas, procurando satisfazer as duas condições dadas e tendo iniciado a sua análise pela situação que envolvia três pastas e um conjunto de marcadores (pelo valor de 10,25 euros), como mostra o excerto:

Depois de ler [a resposta] já é mais fácil, mas primeiro que eu chegasse aqui não. Eu fiz o raciocínio pelo que tem mais pastas, porque é mais difícil adivinhar o que falta do que... Para mim pelo menos. Então fui fazendo experiências. Se é dez e se cada um [cada pasta] for a três... Mas isto não foi o meu primeiro raciocínio fiz muitos só que depois é que esqueci. Se for três, três vezes três dá nove. Está perto de dez e vinte e cinco. Isto nunca pode ser mais do que qualquer um destes. Então nove para dez e vinte e cinco dá um euro e vinte e cinco, então era o preço daquilo [de um conjunto de marcadores]. Mas não foi este o meu primeiro raciocínio.

Entrevista 1, Questão A, Alice

Alice refere ter obtido este valor para o preço de uma pasta após ter testado os valores de 1€ e 2€, verificando que não satisfazem a condição. Na entrevista, verifica ainda a validade dos valores referidos, 3€ e 1,25€, na outra condição, mostrando não estar muito segura de que esses valores respeitam à solução final do problema. Confirma que com estes valores obtém um custo total de 8,5€, comprando duas pastas e dois conjuntos de marcadores e valida a resposta dada no questionário. Alice reconhece que descobre os dois valores por tentativas apenas com base numa das condições.

Na questão B, Alice determina corretamente um dos valores desconhecidos e apresenta o modo como procedeu. Realiza diversas operações de acordo com as relações que estabelece entre os dados do problema, indicando o significado dos valores que vai obtendo:

$$\begin{array}{r} 101 \\ -64 \\ \hline 37 \end{array} \text{€} \rightarrow \text{preço de 1 par de óculos e uma mala}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ -37 \\ \hline 64 \end{array} \rightarrow \text{preço de 1 par de óculos e 2 malas}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -37 \\ \hline 27 \end{array} \rightarrow \text{preço de uma mala}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ -27 \\ \hline 37 \end{array} \rightarrow \text{preço de 1 par de óculos}$$

Figura 5 – Questionário final, Questão B, Alice

Alice verifica que a diferença entre as quantidades de produtos que Maria e Raquel compram é de apenas um produto de cada um dos dois tipos. Assim, determina a diferença de valor gasto que equivale ao preço de um par de óculos e ao preço de uma mala. Retira duas vezes esse valor, 37€ ao valor total gasto por Raquel, obtendo o preço de uma mala. Contudo, no final não consegue proceder de modo a determinar o preço de um par de óculos, indicando um valor incorreto. Na entrevista, reconhece que em determinado momento pode não ter conseguido dar uma continuidade adequada à estratégia que estava a seguir:



Tentei seguir um raciocínio mas depois às tantas acho que me perdi. Não sei se consegui e agora já não sei se me lembro mas vou tentar... Eu não sei se troquei os valores se não é nada disto. Eu já não sei, eu nesta altura já estava baralhada.

Entrevista 3, Questão B, Alice

Esclarece, de seguida, porque realizou cada uma das operações apresentadas, refazendo o seu raciocínio e identificando o significado de cada um dos valores usados e obtidos. Quando refaz o último passo, reconhece que o significado do valor que obtém de 37€ não respeita ao preço de um par de óculos e corrige a sua resposta:

Alice (A): Então já me estou a sentir melhor! E depois o que é que eu fiz? Depois fui pegar o preço outra vez de um par de óculos e de duas malas e tirei o preço de uma mala então fiquei a saber... Ah isto está mal. Ah, eu já estou baralhada. Depois fui buscar o preço de um par de óculos e duas malas e tirei o preço de uma mala. Então fiquei a saber o valor de um par de óculos e uma mala.

Investigadora (I): Sim.

A: E isto está tudo mal [referindo-se a $64 - 27 = 37$ e à indicação do significado deste valor].

I: Então o que é que lhe faltava fazer?

A: Um par de óculos e uma mala... Pois, ah! Agora tenho de saber quanto é que custa um e quanto é que custa o outro.

I: A mala já sabe, tem aqui.

A: Pois.

I: Só precisava de saber agora o preço de um par de óculos.

A: Então... Não, não. O preço de um par de óculos e uma mala [referindo-se ao que representa o valor 37€]. A este [aponta para 37€], tirava este [aponta para 27€].

Entrevista 3, Questão B, Alice

No questionário inicial são poucos os formandos que determinam a solução da situação apresentada e que descrevem como o fizeram. No questionário final, a grande maioria faz uma interpretação adequada do problema e estabelece relações entre as quantidades dadas e as quantidades desconhecidas, conseguindo concretizar uma estratégia de resolução. Os formandos realizam representações pictóricas, fazem descrições e usam símbolos matemáticos. Poucos recorrem à utilização da linguagem e de procedimento algébricos para resolver a situação.



A análise de respostas de alunos na experiência de formação

A Tarefa 2 propõe a análise de resoluções de alunos do 6.º ano de escolaridade ao problema das galinhas que envolve quantidades desconhecidas. Antes de proceder à análise das resoluções dos alunos, os formandos procuram compreender o problema e resolvê-lo pelas suas próprias estratégias. Neste momento, surgem diferentes abordagens ao problema que são discutidas em sala de aula, possibilitando aos formandos partilharem e justificarem as suas estratégias. Alguns formandos usam letras para representar as quantidades desconhecidas e escrevem equações para representar cada uma das situações apresentadas nas balanças. A resolução do sistema de equações é discutida com a turma a partir da resolução de um formando, que clarifica o significado das letras e das expressões usadas. A análise das respostas dos alunos contribui para uma compreensão do problema e das relações envolvidas. Além do desafio da resolução do problema das galinhas, também a análise das respostas dos alunos constitui um desafio pois os formandos sentem necessidade de abandonar a sua própria interpretação e estratégia de resolução para interpretar a estratégia apresentada por outros.

Na segunda entrevista, os participantes recordam o trabalho desenvolvido durante a experiência de formação até esse momento, referindo o contributo para a sua aprendizagem. Relativamente à Tarefa 2, Alice refere ter tido alguma dificuldade em resolver a situação e admite ter ficado impressionada com diversidade de abordagens e de representações apresentadas por alunos do 6.º ano de escolaridade. Quando questionada sobre o que aprendeu com as estratégias que analisou nessa tarefa e que surgiram na sua discussão, salienta ter usados estratégias semelhantes noutras situações:

Eu lembro-me que depois de ver esta ficha e a forma como um dos alunos tinha resolvido uma situação, numa ficha seguinte, já não sei qual foi, sei que resolvi o problema tendo em conta o raciocínio do aluno, e foi através do raciocínio desta ficha.

Entrevista 2, Alice

A maioria dos formandos, quando analisam o enunciado do problema das galinhas, ainda antes de analisar as respostas dos alunos, resolve o problema usando estratégias próprias. Alguns revelam dificuldades em iniciar a resolução do problema pelo que começam a analisar as respostas dos alunos, o que os ajuda a compreender o problema e a delinear uma estratégia para o resolver. A análise de diferentes resoluções e representações contribui para que os formandos melhorem a sua capacidade de interpretar situações que envolvem quantidades

desconhecidas e a sua capacidade de procurar regularidades e relações entre as quantidades desconhecidas. A resolução desta tarefa proporciona aos formandos a análise de processos usados pelos alunos, atendendo não apenas ao resultado mas também ao raciocínio por eles usado, bem como a raciocínios que os formandos partilham na sala de aula. Esta análise global dos raciocínios permite a identificação de relações entre objetos que podem ser estabelecidas de um modo semelhante noutras situações.

Reflexão sobre uma abordagem de ensino

Durante a experiência de ensino, os formandos reconhecem a importância da discussão de diferentes estratégias para resolver um problema e sobre a utilização da linguagem algébrica, partindo quer de diferentes resoluções que surgem na sala de aula quer da análise de respostas dos alunos. A Tarefa 2 promove a reflexão relativamente à abordagem de ensino seguida pela professora que é partilhada pelos formandos na discussão na sala:

Quanto ao uso de variáveis, julgo que este tipo de enunciações é bastante bom, pois como podemos verificar houve crianças que as usaram, explicando em seguida aos colegas de turma o raciocínio e porque as usaram. Apartir daqui a professora pode incentivar o uso destas, o que passa a acontecer de um modo natural.

Figura 6 – Tarefa 2, Formanda 1

É importante que se aposte neste tipo de problemas, pois os alunos ao discutirem os resultados e resoluções com os seus colegas têm a oportunidade de aprender e aprender novas estratégias.

Figura 7 – Tarefa 2, Formanda 15

O facto dos alunos exporem os seus raciocínios, facilitou que outras colegas, com mais dificuldades, fossem tomando contacto com esses raciocínios. Também o facto da professora dar mais valor à linha de pensamento e raciocínio do que aos resultados também facilitou para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Figura 8 – Tarefa 2, Alice



Estas situações, que envolvem quantidades desconhecidas e que possibilitam o surgimento da linguagem algébrica, são valorizadas pelos formandos uma vez que dão ênfase à explicitação do raciocínio dos alunos e promovem a utilização e análise de diferentes tipos de representação matemática, potenciando o desenvolvimento da sua capacidade de generalização e de usar e dar significado à linguagem algébrica.

Conclusões

A exploração e discussão, na experiência de formação, de situações que envolvem quantidades desconhecidas possibilita a utilização de linguagem de modelação matemática e a análise de estratégias informais nas quais os formandos estabelecem relações lineares e atribuem significado, de acordo com o problema, às diferentes operações que efetuam, associando o processo que seguem à determinação das quantidades desconhecidas. A diferença entre o número de formandos que respondem à questão matemática no questionário inicial e final é muito significativa. No questionário final, relativamente ao inicial, outros formandos resolvem a situação por meio de um sistema de equações e os restantes, apesar de não utilizarem toda a linguagem algébrica, recorrem a estratégias que têm por base o estabelecimento de relações, revelando capacidade de generalização (Kaput, 2008). Um aspeto que também contribui para a compreensão deste tipo de situações por parte dos formandos é a análise de produções de alunos, tal como refere Alice, quando refere que estes usam diferentes abordagens ao mesmo problema e recorrem à utilização de símbolos para representar quantidades desconhecidas, dando significado a esses símbolos nesse contexto. A experiência de formação proporciona o desenvolvimento do conhecimento matemático dos formandos e do seu conhecimento didático (Ponte & Chapman, 2008). A análise do percurso de aprendizagem dos alunos do 6.º ano permite-lhes perspetivar o trabalho que podem desenvolver com os seus alunos, as dificuldades que estes podem manifestar e também como estes desenvolvem a sua compreensão. A discussão da abordagem de ensino seguida pela professora proporciona a reflexão sobre aspetos essenciais da prática letiva relativos à dinâmica da aula e à ênfase no processo, mais que no resultado, como os formandos identificam. A natureza exploratória da experiência de formação privilegia a partilha de estratégias por parte dos formandos e a sua participação numa discussão fundamentada sobre o conhecimento matemático abordado e o possível trabalho a desenvolver com os alunos dos primeiros anos. Tudo isto sugere que, de facto, esta experiência de análise e reflexão sobre situações de ensino-aprendizagem contribui para a



aprendizagem dos formandos sobre o ensino da Álgebra (Doer, 2004) e o modo de envolver os seus futuros alunos em situações que promovem o desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Nota: Trabalho desenvolvido no âmbito da Bolsa de Investigação da Fundação para a Ciência e a Tecnologia (SFRH/BD/45083/2008) e apoiado pelo Projecto PPPM – Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (PTDC/CPE-CED/098931/2008).



Referências bibliográficas

- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). A Matemática na formação inicial de professores. Lisboa: APM e SPCE.
- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 16(1), 27-55.
- Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis F., & Confrey, J. (2007). Early algebra. In V. J. Katz (Eds.), *Algebra: Gateway to an technological future. MAA Report* (pp. 7-14). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM e IAP.
- CBMS (2001). The mathematical education of teachers. Providence, RI and Washington, DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- Cochran-Smith, M., & Lytle, S. (1993). *Inside/outside: Teacher research and knowledge*. New York, NY: Teachers College Press.
- Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell, MA: Kluwer.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.
- Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA*, 25, 105-132.



- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.
- Reeves, C. A. (2000). *The chicken problem*. *Mathematics teaching in the middle school*, 5(6), 398-402.
- Santos, M., & Oliveira, H. (2008). Generalização de padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade. In R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 461-464). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.
- Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.
- Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 73-96). Norwell: Klumer.



Notas

¹ Trajetória de aprendizagem e resoluções dos alunos apresentadas em Reeves (2000).