nº especial

Desenvolvimento Curricular e Didáctica

# Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução

**Fátima Mendes**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

fatima.mendes@ese.ips.pt

**Joana Brocardo**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

joana.brocardo@ese.ips.pt

**Hélia Oliveira**

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

hmoliveira@ie.ul.pt

**Resumo:** Apresentamos e discutimos resultados preliminares relativos à caracterização e evolução dos procedimentos de alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas de multiplicação. Estes inserem-se numa investigação que pretende compreender como os alunos desenvolvem o sentido de número, nos aspetos associados à multiplicação, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem. A análise das produções dos alunos e episódios relativos às discussões coletivas revela grande diversidade de procedimentos. Evidencia também a sua evolução, verificando-se, em certos casos, o retorno a procedimentos menos potentes, associado a particularidades das tarefas.

**Palavras-chave:** Sentido de número; Aprendizagem da multiplicação; Trajetória de aprendizagem; Procedimentos dos alunos.

**Abstract:** We present and discuss preliminary results that focus on the characterization and evolution of pupils' procedures, in the 3rd grade, when exploring multiplication tasks. These results are part of a research project whose main objective is to understand how pupils develop the sense of number, in relation to multiplication, in the context of a learning trajectory. The analysis of the pupils' written productions and of episodes from class discussions reveals the use of a diversity of procedures. It also shows pupils' evolution; nevertheless, in some cases there was a certain degree of regression related to particularities of the tasks.

**Keywords:** Sense of number; Learning of multiplication; Learning trajectory; Multiplication procedures.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

**Résumé:** Nous présentons et discutons des résultats préliminaires sur la caractérisation et l'évolution des procédures d'élèves de 3ème année de scolarité dans la résolution des taches de multiplication. Cette analyse fait partie d'une recherche sur le développement chez les élèves de la notion de nombre associée à la multiplication. L´analyse des productions des élèves et de leurs interactions révèle que les enfants utilisent un large répertoire de procédures. L'analyse met encore en évidence l'évolution des élèves, laquelle, dans certains cas, révèle le retour à des procédures moins puissantes, associée à la nature des tâches.

**Mot-clé:** Notion de nombre; Apprentissage de la multiplication; trajectoire d'apprentissage; Procédures des élèves.

## Introdução

Documentos internacionais de referência, como os publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* em 1991 e 2007, realçam o desenvolvimento do sentido de número dos alunos como a principal finalidade do tema Números e Operações, no currículo de Matemática nos primeiros anos. Em Portugal, autores como Brocardo & Serrazina (2008) mencionam, igualmente, a importância de pensar os números e as operações no currículo em termos de sentido de número.

Em consonância com estas ideias o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007) apresenta uma perspetiva diferente sobre a aprendizagem dos Números e Operações, quando comparada com a de programas anteriores, assumindo a importância do desenvolvimento do sentido de número (Ponte, 2008). É referido que *"o seu estudo [dos números e operações] tem por base três ideias fundamentais: promover a compreensão dos números e operações, desenvolver o sentido de número e desenvolver a fluência de cálculo"* (Ponte *et al*., 2007, p. 7).

Desenvolver o sentido de número e, em particular, os aspetos ligados à multiplicação, surge associado à construção de uma trajetória de aprendizagem (Simon, 1995). De modo a construir trajetórias de aprendizagem que permitam a evolução das ideias matemáticas dos alunos é essencial analisar as suas produções, caracterizando os procedimentos e a sua evolução. A compreensão sobre o modo como os alunos evoluem dá-nos informação sobre o seu entendimento acerca da multiplicação, uma vez que *"as estratégias dos alunos são sempre representativas das suas ideias matemáticas"* (Dolk, 2008, p. 51).

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

A caracterização e a evolução dos procedimentos dos alunos são as vertentes sobre as quais incide este artigo, e que também fazem parte de uma investigação mais vasta cujo propósito é compreender o modo como os alunos desenvolvem o seu sentido de número, em particular nos aspetos relacionados com a operação multiplicação, no contexto de uma trajetória de aprendizagem.

## Contextualização Teórica

A partir dos anos 90 do séc. XX as investigações no âmbito da aprendizagem das operações aritméticas são realizadas, sobretudo, na sala de aula. Este facto relaciona-se com mudanças ao nível do quadro teórico sobre a aprendizagem, influenciadas por contextos sociais e culturais, e com as finalidades dos estudos, associadas ao desenvolvimento curricular (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007).

No caso concreto da multiplicação, destacam-se estudos empíricos associados a tipos semânticos de situações (Greer, 1992) e a modelos intuitivos (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Há também investigações que relacionam as estratégias de cálculo usadas pelos alunos com o tipo de problemas propostos e outras que caracterizam as estratégias inventadas pelos alunos na resolução de problemas (Baek, 2006; Fuson, 2003; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999). Contudo, diversos autores afirmam que a investigação sobre a aprendizagem da multiplicação tem sido menor quando comparada com a investigação sobre outras operações aritméticas (Fuson, 2003; Verschaffel *et al.*, 2007).

Diversos estudos têm caracterizado as estratégias de cálculo usadas pelos alunos (Fuson, 2003; Hartnett, 2007). Uma das categorizações mais abrangentes, por ser válida para todas as operações, considera as seguintes categorias: contar para a frente e para trás, ajustar e compensar, usar os dobros e/ou as metades, usar partições dos números e usar o valor de posição (Hartnett, 2007). O modo como se abordam as estratégias de cálculo mental na aula tem sido, também, objeto de vários estudos, não havendo, contudo, consenso entre eles. Há autores que defendem o ensino de determinadas estratégias e outros que investem na construção/invenção de estratégias pelos alunos a partir da resolução de problemas com características particulares (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Anghileri, 2003; Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Heirdsfield et al., 1999).

Seguindo a perspetiva que os alunos inventam as suas estratégias para resolver determinados problemas, há autores que defendem que a sua compreensão da

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

multiplicação evolui quando são colocados perante contextos que fazem emergir aspetos fundamentais: as ideias, as estratégias e os modelos (Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008). Essa evolução relaciona-se, também, com o modo como são promovidas a discussão e a reflexão sobre as resoluções das tarefas. No início da aprendizagem da multiplicação, os alunos começam por resolver problemas através da contagem por grupos, usando adições repetidas e recorrendo depois a factos multiplicativos conhecidos, evoluindo no cálculo à medida que o conceito de multiplicação se vai construindo e se demarca da adição (Treffers & Buys, 2008).

As estratégias que os alunos usam estão relacionadas com o seu sentido de número, uma vez que o seu grau de sofisticação depende de este estar mais ou menos desenvolvido (Ell, 2001). O significado e o uso do termo estratégia, e a sua coincidência, ou não, com o termo procedimento, têm sido objeto de algumas discussões teóricas, não havendo consenso (Ell, 2001; Fosnot, 2007; Fuson, 2003; Threlfall, 2002). Neste estudo distinguimos estratégia de procedimento: estratégia diz respeito à modelação; os procedimentos dizem respeito às operações de cálculo. Mais precisamente, consideramos que os procedimentos dos alunos são a forma como manipulam os números e que as estratégias determinam a estrutura matemática destas manipulações.

## Metodologia

Considerando os seus objetivos e a sua natureza, a presente investigação segue uma metodologia com uma abordagem qualitativa de cariz interpretativo (Denzin & Lincoln, 2008; Erickson, 1986; Merrian, 1991). Tem por base uma experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006) realizada numa turma do 3.º ano de escolaridade, com 23 alunos, com a duração de um ano letivo.

A fonte direta dos dados é a aula e o principal instrumento de recolha é a investigadora, através da observação detalhada do ambiente natural (Merrian, 1991; Yin, 1995). Os dados são descritivos, incluindo notas de campo, transcrição de episódios de aulas videogravadas e produções dos alunos. A sua análise realiza-se indutivamente, partindo de situações particulares, apesar de se definirem, à partida, algumas categorias decorrentes da literatura.

A experiência de ensino tem subjacente a construção e exploração de uma trajetória de aprendizagem da multiplicação, que foi pensada de acordo com uma perspetiva de aprendizagem da Matemática com compreensão (NCTM, 2007). Esta perspetiva integra as interações sociais, para além de aspetos individuais

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

da aprendizagem e implica a construção de uma cultura de sala de aula onde, a par das práticas matemáticas, se investe no estabelecimento de normas sociais e normas sociomatemáticas, segundo Cobb, Stephan, McClain e Gravemeijer (2001).

Foram construídas e implementadas onze sequências de tarefas de multiplicação (e de divisão[1]), considerando os objetivos de aprendizagem, as hipóteses de aprendizagem dos alunos e a cultura de sala de aula estabelecida (Clements & Sarama, 2004; Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). A sua construção tem como referência os marcos de aprendizagem preconizados por Fosnot & Dolk (2001) e Treffers & Buys (2008) para a multiplicação: as ideias matemáticas, as estratégias e os modelos associados a esta operação.

A trajetória de aprendizagem foi sendo adaptada, num processo contínuo e cíclico, dada a sua natureza hipotética e os fatores imprevisíveis que surgem na aula (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). As tarefas foram continuamente ajustadas, em conjunto pela investigadora (primeira autora deste artigo) e pela professora, considerando a sua exploração na aula e os procedimentos dos alunos.

A inventariação e caracterização dos procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das tarefas propostas foram realizadas a partir da análise dos seus registos escritos. A opção por recorrer apenas aos registos escritos dos alunos como evidência empírica prende-se com o facto de considerarmos que estes permitem obter uma visão global sobre os procedimentos, traduzindo o seu modo de raciocinar sobre os problemas.

O aprofundamento da análise da evolução dos procedimentos é efetuado considerando também as interações na aula, implicando um olhar cíclico sobre os dados, identificando categorias emergentes, para além das decorrentes da literatura, e a estrutura adequada para o relatório de análise.

Ao proceder à análise dos procedimentos dos alunos e da sua evolução, as tarefas foram agrupadas, considerando as suas características gerais. A tabela seguinte discrimina a organização das tarefas e subtarefas em cada grupo.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

| | | |
|---|---|---|
| **Tarefas de multiplicação com números naturais** | Tarefa1 - Mercearia da Piedade 1 | Subtarefa 1 e 2 |
| | Tarefa1 - Mercearia da Piedade 2 | Subtarefa 1 |
| | Tarefa 4 - Carteiras de cromos | Subtarefa 1, 2 e 3 |
| | Tarefa 7 - Cortinas | Subtarefa 1, 2,3 e 4 |
| | Tarefa - Pátio do João | Subtarefa 1, 2,3 e 4 |
| | Tarefa 8 B - Pátio do Cristóvão | Subtarefa 1, 2,3 e 4 |
| | Tarefa 10 - Pilhas de caixas | Subtarefa 1, 2 e 3 |
| **Tarefas de multiplicação com números na representação decimal** | Tarefa 13 - Garrafas e mais garrafas | Subtarefa 1, 2,3 e 4 |
| | Tarefa 16 - Contar moedas 1 | Subtarefa 1 |
| | Tarefa 17 - Contar moedas 2 | Subtarefa 4,5 e 6 |
| **Tarefas de divisão com números naturais** | Tarefa 19 - Coleccionar cartas | Subtarefa 1 e 2 |
| | Tarefa 20 - Máquinas de bebidas | Subtarefa 1 e 2 |
| | Tarefa 25 - Outra máquina de bebidas | Subtarefa 1 |
| | Tarefa 26 - Miniaturas de animais | Subtarefa 1 |
| **Tarefas de multiplicação (sentido proporcional) com números na representação decimal** | Tarefa 29 - Ida ao teatro | Subtarefa 1, 2 e 3 |
| | Tarefa 30 - Ida à mercearia da Piedade | Subtarefa 1, 2 e 3 |

**Tabela 1 –** Organização das tarefas de acordo com as suas características

Além disso, foram quantificados todos os procedimentos utilizados, através de tabelas, em cada tarefa e subtarefa da experiência de ensino.

## Resultados

Os alunos da turma do 3.º ano recorrem a procedimentos muito diversificados quando resolvem tarefas de multiplicação. Estes foram inventariados e agrupados em categorias globais de procedimentos: de contagem, aditivos, subtrativos e multiplicativos. Em cada uma destas categorias foram identificados e caracterizados procedimentos específicos, que se organizam na tabela seguinte.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

| Categorias de procedimentos | Procedimentos específicos |
|---|---|
| Procedimentos de contagem | Contar por "saltos" |
| Procedimentos aditivos | Adicionar sucessivamente<br>Adicionar dois a dois<br>Calcular em coluna |
| Procedimentos subtractivos | Subtrair sucessivamente |
| Procedimentos multiplicativos | Usar produtos conhecidos com números de referência<br>Usar relações de dobro<br>Usar múltiplos de 5 e de 10<br>Recorrer à decomposição decimal de um dos factores<br>Recorrer a uma decomposição não decimal de um dos factores<br>Usar múltiplos de 10 e compensar<br>Usar relações de dobro e de metade<br>Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência<br>Calcular em coluna |

**Tabela 2 –** Procedimentos usados pelos alunos na resolução das tarefas

A evolução dos procedimentos dos alunos foi evidenciada a partir da análise transversal dos procedimentos utilizados ao longo da experiência de ensino, em articulação com a sua quantificação em cada tarefa. Há, contudo, alguns aspetos a destacar. Um primeiro aspeto refere-se ao facto de um mesmo aluno usar vários procedimentos para realizar um cálculo. Um segundo aspeto relaciona-se com a frequência na utilização de determinados procedimentos e, um terceiro refere-se à preferência de alguns alunos por determinados procedimentos.

Numa primeira fase da experiência de ensino, muitos dos alunos apresentaram mais do que um modo de resolução numa mesma tarefa. Este facto, que se tornou mais raro com o tempo, parece estar fortemente ligado à sua falta de segurança no uso de procedimentos multiplicativos, optando, frequentemente, por apresentar um cálculo multiplicativo seguido da sua concretização em termos aditivos. Parecem, também, ser levados a apresentar mais do que uma solução 'imitando' a professora uma vez que, nas discussões coletivas, esta registava no quadro as várias soluções

nº especial



dos alunos. Além disso, tal como exemplificamos com a tarefa 7 – Cortinas, onde é necessário calcular o número total de flores , os alunos pareciam ter gosto em mostrar que conseguiam efetuar o mesmo cálculo de várias maneiras.

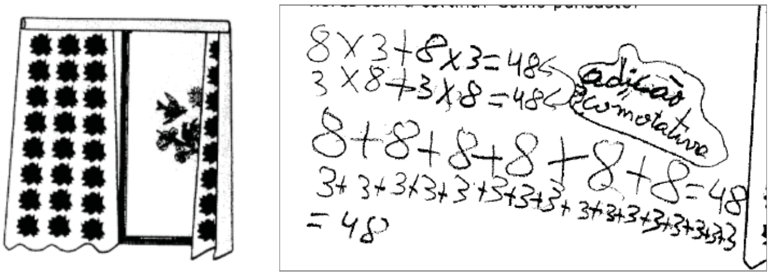


**Figura 1 –** Resolução de Cristóvão da subtarefa 2 – tarefa 7

A resolução de Cristóvão inclui dois tipos diferentes de procedimentos: o recurso a decomposições não decimais de um dos fatores da multiplicação a efetuar (8x6 ou 6x8, conforme o que se repete) e procedimentos do tipo aditivo, alterando a parcela que se repete.

Noutras situações, os alunos efetuaram um determinado cálculo usando o procedimento sugerido pela primeira representação, sendo as representações seguintes apenas uma forma de mostrar que o problema pode ser resolvido de outras maneiras. A primeira expressão representada parece traduzir, efetivamente, o modo de raciocinar dos alunos. Apresentamos o exemplo de Mariana, a propósito da tarefa 2 – Mercearia da Piedade 2, na qual é necessário saber quanto custam 10 sacos de maçãs, a 5€ cada.

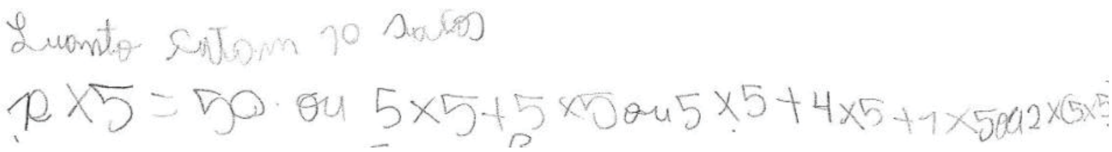

**Figura 2 –** Resolução de Mariana de parte da tarefa 2

Mariana começa por escrever a igualdade 10×5=50, que parece corresponder à sua forma de pensar. Depois regista outras expressões que sabe corresponderem ao mesmo produto, tal como já tinha visto a professora fazer no quadro, a propósito das discussões coletivas.

A apresentação de vários procedimentos num mesmo problema vai rareando

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

ao longo da experiência de ensino, pois os alunos compreendem que o que se pretende é resolver cada um da maneira que considerem mais adequada.

Um segundo aspeto revelado pela análise está relacionado com a frequência de utilização de determinados procedimentos – há os que são usados frequentemente pelos alunos e outros que o são muito raramente. Destacam-se, pela sua elevada frequência, os procedimentos aditivos, o recurso a produtos conhecidos e os procedimentos multiplicativos com base na decomposição decimal de um dos fatores. Pela sua baixa frequência, sobressai o uso de relações de dobro e de metade, a que os alunos raramente recorrem.

Na resolução das primeiras tarefas da experiência de ensino (tabela 1), predominam os procedimentos aditivos, que são menos usados nas seguintes, para surgirem, novamente, nas últimas tarefas. Uma das razões para a elevada frequência destes procedimentos nas tarefas iniciais parece estar relacionada com o facto de os alunos terem confiança no seu uso. Além disso, a grandeza dos números envolvidos, cujo produto é inferior a 100, não revela ainda a ineficácia dos procedimentos aditivos, que prevalecem durante algum tempo. Contudo, na resolução de tarefas associadas à disposição retangular, em particular, emergem e parecem consolidar-se procedimentos multiplicativos baseados nas propriedades da multiplicação.

A resolução das tarefas de multiplicação, no seu sentido proporcional, com números na representação decimal, evidencia o retorno aos procedimentos aditivos, por parte dos alunos, com bastante frequência. De facto, num dos problemas da tarefa 29 – Ida ao teatro, para calcular o preço de 24 bilhetes de teatro, dado o preço unitário, todos os alunos que a resolvem recorrem a um procedimento aditivo, exceto um par. Também na tarefa 30 – Ida à mercearia da Piedade, mais de metade dos alunos recorre a procedimentos aditivos. Uma das razões para este facto parece relacionar-se com o facto de os dados estarem organizados em tabelas, sugerindo "composições" e "decomposições" através da adição. Além disso, os cálculos passam a incluir números racionais representados na forma decimal, o que constitui uma dificuldade para os alunos.

Os alunos recorrem, também frequentemente, a produtos conhecidos. Em muitas das tarefas iniciais os produtos envolvidos são do domínio das tabuadas, já automatizadas por eles, pelo que não necessitam efetuar quaisquer cálculos.

Para além dos procedimentos identificados, durante toda a experiência de ensino, os alunos recorrem muitas vezes à decomposição, decimal ou outra, de um dos fatores.

Apresentamos o exemplo da tarefa 10 – Pilhas de caixas, em que vários alunos utilizam este tipo de procedimento para determinar o total de maçãs existente em 25 caixas com 48 maçãs cada. Para calcular 25×48, Enzo e Francisco usam a decomposição decimal do número 48:

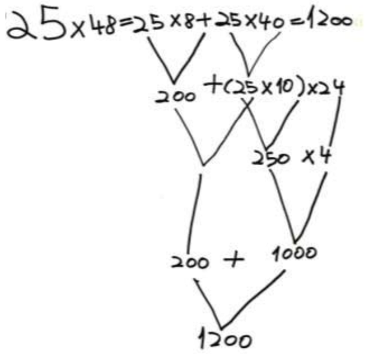


**Figura 3 –** Resolução de Enzo e Francisco da subtarefa 2 – Tarefa 10

Ainda nessa tarefa, Cristóvão e Hugo recorrem também a um procedimento de decomposição, diferente do anterior e sugerido pela disposição das caixas na figura que acompanha a tarefa (fig. 4). Deste modo apoiam-se na visualização da figura e dão-lhe significado. Usam três produtos parciais que correspondem à decomposição de 25 em 12+10+3. O produto 12×48 corresponde ao total de maçãs das duas filas de caixas inferiores, 10×48 equivale ao total de maçãs das duas filas seguintes e, finalmente, 3×48 corresponde ao total de maçãs existente na fila superior. Para determinarem os produtos parciais, os alunos usam a decomposição decimal que mais lhes facilita os cálculos.

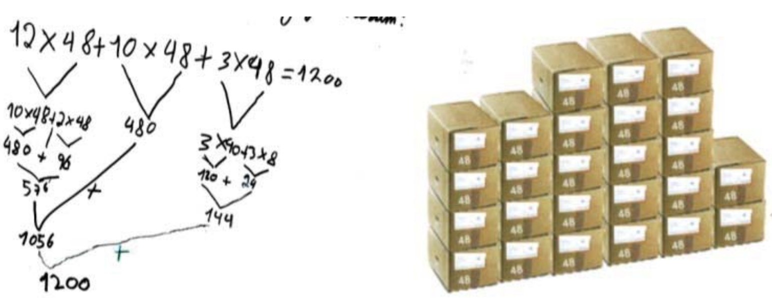


**Figura 4 –** Resolução de Cristóvão e Hugo da subtarefa 2 – tarefa 10

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

Além dos procedimentos já referidos, que se destacam pela sua maior frequência, há também os que são usados raramente. O procedimento *usar relações de dobro e de metade* é um a que os alunos menos recorrem, mesmo que o contexto e os números da tarefa proposta o sugiram.

Apresentamos uma parte da resolução de Duarte e Tiago da tarefa 13 – Garrafas e mais garrafas, onde se pretendia saber o número total de garrafas de 0,5l necessário para perfazer 30 litros de água, após ter-se determinado que 30 garrafas de 1l têm um total de 30 litros. Para calcular o número total de garrafas, foi relacionada a expressão 60×0,5l com o produto 30×1l=30l, pois os alunos justificam a sua resposta referindo o dobro de 30 e a metade de um litro.

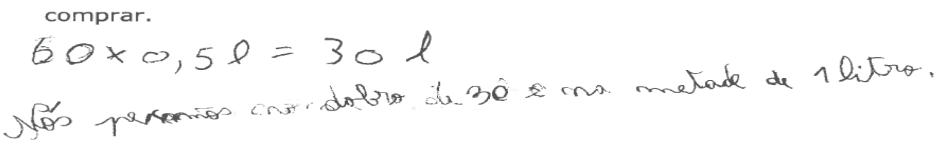


**Figura 5 – Resolução de Duarte e Tiago da subtarefa 3 – Tarefa 13**

Finalmente, um terceiro aspeto revelado, refere-se à preferência de alguns alunos por determinados procedimentos. Efetivamente, apesar da multiplicidade de procedimentos evidenciada pela turma em geral e da evolução manifestada, há alguns alunos que preferem um particular, mesmo quando este não se revele o mais adequado perante um dado problema.

Ana Rita e Miguel utilizam frequentemente o procedimento *multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência* nas tarefas de divisão propostas, mesmo quando os colegas já evoluíram para outros mais potentes e rápidos. Na tarefa 20 – Máquinas de bebidas, é preciso calcular o número de garrafas de cada tipo de sumo para encher uma máquina com 156 garrafas, sabendo que há 6 tipos de sumo diferentes. O par começa pelo produto de referência 6×6 até ao cálculo 6×11, saltando para 20×6 e calculando sucessivamente até 26×6.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

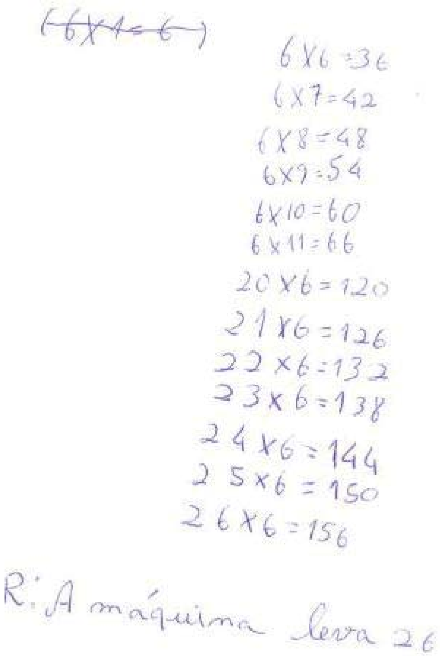


**Figura 6 –** Resolução de Ana Rita e Miguel da subtarefa 2 – tarefa 20

Posteriormente, Ana Rita e Miguel recorrem ao mesmo procedimento na tarefa 26 – Miniaturas de animais, uma outra situação de divisão, onde é preciso saber como repartir igualmente 256 miniaturas de animais por 8 crianças.

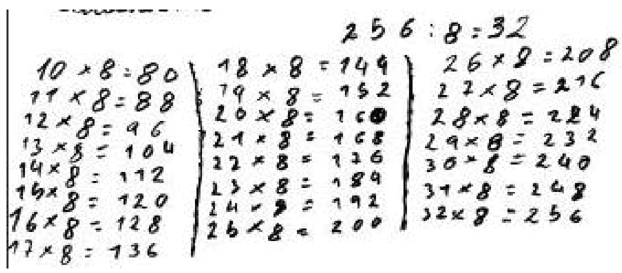


**Figura 7 –** Resolução de Ana Rita e Miguel de uma parte da tarefa 26

Neste caso, começam pelo produto de referência 10×8=80 e calculam sistematicamente todos os múltiplos de 8 até 32×8=256, encontrando a solução. Este par revela apetência para escolher este procedimento, sentindo confiança no

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

seu uso, uma vez que o mesmo se mostrou eficaz em resoluções anteriores. Por isso, durante algum tempo, não sentem necessidade de o alterar, refinar ou substituir por outro. O procedimento usado é explicitado na discussão coletiva à volta da tarefa.

> Ana Rita – Nós vimos que tínhamos de fazer 256:8 [...]. Como ainda não sabíamos o resultado [quociente da divisão], fizemos por multiplicações.
>
> Professora – Os outros grupos também pensaram assim mas fizeram de maneira diferente. Ora, continuem a explicar.
>
> Ana Rita – Nós também tentámos [...] mas não conseguimos [...].
>
> Professora – Mas expliquem lá a vossa maneira.
>
> Ana Rita – Nós fomos fazendo a tabuada toda até ao 32.
>
> Guilherme – Mas como é que sabiam que parava aí? Quantas vezes fizeram a tabuada?
>
> Ana Rita – Sabíamos porque 32×8 é 256, o número das miniaturas.
>
> Professora – E é fácil fazer desta maneira?
>
> Ana Rita – Mais ou menos.
>
> Professora – E porquê mais ou menos?
>
> Ana Rita – Por causa de demorar algum tempo e quem não sabe a tabuada pode enganar-se.
>
> Professora – E como podiam fazer de maneira mais rápida e sem se enganarem?
>
> Ana Rita – Passar logo de 10 vezes para 20 e depois para 30 vezes.

Ana Rita fundamenta o seu modo de pensar evidenciando que reconhece ser um problema de divisão e explicitando a sua opção por um procedimento de multiplicação, uma vez que ainda não conhece procedimentos associados à divisão. Um colega, Guilherme, coloca-lhe uma questão sobre “saber quando parar”, à qual responde, mostrando compreender o procedimento que usou. Interpelada pela professora, consegue identificar os riscos do seu uso e parece avançar para um procedimento do mesmo tipo, mais eficaz, recorrendo a fatores múltiplos de 10.

Os aspetos apresentados anteriormente e, globalmente, a evolução dos procedimentos dos alunos não são independentes do modo como foram organizadas as discussões coletivas acerca da resolução das tarefas. Os dados

nº especial

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

analisados evidenciam a importância dessas discussões e, em particular, a explicitação e justificação dos raciocínios dos alunos, na evolução dos seus procedimentos, tal como exemplificámos no episódio centrado na resolução de Ana Rita e Miguel. Efetivamente, a progressão dos alunos parece, também, estar associada à cultura de sala de aula que foi sendo construída pela professora, onde coexistiram momentos de trabalho individual ou a pares com momentos de discussão coletiva. Nestas, a orquestração pela professora foi essencial, centrando-as nas relações e nas propriedades da multiplicação e estabelecendo pontes com tarefas anteriores.

A evolução dos procedimentos não é, ainda assim, linear nem se manifesta do mesmo modo em todos os alunos. Alguns persistem mais tempo em determinados procedimentos, o que parece relacionar-se com características particulares das tarefas, como o contexto e o tipo e grandeza dos números envolvidos.

Os problemas com um contexto de divisão, particularmente, parecem ter provocado, em alguns alunos, o regresso a procedimentos menos potentes, quando já recorriam, com facilidade, a procedimentos baseados nas propriedades da multiplicação, uma vez que as tarefas de divisão foram introduzidas depois de os alunos terem resolvido bastantes tarefas de multiplicação (ver Tabela 1). O maior grau de complexidade associado aos contextos de divisão teve como consequências que alguns alunos não foram capazes de os resolver ou fizeram-no incorretamente, enquanto outros optaram por procedimentos aditivos ou subtrativos.

Apresentamos o exemplo de Joana, da tarefa 19 – Colecionar cartas, que opta por um procedimento de subtrações sucessivas, para determinar quantas folhas de caderneta são necessárias para guardar uma coleção de 96 cartas, se cada folha levar oito.

96 - 8 = 88 88 - 8 = 80 80 - 8 = 72 72 - 8 = 64 - 8 = 56 - 8 = 48 - 8 40 -
8 = 32 - 8 = 24 - 8 = 16 - 8 = 8 - 8 = 0

R: São necessários 12 folhas

**Figura 8 –** Resolução de Joana da subtarefa 2 – tarefa 19

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

Joana explicita o seu raciocínio na discussão coletiva: "*Eu fiz 96 menos 8, são 82 e fiquei com 1 folha da caderneta cheia. Depois fiz 82 menos 8 e fiquei com 74, e fiz sempre assim".* O seu procedimento parece ser sugerido pelo contexto, uma situação de divisão por medida. Efetivamente, a sua interpretação da situação, muito ligada ao contexto, leva-a a optar por subtrações sucessivas, próximas da ação de colocar cartas numa caderneta.

Finalmente, os números utilizados nas tarefas propostas também parecem ter influenciado os procedimentos dos alunos. Quando os alunos resolvem tarefas com números racionais não negativos na representação decimal, o seu conhecimento sobre estes números ainda é pouco profundo, provocando-lhes dificuldades. Efetivamente, os alunos revelam, ainda, pouco à-vontade no cálculo com estes "novos" números, introduzidos no mesmo ano letivo da experiência de ensino. Como consequências, identificam-se tanto o retorno a procedimentos menos eficazes, como o seu uso incorreto. Em alguns casos, a pouca destreza no cálculo com estes números acarreta, também, a não resolução das tarefas. As dificuldades de alguns alunos, associadas ao conhecimento e cálculo com números na forma decimal e os seus efeitos nos procedimentos a que recorrem, foram evidentes em quase todas as tarefas que incluem números nesta representação.

## Conclusões

Os alunos recorrem a procedimentos muito diversificados quando resolvem tarefas de multiplicação, evoluindo gradualmente de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos, baseados em propriedades da operação, resultados que estão de acordo com o que autores como Fosnot & Dolk (2001) e Treffers & Buys (2008) referem. A evolução observada está fortemente ancorada nas discussões coletivas focadas nas resoluções dos alunos e que eram cuidadosamente orquestradas pela professora.

Sobretudo no início da experiência de ensino, alguns alunos recorrem com alguma frequência ao uso de diferentes procedimentos para realizar um cálculo. Além disso, há alunos que revelam uma clara preferência pelo uso sistemático de um determinado tipo de procedimentos. Este aspeto é, igualmente, identificado por Gilmore & Papadatou (2009) na meta-análise que realizaram e que salienta a existência de um grupo de crianças que se foca num determinado procedimento e não o altera perante diferentes situações.

Este estudo tem implicações ao nível da aprendizagem da multiplicação e, mais

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

globalmente, ao nível do desenvolvimento curricular associado ao estudo desta operação. De facto, a análise dos procedimentos dos alunos e da sua evolução pode orientar a sequenciação do ensino e ajudar os professores a decidir "o que vem a seguir" perante os modos de resolução de cada um (Ell, 2001). Também, o conhecimento sobre os procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e sobre o modo como evoluem é um contributo para delinear trajetórias efetivas de aprendizagem desta operação.

**Nota:** Projeto apoiado pelo Instituto Politécnico de Setúbal e pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (SFRH/BD/39016/2007).

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

**Referências bibliográficas**


Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools* (pp. 184-194). Buckingham: Open University Press.

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics, 12(5)*, 242-247.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam a prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(*2*), 81-89.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10(1&2)*, 113-163.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2008). Introduction – The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (3ª ed., pp. 1-43). USA: Sage Publications.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 35-53). Lisboa: Escolar Editora.

Ell, F. (2001). *Strategies and thinking about number in children aged 9-11.* Technical Report 17, University of Auckland, Auckland, NZ.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16(1)*, 3-17.

Fosnot, C. T. (2007). *Investigating Multiplication and Division. Grades 3-5.* Portsmouth, NH: Heinemann.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth, The Netherlands: Heinemann.

Fuson, K. C. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. In J. Kilpatrick, G. W. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for schools mathematics* (pp. 68-94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gilmore, C. K., & Papadatou-Pastou, M. (2009) Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1), 25-40.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essencial Pratice* (Vol I, pp. 345-352). Hobart: MERGA.

Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C. J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 89-96). Haifa, Israel.

Merrian, S. B. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach.* S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(3)*, 309-330.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2008). Aprender Matemática. In A. P. Canavarro (Ed.), *20 Anos de temas na EeM* (pp. 2-13). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica.pdf.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, 114-145.

Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47.

Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) – Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics,* (pp. 61-88). Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO). The Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 557-628). Charlotte: Information Age Publishing.

Yin, R. (1995). *Case study research: Design and methods.* Newbury Park: Sage.

**Indagatio Didactica**, vol. 3(1), Fevereiro 2011 ISSN: 1647-3582

## Notas

[1] Na trajetória de aprendizagem foram incluídas tarefas com contextos de divisão que os alunos resolveram usando, sobretudo, a multiplicação, privilegiando-se a relação entre as duas operações.