nº especial

Tecnologias da Informação em Educação

Geogebra e os conjuntos de Julia e Mandelbrot

Ana Frederico

Escola Secundária Dom Manuel Martins

Ana.p.frederico@gmail.com

Resumo

O estudo dos fractais começou com muitos protagonistas, mas nenhum era tão apelativo, como os conjuntos de Julia e Mandelbrot. O sistema iterativo associado aos dois conjuntos é $z_{n+1} = z_n^2 + cz_{n+1} = z_n^2 + c$*, sendo c fixo para cada conjunto de Julia e* $z_0 = 0z_0 = 0$ *no conjunto de Mandelbrot. Este é certamente o fractal mais popular da matemática contemporânea. Podemos afirmar que é o mais bonito, e o mais complexo. Saliente-se que tudo o que é exterior ao círculo de raio 2 não faz parte do conjunto de Mandelbrot. Além disso, para os parâmetros c reais com* $-2 \leq c \leq 0{,}25$ $-2 \leq c \leq 0{,}25$ $-2 \leq c \leq 0{,}25$*, a iteração do ponto crítico é delimitada e o conjunto de Julia é conexo. Teoricamente, isto pode exigir conhecimento da órbita, isto é, um número infinito de iterações e se o ponto inicial* z_0z_0 *está no conjunto prisioneiro ou não. No capitulo de números complexos do 12ºano, podemos de uma forma informal, sem aprofundar conhecimentos científicos, evidenciar toda a teoria envolvente destes conjuntos, em que utilizamos muitos conteúdos lecionados no ensino secundário, nomeadamente função composta, números complexos e suas propriedades, o que leva os alunos a estudar e aprofundar bem este capítulo de uma forma mais apelativa, levando-os a intervir, interagir e a desenvolver todas as suas capacidades cognitivas. O programa Geogebra e o aproveitamento das suas potencialidades estão muito dependentes das propostas pedagógicas que acompanham a sua utilização. Este programa foi concebido para um ambiente pedagógico e é aí, naturalmente, que as suas eventuais potencialidades educativas se revelarão de forma mais completa.*

Palavras-chave: Mandelbrot; Julia; iterações e Geogebra

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Abstract

The study of fractals began with many protagonists, but none was as appealing as the Mandelbrot and Julia sets. The iterative system associated with the two sets is $z_{n+1} = z_n^2 + c z_{n+1} = z_n^2 + c$,, c being fixed for each Julia set and $z_0 = 0 z_0 = 0$ for the Mandelbrot set. The Mandelbrot set is certainly the most popular fractal of contemporary mathematics. We can say that it is the most beautiful and the most complex. I should point out that what is outside the circle of radius 2 is not part of the Mandelbrot set. Moreover, for the actual c parameters with $-2 \leq c \leq 0{,}25 -2 \leq c \leq 0{,}25$ the iteration of the critical point is bounded and the Julia set is connected. Theoretically, this might require knowledge of the orbit, that is, an infinite number of iterations and if the starting point $z_0 z_0$ is at the captive set or not. In the chapter of complex numbers in grade 12, we can, in an informal way, without further scientific knowledge, prove the whole theory involving these sets, in which we use a lot of content taught in secondary education, such as composite functions, complex numbers and their properties. This leads students to study and examine this chapter more thoroughly, in a more appealing way, making them intervene, interact and develop their cognitive abilities. The Geogebra program and the use of its potentialities is very dependent on the pedagogical proposals that accompany its use. This program was granted for an educational environment and that is where, of course, its eventual educational potential will be more fully revealed.

Keywords: Mandelbrot Set, Julia Set, iteration and Geogebra

Resúmé

L'étude des fractals a commencé avec beaucoup de protagonistes mais aucun d'eux n'était aussi appellatif que l'ensemble Julia et Mandelbrot. Le système itératif associé aux deux ensembles est$z_{n+1} = z_n^2 + c z_{n+1} = z_n^2 + c$, c étant fixe pour chaque ensemble de Julia et $z_0 = 0 z_0 = 0$ dans l' ensemble de Mandelbrot. L'ensemble de Mandelbrot est certainement le fractal le plus populaire de la mathématique contemporaine. Nous pouvons même affirmer qu'il est le plus joli et le plus complexe. Nous faisons remarquer que tout ce qui est extérieur au cercle de rayon 2 ne fait pas partie de l'ensemble de Mandelbrot. De plus, pour les paramètres C réels de $-2 \leq c \leq 0{,}25 -2 \leq c \leq 0{,}25$ l´ itération du point critique est délimitée et l'ensemble

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

de Julia est relationnel. Théoriquement, ceci peut exiger la connaissance de l'orbite, soit, un nombre infini d'itérations et aussi savoir si le point initial $z_0 z_0$ se situe dans l'ensemble prisonnier ou pas. Au chapitre des nombres complexes de 12ème année(12ème année est l'équivalent à la terminale en France), nous pouvons , informellement et sans approfondir les connaissances scientifiques, mettre en évidence toute la théorie rapportée à ces ensembles, en utilisant beaucoup de contenus enseignés au secondaire, comme par exemple, la fonction composée, les nombres complexes et leurs propriétés, ce qui fait que les élèves étudient et approfondissent bien ce chapitre d'une façon plus attrayante tout en les faisant participer, interagir et développer toutes leurs capacités cognitives. Le programme GEOGEBRA et le bénéfice des capacités que l'on peut en extraire, dépendent beaucoup des abordages pédagogiques qui accompagnent son utilisation. Ce programme a été conçu pour être utilisé en milieu pédagogique et c'est dans ce milieu que ses éventuelles capacités éducatives se révéleront d'une façon plus complète.

Mots-clés: Mandelbrot, Julia, itérations et GeoGebra

Introdução

No âmbito da disciplina de Caos e fractais do mestrado em Matemática, planifiquei uma aula sobre fractais, nomeadamente: Conjuntos de Julia, Mandelbrot e iterações pelo que exponho de seguida a minha linha orientadora.

Quer os conjuntos de Julia, quer de Mandelbrot são construídos por iterações. Para iterar uma função, a partir de uma dado inicial$\boldsymbol{f(x)}$ x , calculamos os e depois aplicamos $\boldsymbol{f f}$ novamente para encontrar um novo valor $\boldsymbol{f(f(x)) f(f(x))}$ então simplificaremos estas notações por $\boldsymbol{f^j(x)\, f^j(x)}$ que significa a j-ésima aplicação de $\boldsymbol{f, f,}$ logo, para iterar uma função $\boldsymbol{f f}$ aplica-se inicialmente um valor $\boldsymbol{x = a_0 x = a_0}$ e obtemos:$\boldsymbol{a_1 = f(a_0) a_1 = f(a_0)}$, $\boldsymbol{a_2 = f(f(a_0)) a_2 = f(f(a_0))}$

Podemos então considerar uma sucessão de iterações

$\boldsymbol{a_0, a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2)} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Conjunto de Julia

O conjunto de Julia surgiu após vários estudos acerca de processos iterativos

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

envolvendo números complexos. Consideremos o sistema iterativo, $Z_{n+1} = Z_n{}^2 + C$ $Z_{n+1} = Z_n{}^2 + C$ ou a função $f(x) = x^2 + cf(x) = x^2 + c$ em que C é um ponto fixo no plano complexo.

Para cada ponto $Z_o Z_o$ iteremos a função gerando a seguinte sucessão de números complexos (órbita de $Z_o Z_o$).

Orbitas Periódicas são órbitas formadas por um número finito de elementos. Se a órbita de $Z_0 Z_0$ é atraída para um círculo em torno da origem, dizemos que Z_0 Z_0 é um ponto prisioneiro e o conjunto de todos estes pontos formam o conjunto prisioneiro de c.

Orbitas Não Periódicas são órbitas formadas por um número infinito de elementos. Se a órbita de $Z_0 Z_0$ é atraída para infinito, dizemos que $Z_0 Z_0$ é ponto de escape pertence ao conjunto de Julia que é a fronteira do conjunto de escape que é a mesma que a do prisioneiro, o conjunto de todos estes pontos formam o conjunto escape de c e ponto fixo é um ponto do domínio da função que verifica $\boldsymbol{f^n(x_0) = x_0}$ $\boldsymbol{f^n(x_0) = x_0}$

Se a órbita de $Z_o Z_o$ é atraída para infinito ($Z_o Z_o$ é ponto escape), então $Z_o Z_o$ não pertence a nenhum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos forma o conjunto escape de c.

Se a órbita de $Z_o Z_o$ é atraída para um círculo em torno da origem ($Z_o Z_o$ é um ponto prisioneiro), então $Z_o Z_o$ pertence a algum conjunto de Julia. O conjunto de todos estes pontos forma o conjunto prisioneiro de c.

Ambos os conjuntos complementam-se e preenchem alguma parte do plano complexo.

Assim, a fronteira do conjunto escape é simultaneamente a fronteira do conjunto prisioneiro, nesta fronteira temos o conjunto de Julia associado ao parâmetro C.

O valor do ponto C determina a formação dos conjuntos de Julia, sendo associado com um conjunto de Julia em particular. Podemos ver na figura 1, em que por exemplo, para c= 0 obtemos o círculo unitário. Se C pertencer ao interior do conjunto

Tecnologias da Informação em Educação

nº especial

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

de Mandelbrot, o conjunto de Julia obtido será conexo. Se, pelo contrário, o ponto C não pertencer ao conjunto de Mandelbrot, o conjunto de Julia correspondente é desconexo.

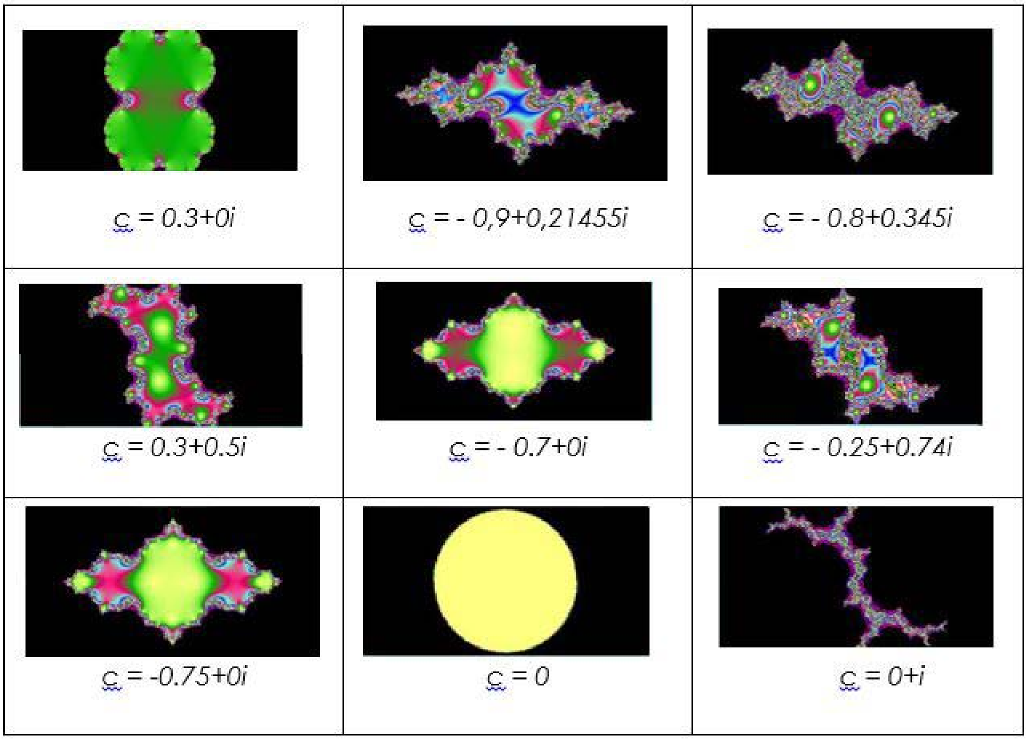

Figura 1- conjuntos de Julia para diferentes valores do parâmetro c geradas no Geogebra

Se considerarmos o sistema iterado quadrático $x_{n+1} = x_n{}^2 + C x_{n+1} = x_n{}^2 + C$, em que x_0 x_0 é um dado complexo e C outro complexo fixo. Dois tipos de comportamento podem acontecer, consoante o valor inicial.

A sucessão é ilimitada, isto é, abandona qualquer círculo centrado na origem.

A sucessão é limitada, isto é existe um círculo, centrado na origem onde se encontram os termos da sucessão.

Sendo assim, obtemos dois conjuntos, conjunto de escape e o conjunto prisioneiro.

O conjunto de escape é o conjunto de pontos que levam ao primeiro tipo de comportamento.

nº especial

Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

O conjunto prisioneiro é o conjunto de pontos que levam ao segundo tipo de comportamento.

Sabemos que ambos os conjuntos são não vazios e são complementares um do outro. Têm fronteira comum.

Logo o conjunto de Julia para $x_{n+1} = x_n{}^2 + Cx_{n+1} = x_n{}^2 + C$ é a fronteira do conjunto de escape (ou prisioneiro).

No caso de C$\neq \mathbf{0} \neq \mathbf{0}$ (Critério de Escape)

Se $|Z_n| > max\{|c|,2\}|Z_n| > max\{|c|,2\}$ então $|Z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty |Z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Suponhamos que $|Z_n| > max\{|c|,2\}|Z_n| > max\{|c|,2\}$ para algum $n \in \mathbb{N} n \in \mathbb{N}$

Como $|Z_n| > 2|Z_n| > 2$ podemos escrever $|Z_n| = 2 + \varepsilon |Z_n| = 2 + \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0 \varepsilon > 0$

Então $|Z_n{}^2| = |Z_n{}^2 + c - c| \leq |Z_n{}^2 + c| + |c| |Z_n{}^2| = |Z_n{}^2 + c - c| \leq |Z_n{}^2 + c| + |c|$

Logo $|Z_n{}^2 + c| \geq |Z_n{}^2| - |c| > |Z_n|^2 - |Z_n| = |Z_n|(|Z_n| - 1) = (1+\varepsilon)|Z_n|$
$|Z_n{}^2 + c| \geq |Z_n{}^2| - |c| > |Z_n|^2 - |Z_n| = |Z_n|(|Z_n| - 1) = (1+\varepsilon)|Z_n|$

Ou seja $|Z_{n+1}| > (1+\varepsilon)|Z_n| |Z_{n+1}| > (1+\varepsilon)|Z_n|$ Iterando

$|Z_{n+k}| > (1+\varepsilon)^k |Z_n| \to +\infty$

Se $|Z_n| > 2|Z_n| > 2$ então $|Z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty |Z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$|Z_n| > 2|Z_n| > 2$, a demonstração fica igual à de cima visto que $|Z_n| > 2 \Rightarrow |Z_n| > |C|$
$|Z_n| > 2 \Rightarrow |Z_n| > |C|$

Se $|C| > 2|C| > 2$ então $Z_0 = 0 Z_0 = 0$

$Z_1 = C \; e \; Z_2 = \; C^2 + C = C(C-1) Z_1 = C \; e \; Z_2 = \; C^2 + C = C(C-1)$ logo

$|Z_2| = |c| \times |C+1| > |c| |Z_2| = |c| \times |C+1| > |c|$

Uma vez que $|C+1| > |C| - |1| > 1 \; e \; |Z_2| > max\{|C|,2\} |C+1| > |C| - |1| > 1 \; e \; |Z_2| > max\{|C|,2\}$

O conjunto de Mandelbrot é um diagrama de bifurcação para a família de aplicações quadráticas, como a aplicação logística $\boldsymbol{Z_{n+1} = Z_n{}^2 + cZ_{n+1} = Z_n{}^2 + c}$, mas agora a variável dinâmica $\boldsymbol{ZZ}$ e o parâmetro c tomam valores complexos.

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

O Conjunto de Mandelbrot pode ser descrito matematicamente através de um processo muito simples envolvendo somente números complexos. A nossa construção irá começar com um número complexo (um ponto do plano) e a partir deste criar uma sucessão infinita de números (pontos) que dependem do valor inicial. Esta sequência de números chamar-se-á sucessão de Mandelbrot.

Para construir o conjunto de Mandelbrot, basta marcar a negro os pontos que correspondem aos "valores iniciais" de convergência ou quando originam sequências periódicas, deixando os restantes a branco ou numa graduação de cores de acordo com a rapidez com que aumentam de valor.

Mas a simplicidade termina aqui. Descobrir as formas que a fronteira do conjunto de Mandelbrot representa a auto semelhança levada ao extremo mais belo, como se pode observar pelas sucessivas ampliações do conjunto de Mandelbrot:

Aumentando o número de iteradas e a resolução, esse detalhe aparece em todas as escalas, e inclui um halo de cópias da estrutura principal, isto é as cópias do halo, que parecem ilhas, estão de facto ligadas à estrutura principal. Essa ligação só é possível de ser visualizada se fizermos um ou vários zooms da imagem principal, podemos verificar isso na figura 2.

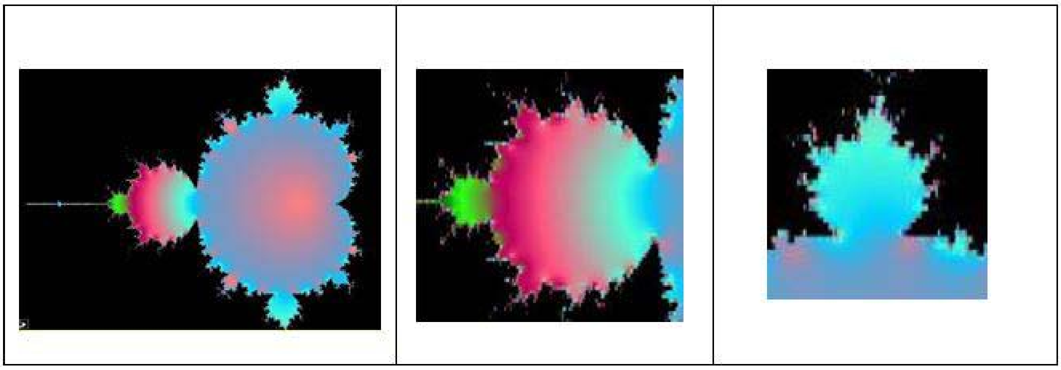

Figura 2- Zoom do Conjunto de Mandelbrot gerado no Geogebra

Em qualquer destas ampliações podemos descobrir réplicas do conjunto de Mandelbrot, rodeadas por novas e impressionantes imagens, que mudam infinitamente.

O conjunto de Maldelbrot, é muito complexo pois envolve uma infininidade de conceitos. Uma característica marcante do conjunto de Mandelbrot são os seus pequenos bolbos que estão alinhados ao longo da região central. Estes bolbos estão associados a conjuntos de Julia que limitam as bacias de atração de pontos

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

periódicos. O conjunto do centro, que intersecta o eixo real no intervalo de -0,75 a 0,25 limita a bacia de atração de pontos fixos, ou seja de períodos-1. Recordamos que o conjunto de Julia para $c = 0c = 0$, é um círculo com um ponto fixo atractor na origem. Este ponto fixo é super atractor, ou seja o ponto crítico é igual ao ponto fixo. É um fato que os parâmetros na linha entre -0,75 e 0,25 são precisamente aqueles parâmetros reais para os quais um dos pontos fixos $z \to z^2 + cz \to z^2 + c$ é um atractor. (ver bibliografia).

Portanto, não é nenhuma surpresa que a grande região em forma de coração pertence conjunto de todos parâmetros (complexo) para os quais um dos dois pontos fixos, de $z \to z^2 + cz \to z^2 + c$, é atractor.

Contextualização Teórica

Para cada valor do parâmetro $c\,c$ *na iteração* $z \to z^2 + c\; z \to z^2 + c$ *há um conjunto único prisioneiro* $P_c P_c$ *e um conjunto de escape* $E_c.\, E_c.$ *Os equipotenciais e linhas de campo revelam a estrutura natural de* $E_c E_c$ *que conduz a uma compreensão mais profunda da dinâmica de* $z \to z^2 + cz \to z^2 + c$ *, do conjunto de escape e da sua fronteira ou seja dos conjuntos de Julia* $J_c J_c$. *A chave é a dicotomia estrutural, que afirma que, para qualquer escolha do parâmetro* cc *associado ao conjunto de Julia* $J_c J_c$ *e conjunto prisioneiro* $P_c\, P_c$ *são ambos (ou conexos ou totalmente desconexos). Existem conjuntos de Julia conexos, e conjuntos totalmente desconexos. Por volta de 1979 Mandelbrot teve a ideia de retratar esta dicotomia dentro do conjunto de todos os parâmetros que variam no plano complexo C. Isto levou diretamente para o conjunto Mandelbrot*

$$M = \{c \in C: J_c \text{é} \; conexo\}$$

Uma definição alternativa para o conjunto de Mandelbrot:

$$M = \{c \in C : c \to c^2 + c \to \cdots permanece\ limitada\}$$

Para um dado parâmetro c o destino do ponto crítico $Z = 0Z = 0$, deve ser determinado por um algoritmo. Se $|C| > 2|C| > 2$ a órbita escapa. Se $|C| \leq 2|C| \leq 2$. Iterando, $z \to z^2 + c$ $z \to z^2 + c$, começando com $Z_0 = CZ_0 = C$,verificamos os pontos da órbita. Se um ponto

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

da órbita estiver fora de um círculo de raio $R = \max(2, |c|) = 2R = \max(2, |c|) = 2$, temos a certeza de que a órbita deve escapar para o infinito, e novamente o algoritmo pode terminar com o mesmo resultado (isto é, não está presente em M, no entanto os parâmetros para os quais a iteração não deixam $T = \{c\epsilon C\colon |c| \leq 2\}T = \{c\epsilon C\colon |c| \leq 2\}$, não escapam ficam prisioneiros.

Os parâmetros reais -0,75 < c < 0,25 $-0.75 < c < 0.25$

Os pontos fixos da iteração quadrática $z \to z^2 + c\, z \to z^2 + c$ são dadas pela fórmula $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ A derivada de $z^2 + cz^2 + c$ em $z_{1,2} z_{1,2}$ é $2z2z$. Como varia a partir de - 0,75 a 0,25? Temos que $1 - 4c1 - 4c$, varia de 4 a 0, e que a raiz $\sqrt{1-4c}\sqrt{1-4c}$ vai 2 a 0. Assim, $1 - \sqrt{1-4c}1 - \sqrt{1-4c}$ situa-se entre -1 e 1 e menor do que 1, em valor absoluto, que identifica um ponto fixo atractor. Assim, o ponto fixo $\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}\right)$, é um atractor para entre -0,75 e 0,25.

Podemos generalizar para ciclos periódicos. Tomemos, por exemplo, $c = -1 c = -1$. Aqui os pontos $Z_0 = 0 Z_0 = 0$ e $z_1 = -1 z_1 = -1$ são pontos periódicos, iterando duas vezes, obtemos de $z \to (z^2 - 1)^2 - 1 = z^4 - 2z^2 z \to (z^2 - 1)^2 - 1 = z^4 - 2z^2$.

Se o valor absoluto da derivada da presente transformação no ponto fixo for superior a

1, então o ponto fixo é repulsor. Se o valor absoluto for inferior a 1, então o ponto fixo é

atractor .

Critério da derivada para pontos fixos

Seja z um ponto periódico de P de período k com multiplicador $\lambda = (P^k(z))'\lambda = (P^k(z))'$ consideremos então z ponto fixo e z→ z²+c , seja λ a sua derivada então λ=2z.

Se z é atractor se |λ|<1e se |λ|=0 dizemos que é superatractor

Se z é repulsor se |λ|>1

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Se z é indiferente se |λ|=1

No nosso caso, a derivada é $4z^3-4z4z^3-4z$. A avaliação da derivada aos dois pontos fixos dá $|4z_0^3-4z_0|=0<1|4z_0^3-4z_0|=0<1$ e $|4z_1^3-4z_1|=|-4+4|=0<1$ $|4z_1^3-4z_1|=|-4+4|=0<1$

Assim, os pontos fixos são atractores para $z\to z^4-2z^2z\to z^4-2z^2$, logo a sequência é periódica. Os pontos de 0, -1, 0, -1, ... é uma orbita também atractora em relação à transformação original $z\to z^2-1z\to z^2-1$. O critério da derivada permite-nos também calcular todos os parâmetros de tal modo que a órbita de período 2 é atractora. Primeiro vamos derivar uma equação quadrática para os pontos periódicos com (mínimo) período 2. Por definição, um ponto de período 2 deve satisfazer $(z^2+c)^2+c-z=0(z^2+c)^2+c-z=0$.

Notemos também que os dois pontos fixos, dados por $z^2+c-z=0z^2+c-z=0$.

Resolvendo esta equação, o polinómio z^2+c-zz^2+c-z, deve ser um fator do polinómio $(z^2+c)^2+c-z(z^2+c)^2+c-z$ de grau 4. Na verdade, $(z^2+c)^2+c-z=(z^2+z+1+c).(z^2+c-z)$ $(z^2+c)^2+c-z=(z^2+z+1+c).(z^2+c-z)$ $(z^2+c)^2+c-z=(z^2+z+1+c).(z^2)+c-z$

Segue-se que as soluções z_1z_1 e z_2z_2 de $z^2+z+1+c=0z^2+z+1+c=0$,são precisamente os pontos de período 2, temos $z_1^2+c=z_2z_1^2+c=z_2$ e $z_2^2+c=z_1z_2^2+c=z_1$. Obviamente, podemos também verificar diretamente, contudo, é mais complicado. Vamos agora derivar duas vezes e iterado $z\to(z^2+c)^2+cz\to(z^2+c)^2+c$ no ponto periódico z_1 z_1 , $2(z_1^2+c)2z_1=4z_1z_22(z_1^2+c)2z_1=4z_1z_2$

(A derivada de z_2z_2 é idêntica) as soluções z_1,z_2 z_1,z_2 , sabendo que $z_1z_2=1+cz_1z_2=1+c$

Calculando a derivada acima é igual $4(1-c)4(1-c)$, que é inferior a 1 em grandeza desde que $|1+c|<\frac{1}{4}|1+c|<\frac{1}{4}$. Essa desigualdade descreve um circulo de raio $\frac{1}{4}\frac{1}{4}$ centrado em $c=-1c=-1$ e dá-nos o resultado para os parâmetros cc , z_1z_1 e z_2z_2 que

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

são atractores. Podemos concluir então que:

Se c ∈] - 0.75,0.25[\{0}é atractor e superatractor se c=0;

Se c= - 0.75 ou c = 0.25 é indiferente

Se c < -0.75 e c > 0.25é repulsor

Podemos ver na figura 3, com ajuda do Geogebra, as orbitas e pontos repulsores e atractores, bem como pontos fixos.

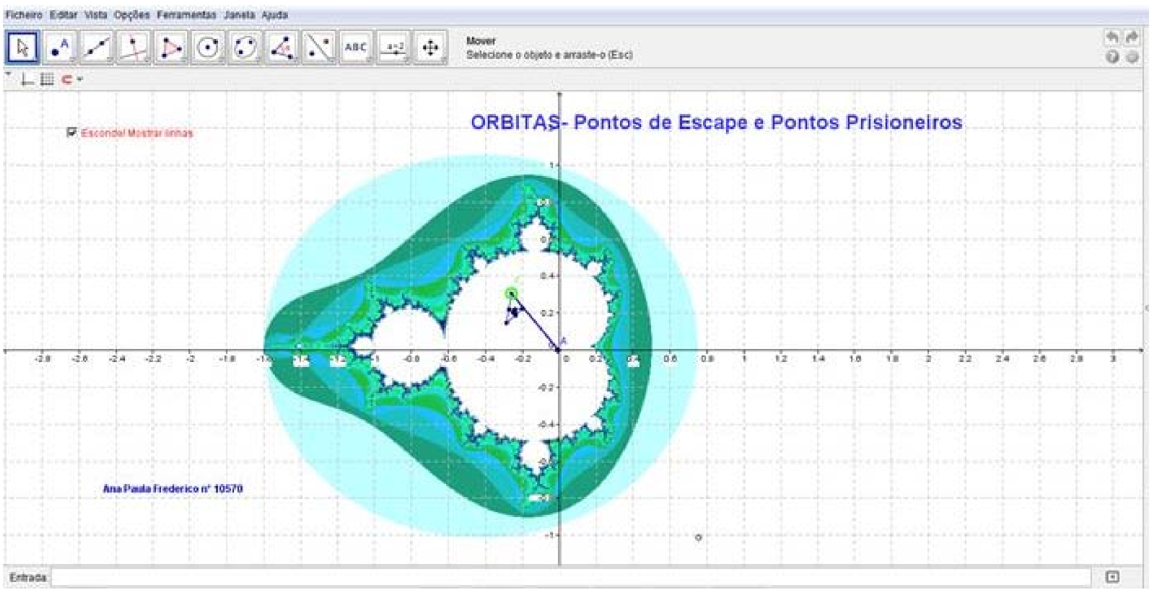

Figura 3- Orbitas do conjunto de Mandelbrot

Na figura 4 podemos ver a construção do conjunto de Mandelbrot no geogebra e verificar ao mesmo tempo do destino das orbitas

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Metodologia

A metodologia utilizada para os alunos de 12ºano foi o uso do geogebra, uma importantíssima ferramenta ao nosso dispor e uma ficha de trabalho orientada.

Duas atividades propostos:

Atividade 1:

Na função $f(Z) = Z^2 + C, seja f(Z) = Z^2 + C, seja\ c = -1 + 0ic = -1 + 0i$ e para cada um dos valores iniciais $Z_0 Z_0$, calcule e represente no plano de Argand, as cinco primeiras iterações da aplicação.

$Z_0 = -1 + iZ_0 = -1 + i$

$Z_0 = iZ_0 = i$

$Z_0 = 0Z_0 = 0$

O que podes concluir quando se aumenta o número de iterações?

Tendo em conta as órbitas de $Z_0 Z_0$, das alíneas a), b) e c) do exercício 1 quais são de escape ou prisioneiros. Justifique convenientemente a sua resposta.

Resolução:

Julia centrou os seus estudos no conjunto de iterações quadráticas $\boldsymbol{Z_{n+1} = Z_n{}^2 + c}$ $\boldsymbol{Z_{n+1} = Z_n{}^2 + c}$.

Podemos verificar na figura 5, com a folha de cálculo do geogebra o destino das orbitas.

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

	$Z_0 = -1 + i$	$Z_0 = i$	$Z_0 = 0$
1ªIteração	$Z_1 = -1 - 2i$	$Z_1 = -1 - 2i$	$Z_1 = -1$
2ªIteração	$Z_2 = -4 + 4i$	$Z_2 = -3 + 5i$	$Z_2 = 0$
3ªIteração	$Z_3 = -1 - 32i$	$Z_3 = -16 - 29i$	$Z_3 = -1$
4ªIteração	$Z_4 = -1024 + 64i$	$Z_4 = -585 + 929i$	$Z_4 = 0$
5ªIteração	$Z_5 = 1044479 - 131072i$	$Z_5 = -520816 - 1086929i$	$Z_5 = -1$

Figura 5- Destino dos pontos após várias iteradas

Quando se aumenta o número de iterações, concluímos que para $\boldsymbol{Z_0 = -1 + i}$ $\boldsymbol{Z_0 = -1 + i}$ e $\boldsymbol{Z_0 = iZ_0 = i}$, sucessão diverge, no caso de $\boldsymbol{Z_0 = 0}$ $\boldsymbol{Z_0 = 0}$ a sequência oscila entre $\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{-1 -1}$.

Aqui utilizou-se o critério de escape referido em cima.

No caso de $\boldsymbol{Z_0 = -1 + iZ_0 = -1 + i}$ e $\boldsymbol{Z_0 = iZ_0 = i}$, concluímos que $Z_0 Z_0$ é um ponto de escape no outro caso é um ponto prisioneiro.

Atividade 2: O sistema dinâmico complexo $Z_{n+1} = Z_n^2 + CZ_{n+1} = Z_n^2 + C$, com $C = 0{,}3 - 0{,}4i$ $C = 0{,}3 - 0{,}4i$ e $Z_0 = 0{,}1 + 0{,}2iZ_0 = 0{,}1 + 0{,}2i$, produz uma sequência de números complexos, todos dentro da circunferência de raio igual a 1 e centro na origem. Justifique que o ponto $0{,}1 + 0{,}2i0{,}1 + 0{,}2i$ faz parte do conjunto de Júlia para $0{,}3 - 0{,}4i0{,}3 - 0{,}4i$.

$Z_{n+1} = Z_n^2 + CZ_{n+1} = Z_n^2 + C$, utilizando a folha de cálculo do geogebra obtemos:

Para $C = 0{,}3 - 0{,}4iC = 0{,}3 - 0{,}4i$ e $Z_0 = 0{,}1 + 0{,}2iZ_0 = 0{,}1 + 0{,}2i$

$0{,}1 + 0.2i \to 0{,}27 - 0{,}36i \to 0{,}2433 - 0.5944i$
$\to 0{,}00588353 - 0{,}68923504i \to \cdots$

nº especial

Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Até à 5 iterada nada se pode concluir acerca da orbita, os alunos podem intuir que os pontos são prisioneiros, no entanto não podem concluir que ficam sempre prisioneiros. Sabem que a partir do momento que escapa então não volta a ser prisioneiro.

À partida após muitas iterações leva a concluir que pertence ao interior da circunferência de raio 2.

Para concluir utiliza-se o conjunto de Julia, realizado no Geogebra para alguns valores de C observando a figura 6 e concluímos que qualquer que seja o software usado o resultado é sempre o mesmo, pode variar apenas o aspeto.

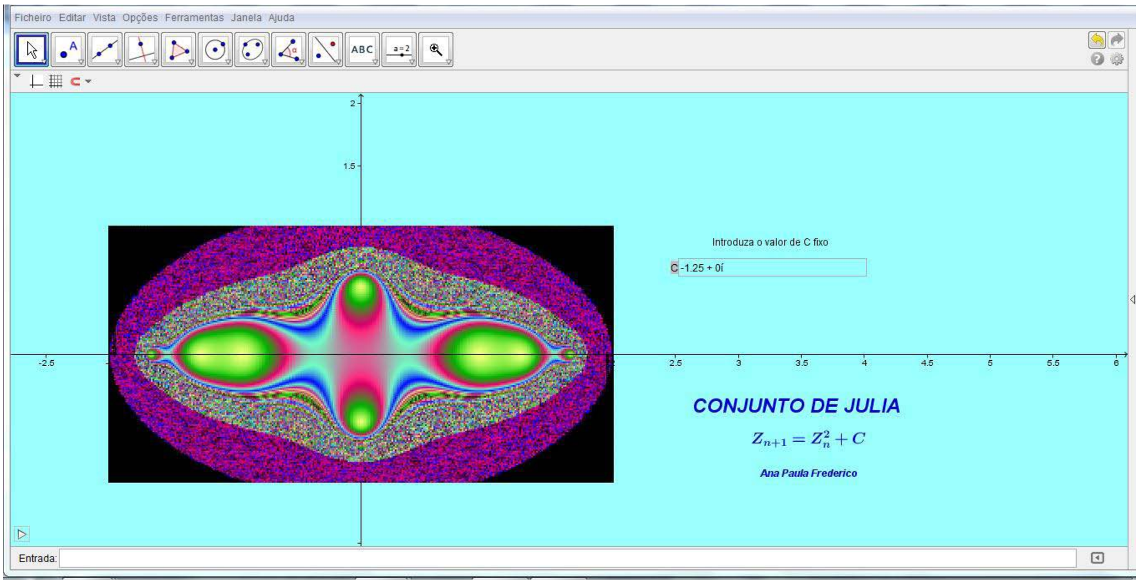

Figura 6- Conjunto de Julia gerado no geogebra para c = - 1.25+0i

Como podemos desenhar o conjunto de Mandelbrot?

A cor que se atribui a um número complexo $a + bia + bi$ qualquer, que vai ser desenhado como um ponto $(a, b)(a, b)$ no plano.

Denotemos por z o número anterior $a + bia + bi$, submete-se o número ao seguinte processo iterativo

$z_{n+1} = z_n{}^2 + cz_{n+1} = z_n{}^2 + c$, C é um número complexo constante. Observando o comportamento de $z_{n+1}z_{n+1}$ ou seja o comportamento de módulo de $z_{n+1}z_{n+1}$,

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

temos as seguintes possibilidades.

Se $|Z_n||Z_n|$ se mantém sempre finito, atribui-se a cor preta a ZZ.

Se $|Z_n||Z_n|$ tende para infinito, atribui-se diferentes cores a ZZ, dependendo do comportamento de $|Z_n||Z_n|$.

O objeto fractal é a fronteira do conjunto de Mandelbrot, uma curva tão complicada que tem dimensão fractal 2.

Vejamos um exemplo prático

Fazendo $c = 1 + ic = 1 + i$ e $Z = 0Z = 0$, as iterações sucessivas, apresentam os seguintes valores:

Resolvendo por dois processos:

1ºProcesso: Usando $Z_{n+1} = Z_n{}^2 + cZ_{n+1} = Z_n{}^2 + c$

$Z_1 = 0^2 + (1 + i) = 1 + i$

$Z_2 = (1 + i)^2 + (1 + i) = 1 + 3i$

$Z_3 = (1 + 3i)^2 + (1 + i) = -7 + 7i$

E assim sucessivamente

2º Processo

Consideremos $Z_{n+1} = Z_n{}^2 + cZ_{n+1} = Z_n{}^2 + c$ em que $Z = x + yiZ = x + yi$ e $c = a + bi$ $c = a + bi$

Então
$Z_{n+1} = (x_n + y_n i)^2 + a + bi = x_n{}^2 - y_n{}^2 + 2x_n y_n i + a + bi$
$= (x_n{}^2 - y_n{}^2 + a) + (2x_n y_n + b)i$

Em que

$Re(Z_{n+1}) = x_n{}^2 - y_n{}^2 + aRe(Z_{n+1}) = x_n{}^2 - y_n{}^2 + a$ e $Im(Z_{n+1}Im(Z_{n+1})= 2x_n y_n + b$

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

$2x_n y_n + b$

$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a \ \wedge \ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \; x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a \ \wedge \ y_{n+1} = 2x_n y_n + b$, cada ponto é obtido do ponto anterior. Os únicos valores que podem ser alterados são os valores de $a \; a$ e $b \; b$, os quais determinam a que distância e em que direção será colocado o próximo ponto.

$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a \ \wedge \ y_{n+1} = 2x_n y_n + b x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a \ \wedge \ y_{n+1} = 2x_n y_n + b$, sendo $c = 1 + ic = 1 + i$ e $Z = 0Z = 0$, neste caso em particular

$x_0 = 0 \ \wedge \ y_0 = 0 \ \wedge a = 1 \ \wedge b = 1$

$x_1 = {x_0}^2 - {y_0}^2 + a \ \wedge \ y_1 = 2x_0 y_0 + b$

$x_1 = 0 - 0 + 1 \ \wedge \ y_1 = 2 \times 0 \times 0 + 1 x_1 = 0 - 0 + 1 \ \wedge \ y_1 = 2 \times 0 \times 0 + 1 \qquad (1,1))(1,1))$

$x_2 = 1^2 - 1^2 + 1 \ \wedge \ y_2 = 2 \times 1 \times 1 + 1 x_2 = 1^2 - 1^2 + 1 \ \wedge \ y_2 = 2 \times 1 \times 1 + 1 \qquad (1,3)(1,3)$

$x_3 = 1^2 - 3^2 + 1 \ \wedge \ y_3 = 2 \times 1 \times 3 + 1 x_3 = 1^2 - 3^2 + 1 \ \wedge \ y_3 = 2 \times 1 \times 3 + 1 \quad (-7,7)(-7,7)$

Na figura 7, podemos ver a construção do conjunto de Mandelbrot gerado no geogebra

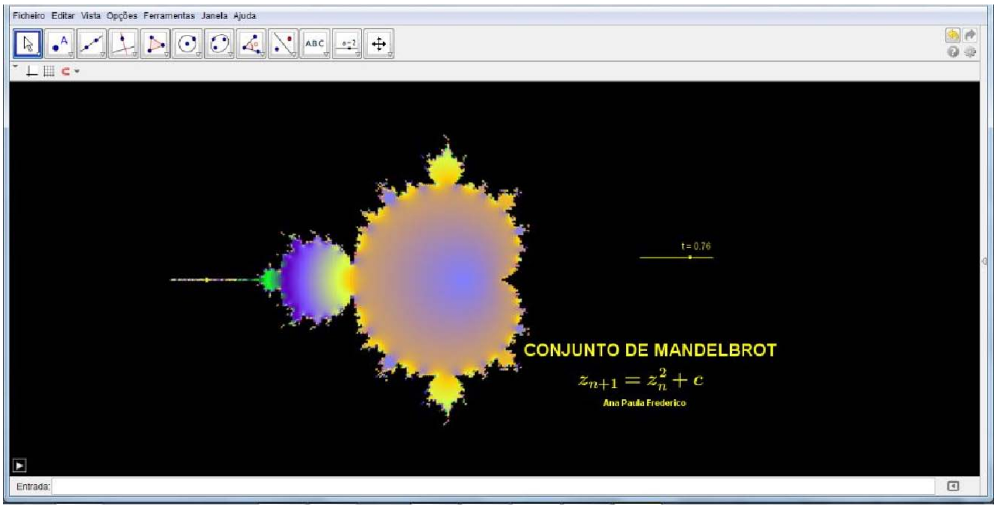

Figura 7- Conjunto de Mandelbrot

nº especial

Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Através de mudanças de cores no geogebra podemos obter o conjunto de Mandelbrot com outras cores, que se pode observar na figura 8 e figura 9

F

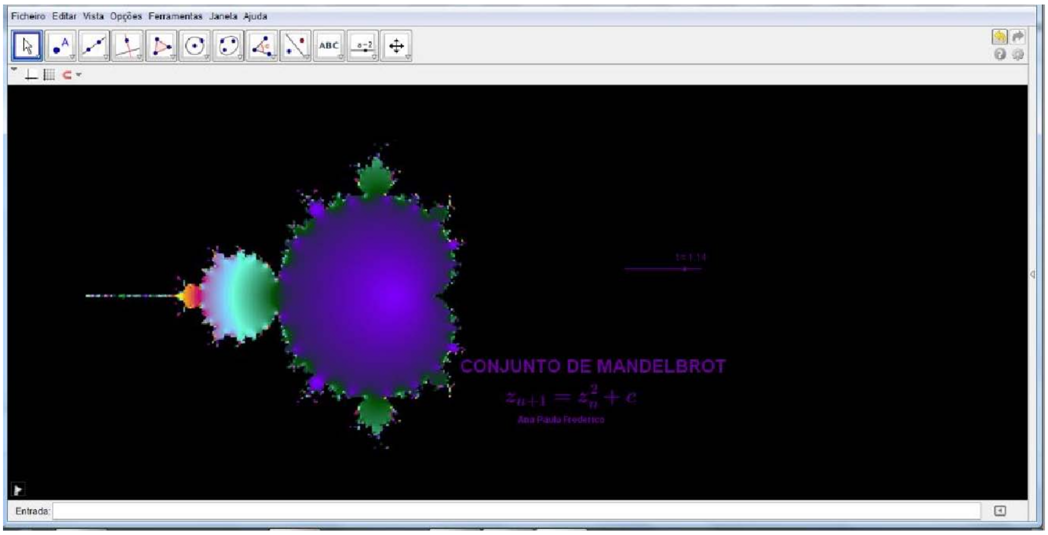

Figura 8- Conjunto de Mandelbrot em que o cardioide principal é em tons de roxo

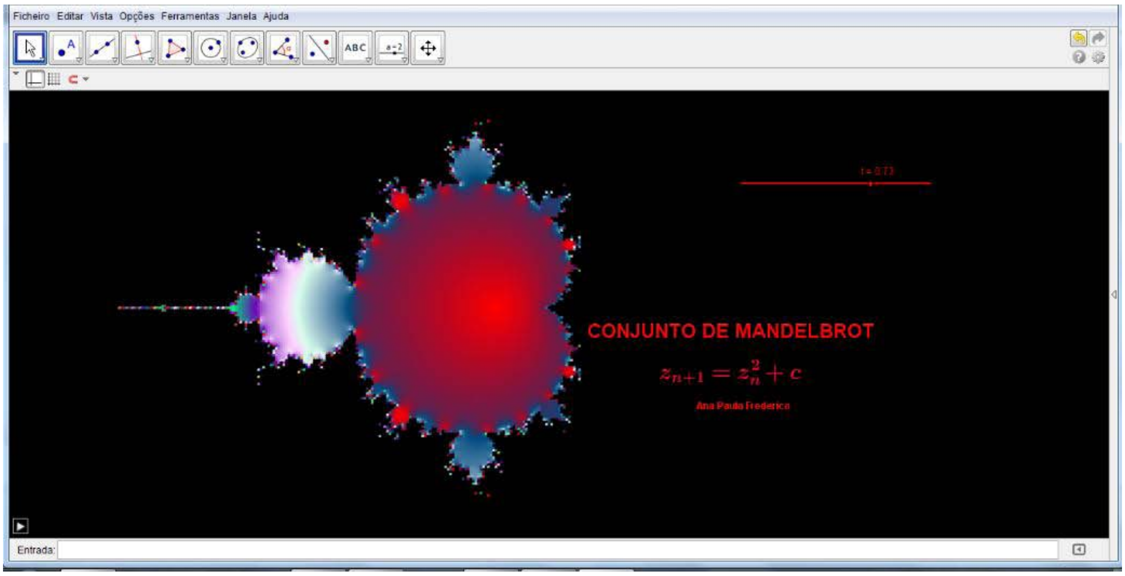

Figura 9- Conjunto de Mandelbrot em que o cardioide principal é em tons de vermelho

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Atividade 3: *Atividade lúdica, os alunos começam a resolver de modo a consolidar todos os conhecimentos apreendidos. Com o auxílio da calculadora e computador.*

Construção do conjunto de Mandelbrot, sem recurso às novas tecnologias

Material Necessário

Lápis de cor, ou canetas de feltro, para além de um lápis ou caneta preta para fazer o contorno.

A razão pela qual são necessárias 3 cores é porque vamos fazer uma primeira aproximação com o máximo de 3 iterações (aplicando o sistema iterativo $Z_{n+1} = Z_n{}^2 + C Z_{n+1} = Z_n{}^2 + C$ até 3 vezes por ponto)

Construção

(-2, 2)	(0, 2)	(2, 2)
(-2, 0)	(0, 0)	(2, 0)
(-2, -2)	(0, -2)	(2, -2)

Com a caneta preta, desenhamos uma grelha, 3 por 3, numa folha de papel. Contorna-mos também de preto o quadrado central (0,0). Este é o valor de C, constante do ponto no centro do quadrado.

De seguida calculamos a primeira iteração, neste caso são os alunos os computadores

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

(na verdade, o significado original da palavra computador era "uma pessoa que calcula") podem fazer sozinhos. Vamos começar com esses pressupostos: O valor de partida z de cada quadrado é (0, 0). Quando o valor absoluto de z,z, para um dado ponto, é maior ou igual a 2, neste caso dizemos que ponto escapou do conjunto Mandelbrot. Quando isso acontece, o aluno vai pintar o quadrado de acordo com a fórmula do número de iterações aplicado a esse ponto. Escolha as cores que vai usar para pintar, 1ª, 2ª ou 3ª iteração. Vamos supor vermelho, verde e azul, respetivamente. Calculando o valor de $z\,z$ para todos os valores do quadrado 3 por 3, assumindo um valor inicial de $0 + 0i0 + 0i$ que corresponde a (0, 0). Estamos a utilizar a fórmula $Z = Z^2 + CZ = Z^2 + C$, como podemos observar na figura 10

Pontos	$\lvert Z_0 \rvert$	1º I	2º I	3ºI	Escapa/Prisioneiro	Cor
-2-2i	$\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$	-2-2i	-2+6i	-34-26i	Escapa	V
0-2i	$\sqrt{(-2)^2}=2$	-2i	-4-2i	12+14i	Escapa	V
2-2i	$\sqrt{(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$	2-2i	2-10i	-94-42i	Escapa	V
-2+0i	$\sqrt{(-2)^2}=2$	-2	2	2	Escapa	V
2+0i	$\sqrt{(2)^2}=2$	2	6	38	Escapa	V
-2+2i	$\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}$	-2+2i	-2-6i	-34+26i	Escapa	V
2+2i	$\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}$	2+2i	2+10i	-94+42i	Escapa	V
0+0i	0	0	0	0	Prisioneiro	A

Figura 10- Tabela com as 3 iterações

Observações: Como $\lvert Z_0 \rvert = \sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}\,\lvert Z_0 \rvert = \sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}$ que é maior do que 2. Então escapa do conjunto de Mandelbrot após a primeira iteração, uma vez que o seu valor absoluto é maior do que 2. Pinta-o com a cor que escolheste. (Neste caso vermelho) Então só usamos duas cores: Pintamos de uma cor neste caso vermelho para todos os quadrados externos, e a cor azul para o quadrado do centro, o obtemos a figura 11

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Vamos tentar agora com um quadrado 9 por 9, mas ainda mantendo um máximo de três iterações.

O primeiro elemento (-2, 1) é maior do que 2 (porque $|Z_0| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $|Z_0| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, deste modo pinta-se de vermelho, uma vez que este escapa do conjunto de Mandelbrot na primeira iteração.

O segundo elemento (-1,5, 1) acaba por não ser superior a 2. Aplicando a fórmula para o valor absoluto,

$|Z_0| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1^2} = 1{,}8$$|Z_0| = \sqrt{(-1{,}5)^2 + 1^2} = 1{,}8$ é menor do que 2. Então passamos para o nosso segundo passo, calculando $Z_1 = Z_0{}^2 + c$ $Z_1 = Z_0{}^2 + c$, então $Z_1 = (-1{,}5 + i)^2 - 1{,}5 + i = 2{,}25 - 3i - 1 - 1{,}5 + i = \mathbf{-0{,}25 - 2i}$ $Z_1 = (-1{,}5 + i)^2 - 1{,}5 + i = 2{,}25 - 3i - 1 - 1{,}5 + i = \mathbf{-0{,}25 - 2i}$

Vamos testar se o seu valor absoluto é agora maior do que 2:

Calculemos $|Z_1| = \sqrt{(-0{,}25)^2 + (-2)^2} = 2{,}016$$|Z_1| = \sqrt{(-0{,}25)^2 + (-2)^2} = 2{,}016$, como $|Z_1|$$|Z_1|$ é maior do que 2, pelo que escapou após a segunda iteração: nosso primeiro verde

O terceiro elemento, com c igual a (-1, 1) não escapa a primeira passagem:

$|Z_0| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$|Z_0| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, é menor do que 2. Então passamos para o nosso segundo passo $Z_1 = (-1 + i)^2 - 1 + i = 1 - 2i - 1 - 1 + i = \mathbf{-1 - i}$$|Z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

O valor absoluto é a raiz quadrada de dois, cerca de 1,41, continuamos assim a terceira iteração:

$Z_2 = (-1 - i)^2 - 1 + i = 1 + 2i - 1 - 1 + i = \mathbf{-1 + 3i}$ $Z_2 = (-1 - i)^2 - 1 + i = 1 + 2i - 1 - 1 + i = \mathbf{-1 + 3i}$, é superior a 2, logo escapa ao conjunto de Mandelbrot, a cor da célula é vermelha, e passamos para a próxima, desde que tenhamos concluído três iterações com este ponto. O fato de estamos a usar apenas três cores torna-se evidente, pois algo que escapa depois de apenas 3 iterações é colorido o mesmo que (0, 0), que nunca escapa, obviamente, ainda não vai ver nada perto do conjunto de Mandelbrot neste nível de detalhe. Continuemos a calcular cada célula até que ela escape, ou que tenha atingido

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

o número máximo de iterações (o número de cores que estamos a usar: 3 neste caso), como podemos observar na figura 12.

(-2;2)	(-1,5;2)	(-1;2)	(-0,5;2)	(0;2)	(0,5;2)	(1;2)	(1,5;2)	(2;2)
(-2;1,5)	(-1,5;1,5)	(-1;1,5)	(-0,5;1,5)	(0;1,5)	(0,5;1,5)	(1;1,5)	(1,5;1,5)	(2;1,5)
(-2;1)	(-1,5;1)	(-1;1)	(-0,5;1)	(0;1)	(0,5;1)	(1;1)	(1,5;1)	(2;1)
(-2;0,5)	(-1,5;0,5)	(-1;0,5)	(-0,5;0,5)	(0;0,5)	(0,5;0,5)	(1;0,5)	(1,5;0,5)	(2;0,5)
(-2;0)	(-1,5;0)	(-1;0)	(-0,5;0)	(0;0)	(0,5;0)	(1;0)	(1,5;0)	(2;0)
(-2;-0,5)	(-1,5;-0,5)	(-1;-0,5)	(-0,5;-0,5)	(0;-0,5)	(0,5;-0,5)	(1;-0,5)	(1,5;-0,5)	(2;-0,5)
(-2;-1)	(-1,5;-1)	(-1;-1)	(-0,5;-1)	(0;-1)	(0,5;-1)	(1;-1)	(1,5;-1)	(2;-1)
(-2;-1,5)	(-1,5;-1,5)	(-1;-1,5)	(-0,5;-1,5)	(0;-1,5)	(0,5;-1,5)	(1;-1,5)	(1,5;-1,5)	(2;-1,5)
(-2;-2)	(-1,5;-2)	(-1;-2)	(-0,5;-2)	(0;-2)	(0,5;-2)	(1;-2)	(1,5;-2)	(2;-2)

Figura 12- Tabela onde observamos após as iterações se o ponto é prisioneiro ou escapa

De seguida os alunos confirmam com o GEOGEBRA, figura 13

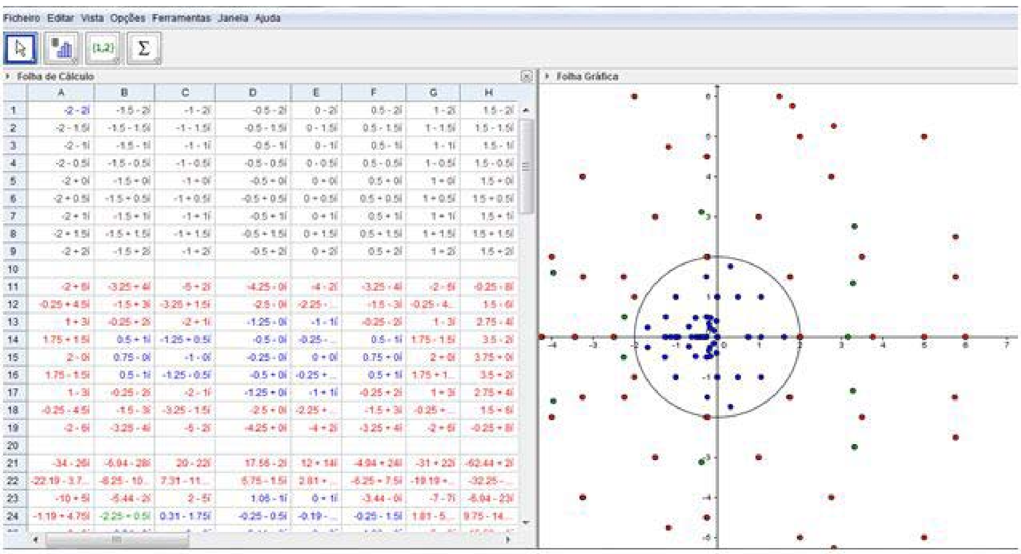

Figura 13- Construção na folha de cálculo e folha gráfica dos cálculos obtidos manualmente

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

Se Iterarmos a mesma matriz com mais cores (iterações) para revelar as próximas camadas, ou melhor, elaborar uma matriz maior vamos obter imagens mais precisas pelo aumento do número de células, o que tem 81 células de cada lado.

Observa a semelhança com matriz acima 9 por 9, mas as bordas mais suaves sobre o círculo e oval. Se aumentarmos o número de células, o que tem 81 células de cada lado, obtemos a figura 14 a seguir.

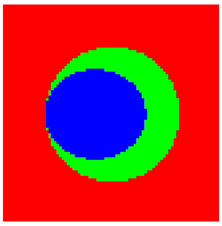

Figura 14- Figura gerada no Máxima

Se aumentarmos o número de cores (iterações), o que tem cada uma das 256 tonalidades de vermelho, verde e azul, para um total de 768 cores. Note que agora podemos ver o contorno do conhecido conjunto de Mandelbrot, dependendo de como se olha para ele).

A desvantagem é o tempo que leva, se conseguirmos calcular cada iteração em 10 segundos, demoramos cerca de 2 horas para cada célula, no conjunto de Mandelbrot. Apesar de que é uma parte relativamente pequena da matriz 81 por 81, provavelmente levaria um ano para concluí-lo, mesmo que trabalha-se-mos com ele várias horas por dia. Este é o lugar onde o silício típico de computador (figura 15) vem a calhar.

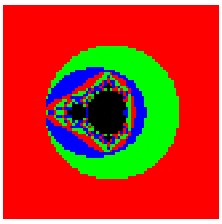

Figura 15- Figura gerada no Máxima

Conclusões

Os fractais utilizando programas específicos são uma mais-valia para o ensino nomeadamente no ensino secundário e básico. Em primeiro lugar, os alunos e professores têm à sua disposição um grande mundo a explorar. Não existe a pretensão de dar (e ainda menos exigir) definições rigorosas e cientificas sobre fractais a alunos do 3ºciclo. Considera-se que os alunos podem adquirir em relativamente pouco tempo, uma ideia implícita do que são os fractais de tal modo que sejam capazes de distinguir os conjuntos de Julia e Mandelbrot.

A exploração dos fractais deve ter um carácter aberto, isto é, os alunos devem partir à aventura, em prol de uma atividade com um plano minucioso, em que os passos estão perfeitamente definidos e ordenados. Por outro lado, sobretudo nas primeiras abordagens, é absolutamente necessário dar algumas indicações de como e por onde começar, senão muitos alunos terão dificuldades em iniciar o seu trabalho.

Apenas os professores poderão decidir em cada caso, a partir do conhecimento que têm dos alunos e da turma em causa, que nível de abertura e que tipo de indicações e sugestões mais apropriadas. Mas tendo sempre em atenção que não é a transmissão de conceitos (do professor para os alunos) e o treino em técnicas, através de exercícios repetidos, mas sim que os alunos pouco a pouco construam o seu próprio conhecimento e façam uma reflexão sobre a maneira de pensar e raciocinar, mediante a criação de situações para explorar ricas e interessantes atividades que constituam verdadeiros desafios.

Os fractais englobam várias modalidades de trabalho dos alunos e do professor. Uma sequência de trabalho, estratégias implementadas no processo de ensino deve visar fundamentalmente, o sucesso dos alunos, ou seja, a sua aprendizagem. Para tal, deve-se criar situações de aula que vão de encontro aos interesses e motivações dos alunos. Considero importante lecionar aulas sobre fractais com ajuda do geogebra pois para além de ser uma mais-valia para os alunos torna as aulas mais atraentes. Por isso considero que os fractais são muito importantes, e fez-me ver que aos utilizar na minha prática letiva nos vários níveis de ensino, os alunos gostam e aprendem a ver a matemática de uma forma mais atraente e apelativa. Este trabalho fez com que descobrisse este excelente software" Geogebra" que

Indagatio Didactica, vol. 5(1), julho 2013 ISSN: 1647-3582

desconhecia como utilizadora, foi a minha primeira experiência e sem dúvida fiquei completamente rendida e aconselho todos que o utilizem.

Agradecimentos

Agradeço a Doutora Sara Dimas Fernandes, minha professora da disciplina de "Caos e Fractais na sala de aula", do mestrado em Matemática Ensino da Universidade de Évora, pelo estímulo, apoio e incentivo, que me tem proporcionado ao longo do semestre, pela sua elevada exigência que me levou a aprofundar cientificamente e me propôs inovação e criatividade, sobre os conjuntos de Julia e Mandelbrot daí o meu desafio com o Geogebra.

Agradeço também José Manuel dos Santos dos Santos, Escola Secundária D. Afonso Sanches / IGP, Porto – Portugal, pelo desafio que me colocou quando me incentivou a fazer uma comunicação no dia do Geogebra em Portugal, no qual apresentei o Conjunto de Mandelbrot. Agradeço também toda a sua ajuda na revisão do meu trabalho e suas sugestões.

A ambos um Bem-haja

Referências bibliográficas

[1] Peitgen ,Jürgens ,Saupe, Fractals for the Classroom , Strategic Activities Two

[2] Peitgen ,Jürgens ,Saupe, Fractals for the Classroom, part two, complex systems and Mandelbrot Set