



Descriptive Geometry Learning is no more threatened by dynamic geometry software than stairs by elevators¹

Vera Viana

Aproged²

veraviana@veraviana.net

Resumo

Pelo presente artigo, pretende-se reflectir sobre o facto de o ensino da disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário necessitar de uma reorientação, no sentido da melhor adaptação à realidade actual, com vista ao desenvolvimento da capacidade de os alunos melhor compreenderem e representarem o espaço tridimensional e interpretarem o que representam.

Paralelamente, procura-se demonstrar as potencialidades que o software GeoGebra apresenta para a explanação de vários conteúdos do programa da disciplina de Geometria Descritiva do Ensino Secundário, exemplificando a mais-valia que pode oferecer para a optimização da didáctica da disciplina, por possibilitar a exploração, em tempo de aula ou como recurso *online*, de construções dinâmicas ou passo-a-passo, facilitadoras do processo de aprendizagem.

Segundo Albert Schmid-Kirsch (1997), "*Computers will go on solving problems that were meant to be solvable by human intuition only [but will] enable us to visualize complex connections in a new and better way*".

Palavras-chave: Geometria Descritiva; Geometria Dinâmica; Aprendizagem; Didáctica; Competência 3D.

Abstract

The present article intends to reflect on the need to reorient the Descriptive Geometry teaching in High Schools, for a better response to the present requirements, aiming

.1- Apropriação da citação de Stephen Fry: "This is the point. One technology doesn't replace another, it complements. Books are no more threatened by Kindle than stairs by elevators" (<https://twitter.com/stephenfry/status/1312682218>)

.2 Associação dos Professores de Desenho e Geometria Descritiva.



so to improve the capacity for students to better understand and represent the tridimensional space and being able to comprehend what they represent.

Alongside this reflection, we intend to exemplify some of the potentialities that GeoGebra software presents for the explanation of various themes on the Descriptive Geometry subject that is taught in Portuguese High Schools, demonstrating some of its advantages: the possibility of exploring, in class or as an online resource, dynamic or step-by-step constructions with the purpose of simplifying the learning process from the student's perspective.

According to Albert Schmid-Kirsch (1997), "*Computers will go on solving problems that were meant to be solvable by human intuition only [but will] enable us to visualize complex connections in a new and better way*".

Key-words: Descriptive Geometry; Dynamic Geometry; Didactics; Learning; 3D-competence.

Resumen

Para este artículo, nos proponemos a especular que la enseñanza de la disciplina de Geometría Descriptiva en la Educación Secundaria necesita de una reorientación, hacia una mejor adaptación a la situación actual, para el proficiente desarrollo de la capacidad del estudiante entender y representar cuestiones del espacio y mejor interpretar aquello que representa.

Paralelamente, se busca demostrar el potencial que software GeoGebra presenta para esclarecer los diversos contenidos del programa de Geometría Descriptiva de la Escuela Secundaria en Portugal, explicitando el gran valor que puede ofrecer para optimizar la enseñanza de la disciplina, por permitir la exploración, en aula o como recurso web, de construcciones dinámicas o concebidas paso a paso, para facilitar el proceso de aprendizaje del punto de vista del alumno.

Nos dice Albert Schmid-Kirsch (1997) que: "*Computers will go on solving problems that were meant to be solvable by human intuition only [but will] enable us to visualize complex connections in a new and better way*".

Palabras-clave: Geometría Descriptiva; Geometría Dinámica; Didáctica; Aprendizaje; Competencia 3D.

O ensino dinâmico da geometria e da geometria descritiva

Nos dias de hoje, é por demais inquestionável a mais-valia que os *softwares* de Geometria Dinâmica vieram proporcionar à didáctica da Geometria e o modo como optimizaram o seu ensino, facilitando, de forma ímpar, a construção do conhecimento dos nossos alunos através da experiência dinâmica da descoberta e, ao longo do processo, a apetência para a aprendizagem da Matemática.

De modo idêntico, este tipo de *software* abriu novas possibilidades para o ensino da Geometria Descritiva, proporcionando a introdução de uma componente dinâmica na sua didáctica, que permite ao aluno visualizar graficamente várias possibilidades a partir de uma única situação concreta e, deste modo, compreender o que permanece constante naquilo que é variável. A partir desta compreensão, facilmente poderá o aluno deduzir as invariantes nos elementos e figuras geométricas em estudo e interiorizar as suas propriedades, para mais claramente compreender o que representa e como o representa (figura 1).

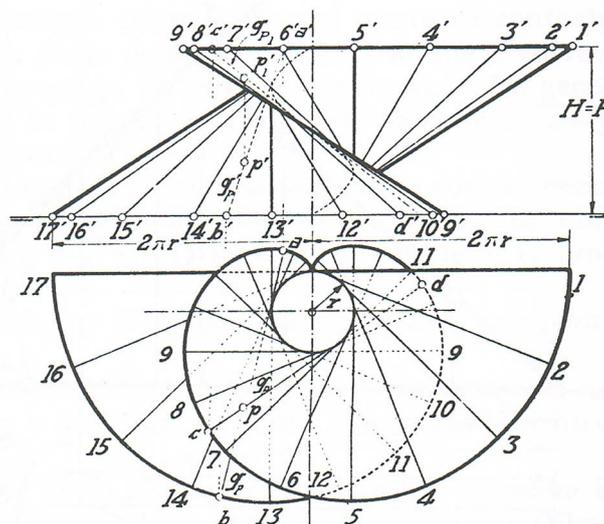


Figura 1 - Helicóide planificável, Ángel Taibo, 1947

Reportando-nos à Geometria Descritiva, cabe salientar que esta é uma disciplina frequentemente conotada como difícil, demasiado abstracta, muito exigente e dada a certas dificuldades de aprendizagem. Esta perspectiva algo redutora tem, de alguma forma, minado a consideração que a disciplina merece e a importância de que o seu estudo se reveste no Ensino Secundário. Julgamos por isso



necessário, no presente contexto, salientar a importância que tem para os alunos desta faixa etária o desenvolvimento da capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional, aliada à possibilidade de desenvolver o raciocínio e a capacidade de abstracção. Não sendo esta particularmente difícil de conquistar, tomando como ponto de partida uma certa dedicação ao estudo da disciplina, poderão os alunos então progredir, de modo a alcançar patamares graduais de desenvolvimento cognitivo e adquirir competências diversas associadas à literacia visual, cada vez mais imprescindíveis na cultura predominantemente visual em que vivemos.

Se, desejavelmente, a escola puder investir, na formação dos alunos, ao nível do desenvolvimento da percepção e compreensão do espaço e sua representação, se possível, com particular incidência na literacia informática através da exploração de *softwares* de visualização e modelação tridimensional, melhor preparados estarão os alunos, em última instância, para a competitividade do mercado de trabalho e para a sua empregabilidade (figura 2).

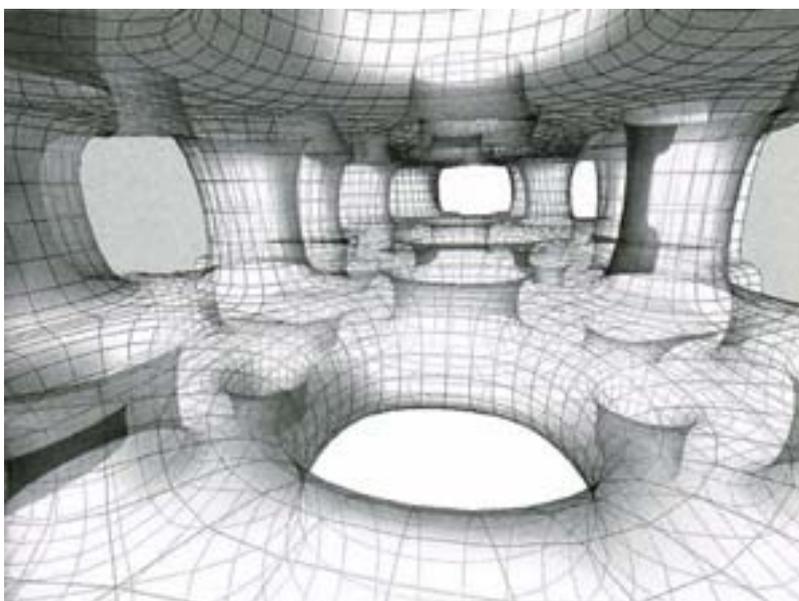
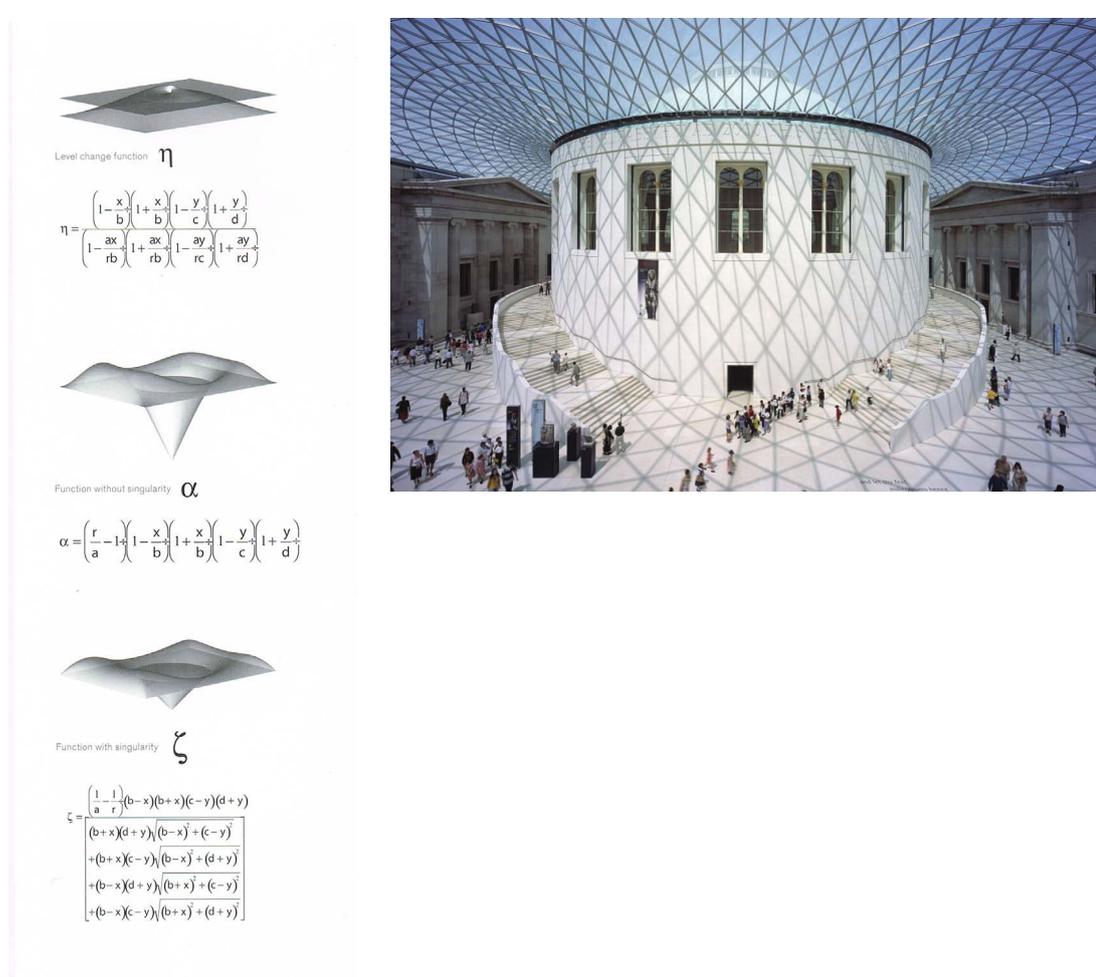


Figura 2 - Taichung Metropolitan Opera House. Toyo Ito

Por esta via poderá, julgamos, o ensino e a aprendizagem da Geometria Descritiva conseguir adaptar-se de melhor forma às imposições actuais, que em áreas profissionais relacionadas com a Arquitectura, a Engenharia ou o Design, cada



vez mais exigem capacidades de trabalho estreitamente relacionadas com a manipulação de *software* de CAD e de visualização e modelação tridimensional, para a qual a efectiva interiorização de conhecimentos de Geometria e de Geometria Descritiva são imprescindíveis pré-requisitos (figuras 3a e 3b).



Figuras 3a e 3b - British Museum Great Court. Foster and Partners.

Como possível resposta a estas novas exigências e em face de tanta e tão versátil tecnologia ao alcance de todos, é por demais evidente que o ensino da Geometria Descritiva deve reconhecer a necessidade de uma reorientação,



sem que os objectivos que norteiam o processo de ensino-aprendizagem da disciplina deixem de ser contemplados. Continuamos a considerar como fulcral que quem recebe formação no Ensino Secundário para, futuramente, lidar com as questões do espaço e as representar, desenvolva a sua capacidade de ver e de compreender as figuras e sólidos geométricos no espaço e suas posições relativas; de os representar no plano bidimensional e, inversamente, da sua representação deduzir a sua configuração e depreender a sua posição no espaço, continuando a atender aos objectivos definidos por Gaspard Monge em 1799:

“La Géométrie Descriptive a deux objets: le premier, de donner les méthodes pour représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature, qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement.

Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent de leur forme et de leur positions respectives.”

Consideramos, portanto, fundamental que o ensino actual da Geometria Descritiva proporcione o desenvolvimento da “competência 3D” de que fala Stachel (2007), através do qual os nossos alunos, sustentados por novas tecnologias que melhor os preparam para a realidade actual, sejam capazes de compreender, interpretar e representar a Geometria do espaço (figura 4). Deste modo poderão, através da exploração de diferentes *softwares*, segundo o mesmo autor, resolver “*more and more complex problems using computer software as a 'black box' while there is still a lack of basic understanding*”, sem que, para tanto, deixem de ser fundamentais profundos conhecimentos de Geometria e de Geometria Descritiva.

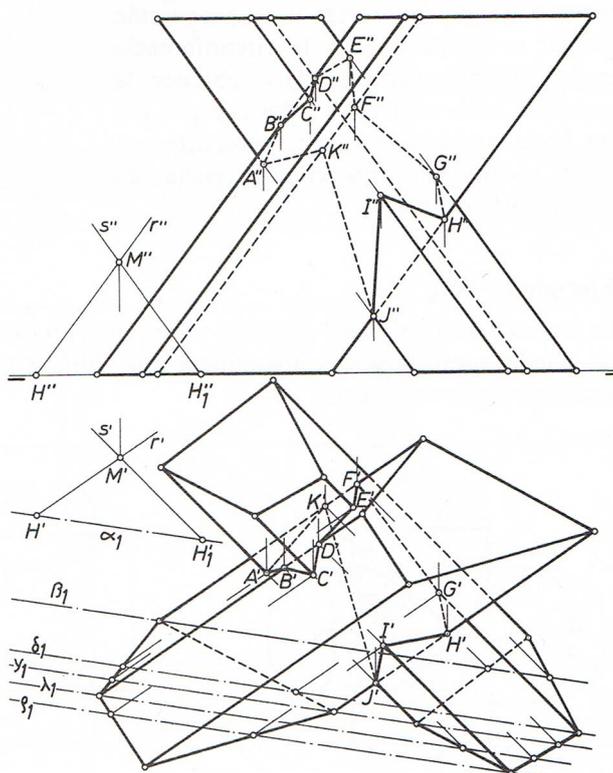


Figura 4 - Prismas quadrangulares oblíquos – F. J. Rodrigues de Abajo

A didáctica da Geometria Descritiva

Embora a utilização dos computadores seja uma realidade nas nossas escolas, muitas vezes se verifica que o ensino da Geometria Descritiva se continua, em grande parte dos casos, a processar pela via mais tradicional, precisamente na disciplina que, por excelência, tão imenso potencial encerra, porque trata da representação de situações concretas que podem ser materializadas (ainda que virtualmente) e recria situações específicas no plano, com vista à sua compreensão no espaço.

Na maior parte das vezes, o professor resolve os exercícios em tempo de aula em simultâneo com os alunos, utilizando, em determinadas situações, modelos tridimensionais que exemplificam a relação dos objectos no espaço, de modo a

que os alunos melhor compreendam o que se pretende representar. A determinada ponto, esse recurso deixa de ser necessário, por se depreender que o aluno interiorizou a abstracção necessária para deduzir, do que representa, a respectiva correspondência no espaço tridimensional (figura 5).

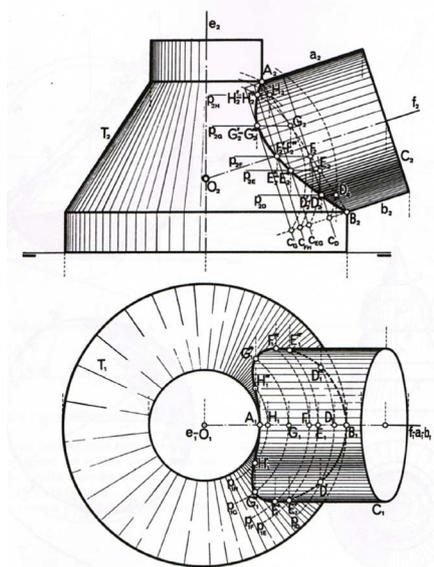


Figura 5 - Cone e cilindro de eixos concorrentes – F. Izquierdo Asensi

E é ao longo de todo este processo que um *software* de geometria dinâmica tão intuitivo como o GeoGebra pode intervir, permitindo, por exemplo, que o aluno visualize situações em que a trajetória de um ou mais elementos de uma determinada situação é graficamente registada, para deduzir, das diferentes possibilidades representadas, “as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos” (Xavier & Rebelo, 2001, p. 4).

Muito embora a utilização de *software* em sala de aula para a didáctica da Geometria Descritiva traga benefícios indiscutíveis, ao nível do Ensino Secundário, persistem muitas hesitações e, em alguns casos, uma certa rejeição quanto à introdução do *software* de Geometria Dinâmica em contexto de sala de aula, por se considerar que este, de alguma forma, desvirtua a aprendizagem da disciplina, limita o trabalho do Professor ao nível da concepção de exercícios, tornando-os, alegadamente, “impessoais” ou menos interessantes do que qualquer outra situação realizada nos suportes tradicionais.

A nossa experiência docente neste âmbito tem-nos provado precisamente o



contrário: a par da utilização de materiais didáticos tridimensionais, os alunos tendem a interessar-se mais pela disciplina, em virtude da perspectiva dinâmica que a sua aprendizagem assume, pela possibilidade de interagir com as situações apresentadas e, inegavelmente, pela motivação que a exploração de *software* em tempo de aula proporciona a todos.

Relativamente à prática docente, apresenta, de facto, alguns constrangimentos iniciais decorrentes do desconhecimento natural do *workflow* do *software*, que com o devido tempo poderão ser facilmente ultrapassados, de modo a que a sua utilização se torne recorrente e, com o tempo, imprescindível, por forma a explorar as várias potencialidades que o *software* possibilita para a didáctica da disciplina de Geometria Descritiva. Mesmo um certo cunho pessoal na concepção dos exercícios não deixará de poder ser incluído, como, de resto, o Professor sempre pôde fazer, utilizando os suportes tradicionais.

Atente-se, a propósito, na figura 6, que consta de uma publicação datada de 1909 e constitui, em nosso entender, um exemplo perfeito e muito evidente da representação diédrica de cinco localizações diferentes de um quadrado com uma diagonal vertical. Embora a sua representação num *software* de geometria dinâmica não fosse muito diferente daquela a que nos referimos, representaria, de forma bastante interessante, julgamos, a descrição gráfica da deslocação do plano do quadrado em torno do eixo vertical, apresentando todas as situações descritas por esse movimento.

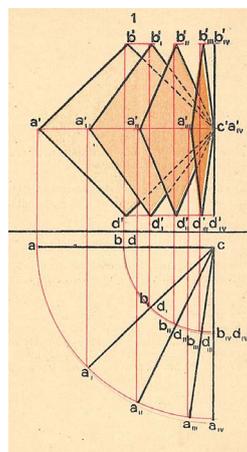


Figura 6 – Estampa 2, Livro IV, Marques Leitão, 1909



- Sistema de representação axonométrica, segundo o qual os elementos e as figuras geométricas são representados, no plano bidimensional, segundo uma única projecção, definida pela intersecção das rectas projectantes com o plano [axonométrico] de projecção, a que as projectantes têm direcção ortogonal ou clinogonal. A projecção obtida tem a designação de axonometria e corresponde ao que observaríamos do objecto se este tivesse pequena dimensão e se encontrasse a pequena distância do observador (figura 8).

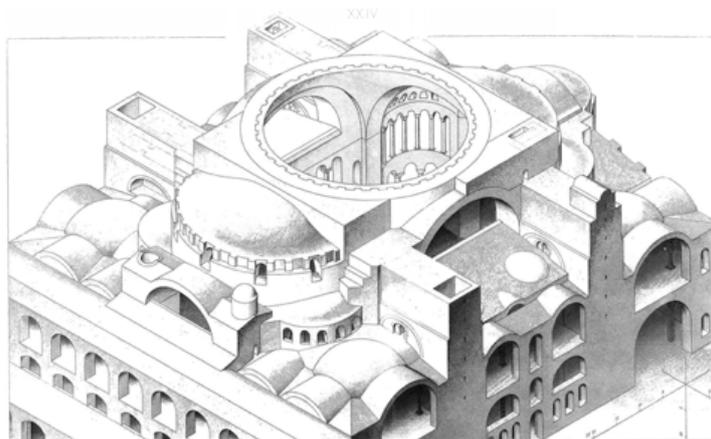


Figura 8 – Basílica de santa Sofia em Istanbul, Auguste Choisy, 1883

O ensino dinâmico da Geometria Descritiva – uma experiência

A seguir apresento alguns exemplos construídos com o GeoGebra para a didáctica da Geometria Descritiva, que lecciono no ensino público há cerca de 20 anos e, desde 2001, com recurso a *softwares* de Geometria Dinâmica (e mais recentemente, ao *software* de modelação tridimensional *Rhinoceros*).

Da exploração levada a cabo em cinco *softwares* de geometria dinâmica diferentes, considero que o GeoGebra é o de mais fácil utilização e com o *interface* mais intuitivo, com uma acessibilidade às ferramentas e funções a que não encontro paralelo. É ainda o que melhor se adequa à construção de exercícios desta disciplina, que requer diferenciações de traço e de espessura que nem todos os *softwares* possibilitam.

Dada a facilidade de exportação das construções realizadas no GeoGebra para o formato *html* e sua incorporação em páginas *web*, tenho publicado *online* as construções que considero poderem ajudar os alunos a melhor compreender

alguns dos conteúdos do programa da disciplina e, desejavelmente, ao longo deste processo, cativar o interesse de outros que ainda a não conheçam.

A minha experiência lectiva e as reacções que tenho recebido pela inclusão de construções dinâmicas *online* em resposta a este projecto pessoal que desenvolvo desde 2007, têm sido bastante positivas e muito gratificantes, principalmente por saber que, de algum modo, tenho contribuído para a optimização do processo de aprendizagem dos alunos e para, ao longo do processo, motivar os alunos para a disciplina.

Os exemplos apresentados pretendem evidenciar as potencialidades de que mais usufruo no GeoGebra:

- A execução de qualquer construção com um rigor e clareza de traçados inigualáveis, para exportação como imagem vectorial;
- A exportação das construções realizadas em gif animado ou em formato html, para fácil incorporação em diapositivos ou em páginas web;
- A construção de exercícios passo-a-passo para apresentação de exercícios com que os alunos interagem, para acompanhar a sua resolução de acordo com o ritmo pretendido:

No link da figura 9, é apresentado um exemplo de resolução passo-a-passo da representação diédrica de uma pirâmide recta, dado um dos apótemas da base, que é hexagonal e horizontal.

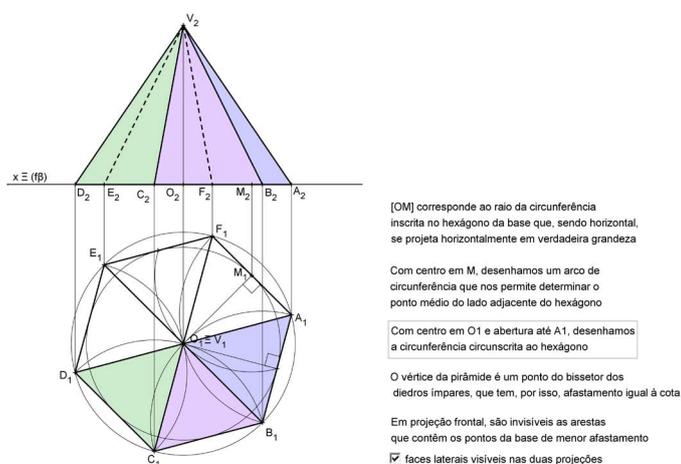


Figura 9 - Representação diédrica passo-a-passo de uma pirâmide recta de base horizontal

-A animação de pontos prévios da construção para alterar a localização de elementos e figuras subsequentes, de modo a atestar posicionamentos diferentes para o resultado pretendido, apresentando diversas possibilidades que, a serem realizadas nos suportes tradicionais, seriam bastante morosas, se não mesmo, desnecessárias:

A partir do link da figura 10, vemos a representação diédrica da secção produzida num cone de base horizontal por um plano projectante frontal e , através da animação da direcção do eixo do cone e da orientação do plano secante, a figura de secção produzida (que, pelo facto de o plano ser oblíquo a todas as geratrizes, tem configuração elíptica ou circular).

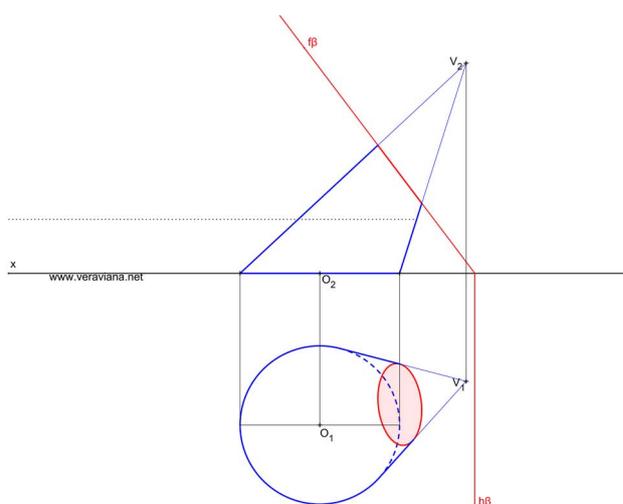


Figura 10 - Representação diédrica da secção produzida num cone oblíquo por um plano projectante frontal, com animação simultânea da direcção do eixo e da orientação do plano secante

O link da figura 11 permite-nos ver a representação da visibilidade/invisibilidade das arestas de uma pirâmide recta de base hexagonal horizontal, com a deslocação simultânea de um vértice da base e do vértice da pirâmide.

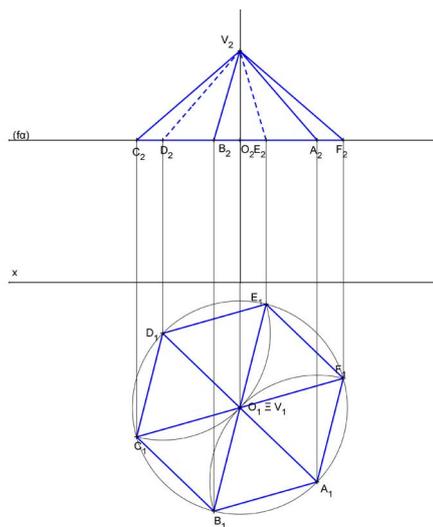


Figura 11 - Representação diédrica de uma pirâmide recta de base horizontal, com animação simultânea da base e do vértice

No [link](#) da figura 12, vemos a representação axonométrica ortogonal da secção de um cubo pelo plano perpendicular ao eixo de simetria de cada vértice e a situação resultante que, em determinada localização do vértice gerador do movimento, corresponde a um sólido Arquimediano: o cubo truncado e o cuboctaedro.

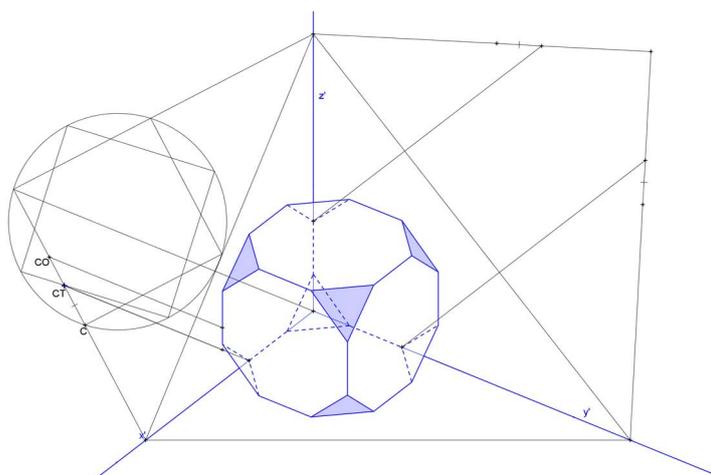


Figura 12 - Representação axonométrica ortogonal do sólido obtido por truncagem de um cubo pelo plano perpendicular ao eixo de simetria de cada vértice, com animação de um dos vértices

- A possibilidade de ocultar/mostrar partes de uma construção:

No link relativo à construção da figura 13, vemos a representação, axonométrica clinogonal (em perspectiva cavaleira) dos planos de projecção do sistema de representação diédrica e de uma pirâmide de base hexagonal horizontal, cujo vértice se desloca paralelamente à base, de modo que a pirâmide varia entre recta e oblíqua. Ao lado desta representação, a respectiva épura que, em interdependência, permite compreender a sua correspondência biunívoca. As projecções da pirâmide podem ser ocultadas da representação em perspectiva, para melhor visualização desta representação.

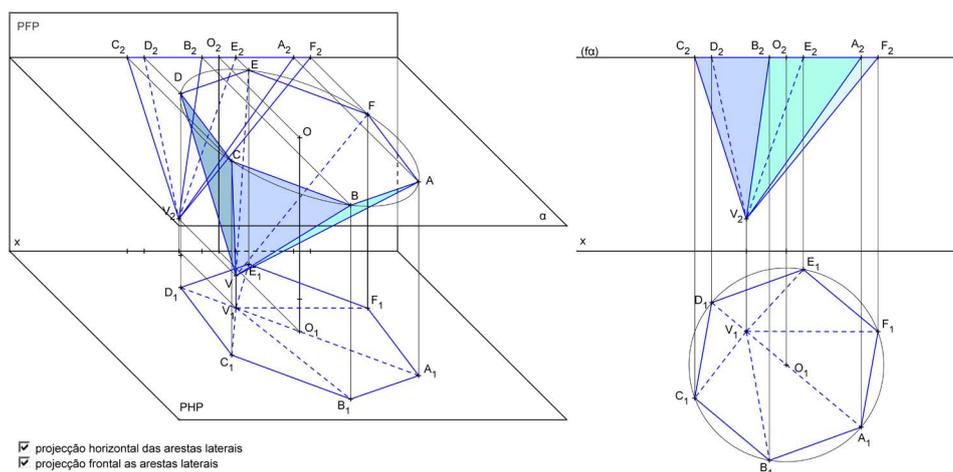


Figura 13 - Representação em perspectiva cavaleira dos planos de projecção e de uma pirâmide de base horizontal e respectiva representação diédrica, com animação do vértice

O link da figura 14, mostra-nos a representação em perspectiva cavaleira dos planos de projecção e de um prisma recto de bases hexagonais horizontais com deslocação da base inferior, de modo que a altura do prisma é variável. Ao lado desta representação, a épura respectiva permite compreender a sua correspondência biunívoca. Apresenta várias caixas para mostrar/esconder partes da construção, para melhor compreensão da sua representação.

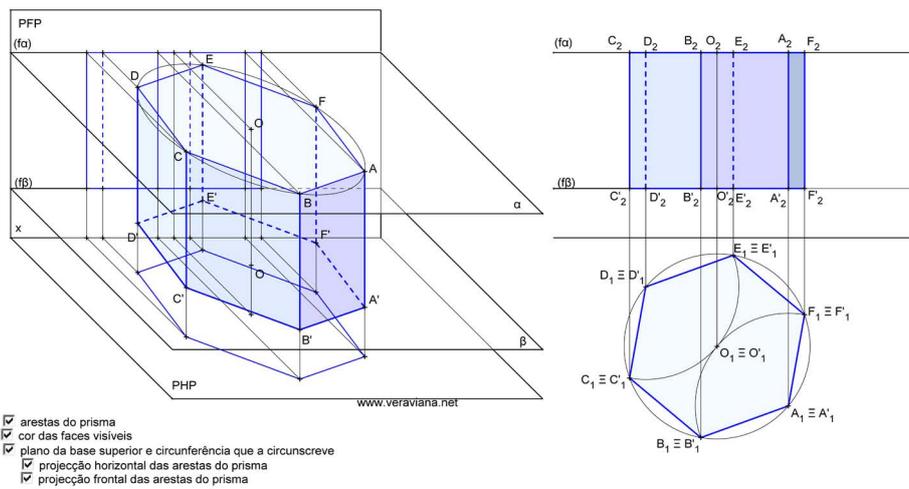


Figura 14 - Representação em perspectiva cavaleira dos planos de projecção e de um prisma recto de bases horizontais e respectiva representação diédrica, com animação da base de cota inferior

A partir do *link* da figura 15, mostram-se, no sistema de representação axonométrica (ortogonal), várias construções respeitantes à secção do cubo por um plano com diferentes orientações e respectivas conclusões.

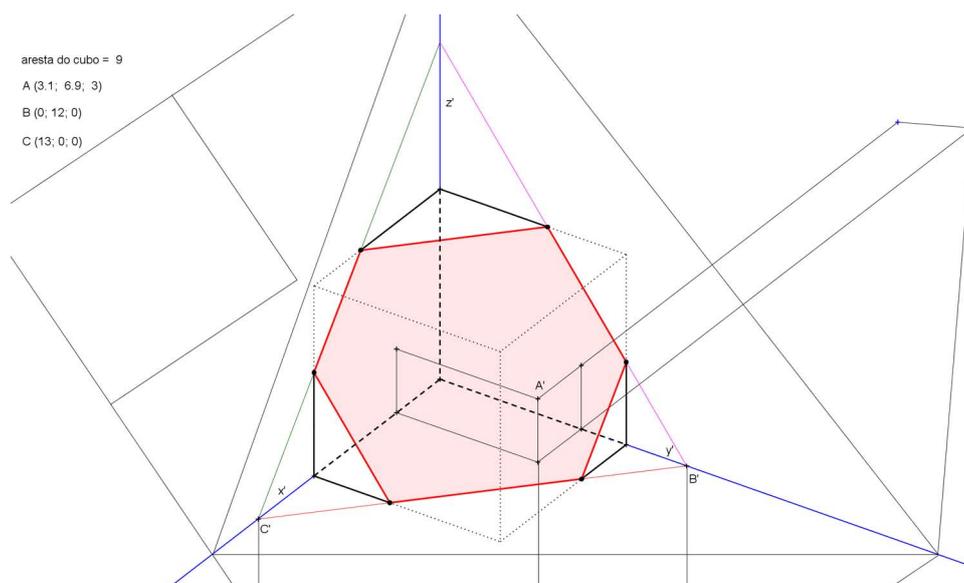


Figura 15 - Representação axonométrica ortogonal da secção de um cubo



Conclusão

Em jeito de conclusão, cabe reforçar que a didáctica da Geometria Descritiva nada tem a perder com a introdução de um *software* de Geometria Dinâmica tão versátil como o GeoGebra (para não referir a prometedor versão 3D), nem tão pouco sairá prejudicada com a exploração de *software* de modelação tridimensional em tempo de aula, muito pelo contrário.

Aprendemos melhor Geometria e Geometria Descritiva quando as exploramos de forma dinâmica, pelo facto de, pela experimentação, deduzirmos as conclusões a retirar. E aprendemos melhor determinados conteúdos da Geometria Descritiva, se a visualizarmos de forma dinâmica e, quando possível, manuseando os modelos tridimensionais em estudo, sejam estes reais ou virtuais.

Parafraseando Stephen Fry, o autor que serviu de inspiração ao título deste artigo, uma nova tecnologia não substitui a anterior, pelo contrário, complementa-a. Cabe-nos a nós sabermos adaptá-la e utilizá-la, segundo Chaves (2000) "*como uma ferramenta de aprender, isto é, como uma tecnologia que pode facilitar, da parte dos alunos, o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para que aprendam a aprender e para que aprendam sempre.*"

Referências Bibliográficas

- CHAVES, E. O. C. (2000). *Professor e a Tecnologia: Um Encontro Possível com a Filosofia Educação: Revista da Associação Brasileira de Educação (ABE)*, Ano 32, nº 102.
- KING, James R. & SCHATTSCHNEIDER Doris (2003). *Geometria dinâmica: selecção de textos do livro Geometry Turned On!* Ed. Associação de Professores de Matemática
- MONGE, G. (ed. 1989). *Géometrie Descriptive*. Éditions Jacques Gabay
- SCHMID-KIRSCH, A. (1997). *Teaching Descriptive Geometry at the Faculty of Architecture*. *Journal for Geometry and Graphics* Volume 1 No. 1, p.75-82
- STACHEL, Hellmuth (2007). *The Status of Today's Descriptive Geometry Related Education (CAD/CG/DG) in Europe*.
<http://www.aproged.pt/biblioteca/stachel.pdf> [em 17/05/2013]
- XAVIER, J.P. e REBELO, J.A. (2001). *Programa de GEOMETRIA DESCRITIVA A - 10º e 11º ou 11º e 12º anos de escolaridade*



<http://www.aproged.pt/pdf/geometriaa.pdf> [em 17/05/2013]

Imagens

Figura 1 - TAIBO, A. (1943). Geometria Descriptiva e sus aplicaciones [3 volumes]. Madrid: s/ed

Figura 2 - MUTSURO, S., MEREDITH, M., DESIGN TO PRODUCTION ARANDA/LASCH. (2008). From Control to Design – Parametric/algorithmic Architecture. Editions Actar

Figura 3 - BURRY, J. & BURRY, M. (2010) The New Mathematics of Architecture. Thames & Hudson

Figura 4 - ABAJO, F. J. R. (1992). Geometria Descriptiva - Sistema Diédrico. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Figura 5 - ASENSI, F. I. (1985). Geometria Descriptiva. Madrid: Editorial Paraninfo

Figura 6 - LEITÃO, C.A. M. (1909). Desenho. Fernandes e Companhia Editores

Figura 7 - CARREIRA, A. (1972). Compêndio de Desenho [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Livraria Sá e Costa.

Figura 8 - <http://www.augustechoisy2009.net/>

Figura 9 - <http://www.veraviana.net/diedpassoapassosld.html#piramideapotema>

Figura 10 - <http://www.veraviana.net/dieddinamicassc.html#circunferencia>

Figura 11 - <http://www.veraviana.net/dieddinamicassld.html#variavel>

Figura 12 - <http://www.veraviana.net/arquimedianos.html#doisarquimedianos>

Figura 13 - <http://www.veraviana.net/dieddinamicassld.html#pirmhz>

Figura 14 - <http://www.veraviana.net/dieddinamicassld.html#prismahz>

Figura 15 - <http://www.veraviana.net/axonortogonais.html#seccubo>