



## Caixas de Primitivas e Gémeos Trigonométricos

## Boxes of Antiderivatives and Trigonometric Twins

## Scatole di primitive e gemelli trigonometrici

**Ana Paula Nolasco**

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
anolasco@ua.pt  
<https://orcid.org/0000-0002-3483-675X>

**Maria Paula Oliveira**

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
paula.oliveira@ua.pt  
<https://orcid.org/0000-0002-6376-1099>

**Paolo Vettori**

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
pvettori@ua.pt  
<https://orcid.org/0000-0002-5029-8314>

### Resumo

O uso de jogos de tabuleiro no ensino da Matemática pode ser uma estratégia eficaz para tornar a aprendizagem mais envolvente e significativa. Neste trabalho, apresentamos jogos matemáticos que podem auxiliar no ensino de primitivas e funções trigonométricas inversas, conceitos fundamentais num curso de Cálculo. A utilização de jogos como recurso didático estimula o raciocínio lógico, promove a aprendizagem ativa e fomenta o trabalho em equipa, incentivando a colaboração entre os alunos. Além disso, ao transformar desafios matemáticos numa experiência lúdica, os jogos podem reduzir a ansiedade em relação ao tema e melhorar a compreensão dos conteúdos. A abordagem proposta busca aliar teoria e prática, demonstrando que o ensino de Matemática pode ser tanto desafiador quanto motivador.

**Palavras-chave:** jogos; Matemática; aprendizagem ativa; trabalho colaborativo.

### Abstract

The use of board games in maths teaching can be an effective strategy for making learning more engaging and meaningful. In this paper, we present mathematical games that can help teach antiderivatives and inverse trigonometric functions, fundamental concepts in a Calculus course. Using games as a teaching resource stimulates logical thinking, promotes active learning and fosters teamwork, encouraging collaboration between students. In addition, by transforming



mathematical challenges into a playful experience, games can reduce anxiety about the subject and improve understanding of the content. The proposed approach seeks to combine theory and practice, demonstrating that maths teaching can be both challenging and motivating.

**Keywords:** games; maths; active learning; collaborative work.

### Abstract

L'uso di giochi da tavolo nell'insegnamento della matematica può essere una strategia efficace per rendere l'apprendimento più coinvolgente e significativo. In questo lavoro presentiamo giochi matematici che possono aiutare a insegnare le primitive e le funzioni trigonometriche inverse, concetti fondamentali in un corso di calcolo. L'uso dei giochi come risorsa didattica stimola il pensiero logico, promuove l'apprendimento attivo e favorisce il lavoro di gruppo, incoraggiando la collaborazione tra gli studenti. Inoltre, trasformando le sfide matematiche in un'esperienza ludica, i giochi possono ridurre l'ansia nei confronti della materia e migliorare la comprensione dei contenuti. L'approccio proposto cerca di combinare teoria e pratica, dimostrando che l'insegnamento della matematica può essere stimolante e motivante.

**Parole chiave:** giochi; matematica; apprendimento attivo; lavoro collaborativo.

## Introdução

No século XXI, o papel do docente deve adaptar-se à realidade de um mundo global, onde *a internet sabe tudo*. É importante que dotemos os nossos estudantes de pensamento crítico e competências de comunicação, trabalho em equipa e autoconfiança, e não tanto de procedimentos rotineiros que podem facilmente encontrar na internet.

Na Universidade de Aveiro, Cálculo I é uma disciplina obrigatória para os programas de ciência e engenharia do 1.º ano. No nosso caso, em 2024/25 tivemos cerca de cinco centenas de estudantes, de oito cursos diferentes, distribuídos por onze turmas e cinco docentes. Como afirmam Iannella, Morando, & Spreafico (2022), “O principal objetivo das disciplinas de Cálculo dos cursos científicos gerais é introduzir os estudantes ao método científico de análise, proporcionando uma linguagem adequada e competências úteis para enfrentar efetivamente outras disciplinas. Infelizmente, isso não acontece com frequência.” Todos os anos académicos temos de lidar com diferentes perfis e formações dos estudantes de uma variedade de cursos, muitas vezes não motivados para o estudo da Matemática. “Desenhar ações para promover a motivação e aumentar o envolvimento dos estudantes torna-se um desafio essencial para qualquer docente” (Morando & Torconi, 2022).

Vankúš (2021) relembra que “A ideia de jogos como ferramenta educativa não é nova, foi originalmente concebida pelos filósofos helénicos, Platão e Aristóteles”, e também afirma que “Na área da Matemática, os jogos educativos foram identificados como adequados para promover conquistas Matemáticas em vários domínios.” Após muitos anos a lecionar Cálculo, utilizando diferentes estratégias para envolver os estudantes no seu processo de aprendizagem, nomeadamente sala de aula invertida e aprendizagem baseada em equipa, decidimos utilizar, em algumas



aulas ao longo do semestre, jogos de tabuleiro, seguindo as sugestões de Morando & Torconi (2022). Paola Morando e Sonia Spreafico são criadoras e dinamizadoras da utilização de jogos em todos os níveis de ensino, desde o primeiro ciclo do ensino básico ao ensino superior, e o trabalho desenvolvido com elas — nomeadamente em workshops realizados em Portugal e em Itália — levou-nos a implementar as suas ideias.

Neste contexto, torna-se pertinente refletir sobre o papel de abordagens lúdicas e interativas no ensino do Cálculo I, uma unidade curricular que se revela especialmente desafiante para grande parte dos estudantes. Tratando-se de uma disciplina fundamental, cuja compreensão sólida é indispensável para o progresso académico em áreas científicas e tecnológicas, torna-se imperativo adotar estratégias que favoreçam uma aprendizagem mais ativa, envolvente e eficaz.

A literatura tem evidenciado os benefícios do uso de jogos no ensino da Matemática, particularmente ao nível do reforço da motivação, da consolidação de conceitos e do estímulo ao raciocínio lógico e ao trabalho colaborativo (Nunes & Lopes, 2023). Ao promoverem ambientes de aprendizagem mais participativos e centrados no estudante, os jogos didáticos configuram-se como ferramentas pedagógicas valiosas para a superação de dificuldades conceptuais e para a promoção do pensamento crítico.

Este artigo descreve um conjunto de jogos desenvolvidos e aplicados no âmbito da unidade curricular de Cálculo I, com objetivos pedagógicos bem definidos e alinhados com os conteúdos da disciplina. Os jogos — “Adivinha quem sou”, “A regra misteriosa”, “Gêmeos Matemáticos” e “As caixas de primitivas” — foram concebidos para explorar diferentes tópicos do programa, promovendo simultaneamente a revisão de conhecimentos prévios, o desenvolvimento de competências analíticas e a criação de dinâmicas colaborativas em sala de aula.

Através da descrição detalhada das dinâmicas de cada jogo, dos seus objetivos pedagógicos e da forma como foram implementados com os estudantes, pretende-se partilhar com a comunidade académica uma proposta concreta de inovação pedagógica no ensino do Cálculo, passível de ser adaptada a diferentes contextos e níveis de ensino. A utilização dos jogos em sala de aula integrou uma metodologia de ensino que envolvia a realização de tarefas em sala de aula e em grupo, e outras estratégias de aprendizagem ativa e que está descrita em (Nolasco, Oliveira, & Vettori, 2025).

## **A importância do trabalho em equipa e a utilização de jogos no ensino de Matemática**

O trabalho em equipa em contexto de sala de aula, especialmente na disciplina de Matemática, oferece uma série de benefícios importantes para os estudantes. Em primeiro lugar, promove a colaboração e a comunicação entre os colegas, competências essenciais no mundo atual. Quando os estudantes trabalham juntos para resolver problemas matemáticos, têm a oportunidade de partilhar ideias e discutir diferentes abordagens, o que enriquece a sua compreensão dos tópicos em estudo.

Além disso, o trabalho em equipa aumenta a motivação e o envolvimento dos estudantes. Sabendo que são responsáveis não só pelo seu próprio sucesso, mas também pelo sucesso do



grupo, os estudantes tendem a sentir-se mais comprometidos com a tarefa em mãos. Este tipo de dinâmica também ajuda a criar um ambiente de apoio mútuo, onde os estudantes se sentem mais confortáveis em fazer perguntas e expressar as suas dúvidas.

Outra vantagem significativa é o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Trabalhando em conjunto, os estudantes podem abordar problemas complexos de diferentes ângulos e encontrar soluções mais eficazes do que conseguiriam individualmente. Isto é particularmente relevante em Matemática, onde a capacidade de ver um problema sob múltiplas perspetivas pode ser crucial para encontrar a solução correta.

Finalmente, a prática de ensinar os colegas é uma das formas mais eficazes de consolidar o próprio conhecimento. Quando os estudantes explicam conceitos e métodos aos seus pares, estão a reforçar a sua própria compreensão e a identificar quaisquer lacunas no seu conhecimento. Este processo de ensino mútuo é extremamente valioso para a aprendizagem, nomeadamente de Matemática.

### Importância dos jogos em sala de aula

Os jogos não só facilitam a interação entre os estudantes, mas também criam um ambiente de aprendizagem ativo e colaborativo. Ao participarem em jogos de equipa, os estudantes são incentivados a trabalhar juntos, discutir ideias e chegar a conclusões coletivas. Esta dinâmica de grupo é essencial para desenvolver habilidades de comunicação e trabalho em equipa.

Podem sintetizar-se em cinco pontos chave as vantagens do uso de jogos no ensino de Matemática:

1. **Desenvolvimento Cognitivo:** Os jogos matemáticos estimulam o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a tomada de decisões. Eles permitem que os alunos explorem conceitos matemáticos de maneira prática e concreta, facilitando a compreensão e a retenção do conhecimento. Como referem Balestra & Gequelin (2008), “Os jogos são recursos pedagógicos que permitem construir o conhecimento matemático”.
2. **Envolvimento e Motivação:** A natureza lúdica dos jogos torna as aulas mais atrativas e envolventes. Os alunos tendem a participar mais ativamente das atividades, o que aumenta a motivação e o interesse pela Matemática.
3. **Aprendizagem Colaborativa:** Os jogos promovem a colaboração e a comunicação entre os alunos. Trabalhar em equipa para resolver problemas matemáticos ajuda a desenvolver habilidades sociais importantes, como a cooperação, o respeito às opiniões dos colegas e a capacidade de argumentação.
4. **Redução da Ansiedade:** Muitos alunos sentem ansiedade em relação à Matemática. Os jogos podem ajudar a reduzir essa ansiedade, criando um ambiente mais descontraído e acolhedor, onde os alunos se sentem mais à vontade para fazer perguntas e expressar as suas dúvidas.
5. **Avaliação Formativa:** Os jogos oferecem aos professores uma ferramenta valiosa para avaliar o progresso dos alunos de forma contínua e informal. Observando como os alunos interagem com os jogos, os professores podem identificar dificuldades e ajustar as suas estratégias de ensino conforme necessário.



O uso de jogos no ensino vem sendo uma prática comum e benéfica para a aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino. “Os jogos contribuíram para um ambiente descontraído, prazeroso e propício ao processo ensino e aprendizagem, não deixando dúvidas da sua importância e necessidade nas aulas de Matemática” (Acruchi Alves & Victor, 2022).

Os mesmos autores referem ainda que os jogos são ferramentas práticas e de baixo custo, que podem ser adaptadas às necessidades de cada turma.

Piaget, citado em Araujo (2020), afirma que “[...] em todo lugar onde se consegue transformar em jogo a iniciação à leitura, ao cálculo, ou à ortografia, observa-se que as crianças se apaixonam por essas ocupações comumente tidas como maçantes”, e afirma ainda, citado em Acruchi Alves & Victor (2022), “O ensino em todos os níveis de educação precisa ser fundamentado na atividade, interação, troca, fazer, pensar, o reagir em situações que são apresentadas ao educando e ter habilidades para criar um ambiente, nos quais as crianças sejam ativas, que façam atividades em clima de interação e ajuda mútua, valorizando e respeitando suas individualidades”.

### Exemplos de Jogos para Aulas de Matemática

O conceito de Escape Room como atividade recreativa alargou-se à sala de aula. Em Pais, Sousa, & Lopes (2024) as autoras descrevem uma sala virtual implementada numa unidade curricular de Matemática para estudantes de cursos de Turismo e de Gestão Hoteleira. Os tópicos matemáticos usados nesta Escape Room virtual foram Primitivas e Cálculo Integral. Para se deslocar de uma sala para outra os estudantes tinham de resolver um problema. Os conteúdos podem ser diversos e o jogo pode ser adaptado a um tabuleiro onde cada casa representa um problema diferente, que pode ser dentro da mesma temática ou de temáticas diferentes. Este tipo de jogo desenvolve o pensamento lógico e técnicas para resolução de problemas.

Em workshops dinamizados por Paola Morando e Sonia Spreafico, quer em Portugal quer em Itália, foram apresentados vários jogos para os diferentes níveis de ensino e que podem ser adaptados a diferentes públicos e diferentes conteúdos. Refira-se, a título de exemplo, o jogo Matabu (matemático).

### Matabu

O tópico abordado é Funções, Gráficos e Linguagem Matemática. Este jogo de equipa envolve pelo menos duas equipas, cada uma composta por 4 ou 5 estudantes. O objetivo é desenhar o maior número possível de gráficos dentro de um tempo estipulado, que neste caso é de 3 minutos.

Para realizar o jogo, são necessários os seguintes materiais:

- um baralho de cartas com 160 gráficos de funções;
- um cronómetro ou uma ampulheta;
- um quadro onde possam desenhar.



Depois de baralhar as cartas, decide-se qual a equipa que começa. Na sua vez, a equipa escolhe um desenhador (um diferente de cada vez) que se dirige ao quadro. A ampulheta é iniciada e os membros da equipa viram a primeira carta do baralho e tentam descrever o gráfico da função ao desenhador, que, sem o ver, deve reproduzi-lo no quadro seguindo as instruções dos seus colegas de equipa.

Sempre que a equipa considera que o gráfico desenhado está correto, declara-o e se ainda não tiver esgotado o seu tempo passa para a carta seguinte e tenta desenhar mais um gráfico. A equipa adversária deve sempre verificar se os gráficos desenhados estão corretos.

## Os Jogos usados em Cálculo I

### Adivinha quem sou

Na primeira aula da unidade curricular de Cálculo I é realizada uma atividade interativa denominada “Adivinha quem sou”, com o objetivo de promover a participação ativa dos estudantes e facilitar a integração do grupo. Este jogo consiste na projeção de um conjunto de vinte gráficos distintos (ver Figura 1), a partir dos quais o docente seleciona um deles de forma discreta.

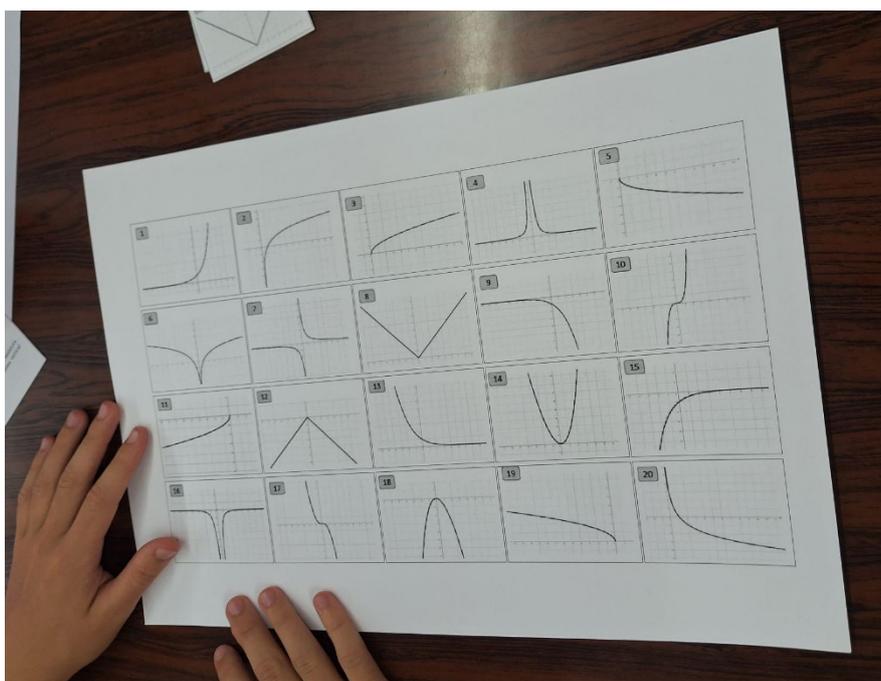


Figura 1. Gráficos usados nos jogos “Adivinha quem sou” e “A regra misteriosa”.



Os estudantes, organizados em grande grupo, devem então formular ao professor sucessivas perguntas cuja resposta seja apenas “sim” ou “não”, com vista a identificar o gráfico escolhido. As perguntas podem incidir, por exemplo, sobre características da função como o domínio e contradomínio, monotonia, existência de assíntotas, zeros, sinal ou paridade da função. O primeiro estudante a adivinhar corretamente o gráfico vence o jogo. Contudo, em caso de erro na identificação, o participante é excluído da atividade.

Esta abordagem lúdica revela-se particularmente eficaz como estratégia de quebra-gelo, incentivando o envolvimento e a comunicação entre os estudantes desde o primeiro contacto com a unidade curricular. Simultaneamente, permite revisitado de forma intuitiva alguns conceitos matemáticos fundamentais, que servirão de base para os conteúdos a serem explorados ao longo do semestre, bem como uma linguagem matemática adequada. A atividade tem, assim, um duplo propósito: facilitar o entrosamento da turma e reforçar conhecimentos prévios essenciais ao sucesso em Cálculo I.

### A regra misteriosa

Na segunda parte da primeira aula de Cálculo I, os gráficos apresentados na Figura 1 são utilizados no contexto do jogo didático intitulado “A regra misteriosa”. Esta atividade tem como objetivo promover o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de argumentação Matemática entre os estudantes.

A dinâmica do jogo organiza os estudantes em mesas, com duas equipas por mesa, cada equipa composta por seis ou sete participantes. A cada equipa são atribuídos dois baralhos de cartas: um baralho com 21 cartas contendo as características das funções, tais como “a função  $f(x)$  não possui pontos no segundo quadrante” ou “o conjunto imagem de  $f$  é um subconjunto de  $[0, +\infty[$ ” (ver Figura 2), enquanto o outro baralho inclui os 20 gráficos referidos anteriormente. Adicionalmente, cada equipa dispõe de um tabuleiro ilustrado na Figura 1, que serve de suporte visual para a atividade.



	$D_f \subseteq [0, +\infty[$	$f(x)$ tem como domínio $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$	$D_f = ]-\infty, +\infty[$	
$f(x)$ passa pelo ponto $(0, 0)$	$f(x)$ não tem pontos no 1º quadrante	$f(x)$ não tem pontos no 2º quadrante	$f(x)$ não tem pontos no 3º quadrante	$f(x)$ não tem pontos no 4º quadrante
$f(x)$ tem exatamente uma assíntota	$f(x)$ tem pelo menos uma assíntota	$f(x)$ não tem nenhuma assíntota horizontal nem nenhuma vertical	$f(x)$ é injetiva	A função é crescente no seu domínio
$f(x)$ é uma função par	$f(x)$ não é par nem ímpar	$0 \in CD_f$	$f(x)$ tem um ponto de máximo absoluto	$f(x)$ tem um ponto de mínimo absoluto
	$CD_f \subseteq ]-\infty, 0]$	$CD_f = ]-\infty, +\infty[$	$CD_f \subseteq ]0, +\infty[$	

Figura 2. Características do jogo “A regra misteriosa”.

As cartas das características são baralhadas, e cada equipa retira uma carta ao acaso. Cada equipa dispõe, então, de três minutos para selecionar, entre os 20 gráficos disponíveis, todos aqueles que satisfazem a característica selecionada (ver Figura 3). Concluída esta etapa, os gráficos selecionados são entregues à equipa adversária, que terá igualmente três minutos para inferir a característica subjacente — a denominada “regra misteriosa”.



Figura 3. Identificação dos gráficos com a característica “ $Df = ]-\infty, +\infty[$ ” no jogo “A regra misteriosa”.

É imperativo que a seleção efetuada pela primeira equipa inclua todos os gráficos que satisfazem a característica em questão. Caso um ou mais gráficos sejam indevidamente excluídos e a equipa adversária identifique tal omissão, a primeira equipa perde um ponto.

A atribuição de pontos obedece aos seguintes critérios:

- A equipa que selecionar corretamente todos os gráficos correspondentes à característica recebe 1 ponto;
- A equipa adversária obtém 1 ponto se conseguir identificar a característica correta;
- Caso a equipa adversária proponha uma outra propriedade que também seja satisfeita exclusivamente pelos gráficos fornecidos (entre os 20 possíveis), obtém 2 pontos.



Podem ser realizadas várias rondas do jogo, bastando para tal escolher novas cartas de características. Esta repetição permite explorar um maior número de propriedades das funções, para além de manter elevado o nível de envolvimento dos estudantes ao longo da atividade.

Este jogo revela-se particularmente eficaz na promoção do envolvimento dos estudantes, sendo comum observarem-se intensas discussões fundamentadas entre os membros das equipas. Este tipo de interação reforça o caráter formativo da atividade. Por fim, a equipa vencedora pode ser recompensada com um prémio simbólico, como chocolates ou rebuçados, reforçando a componente lúdica e motivacional da atividade.

O jogo anteriormente proposto pode ser adaptado para o estudo de séries numéricas. Esta adaptação para o estudo das séries numéricas, ainda em fase de desenvolvimento, contempla diversas características relevantes para a compreensão do comportamento das séries, entre as quais se destacam: a distinção entre séries convergentes e divergentes; séries clássicas, como a série de Mengoli, a série geométrica, a série harmónica e as séries alternadas; bem como a classificação das séries com base no sinal do termo geral (não negativo ou não positivo). Adicionalmente, são consideradas distinções quanto ao tipo de convergência (simples ou absoluta), ao comportamento do termo geral (nomeadamente quanto ao seu limite – zero, número real não nulo ou infinito – ou monotonia - uma sucessão monótona crescente ou decrescente) e à evolução da sucessão das somas parciais (tendendo para zero, para infinito ou para um número real, e sendo monótona crescente ou decrescente). Uma das principais finalidades pedagógicas desta abordagem é contribuir para a superação de dificuldades conceptuais frequentemente observadas entre os estudantes, nomeadamente a confusão entre o limite do termo geral da série e o limite da sucessão das somas parciais.

### Gémeos matemáticos

No estudo das funções trigonométricas inversas, foi utilizado o jogo “Gémeos Matemáticos” como recurso didático. Cada equipa participante recebe um baralho composto por 24 cartas, sendo 12 cartas com gráficos numerados de 1 a 12 e 12 cartas identificadas pelas letras de A a M, contendo a expressão analítica correspondente a uma função (ver Figuras 4a e 4b).

O objetivo do jogo consiste em formar pares corretos entre os gráficos e as expressões analíticas, no tempo limite de 10 minutos. Após esse período, as equipas devem registar os pares formados numa folha, que é posteriormente entregue a uma equipa adversária para correção. A pontuação é atribuída da seguinte forma: +1 ponto para cada correspondência correta e -1 ponto para cada correspondência incorreta. A equipa vencedora é aquela que tiver o maior número de pontos.

As funções envolvidas no jogo incluem composições com funções trigonométricas inversas, exigindo que os estudantes considerem cuidadosamente os domínios dessas funções. Esta abordagem propicia uma prática significativa de conceitos que, em geral, apresentam elevado nível de dificuldade para os alunos.

No âmbito da unidade curricular de Cálculo I, após o jogo, cada equipa fez o estudo completo de uma das funções utilizadas no jogo (domínio, zeros, intervalos de monotonia, extremos



e extremantes, existência de assíntotas, contradomínio, concavidade e pontos de inflexão) e submeteu, para avaliação, a resolução detalhada no Moodle.

A estrutura do jogo apresenta um elevado grau de flexibilidade, permitindo a sua adaptação a diferentes tipos de funções. Essa característica possibilita a sua aplicação em diversos contextos de ensino, possibilitando a exploração de conceitos de forma dinâmica e ajustada a diferentes objetivos pedagógicos.

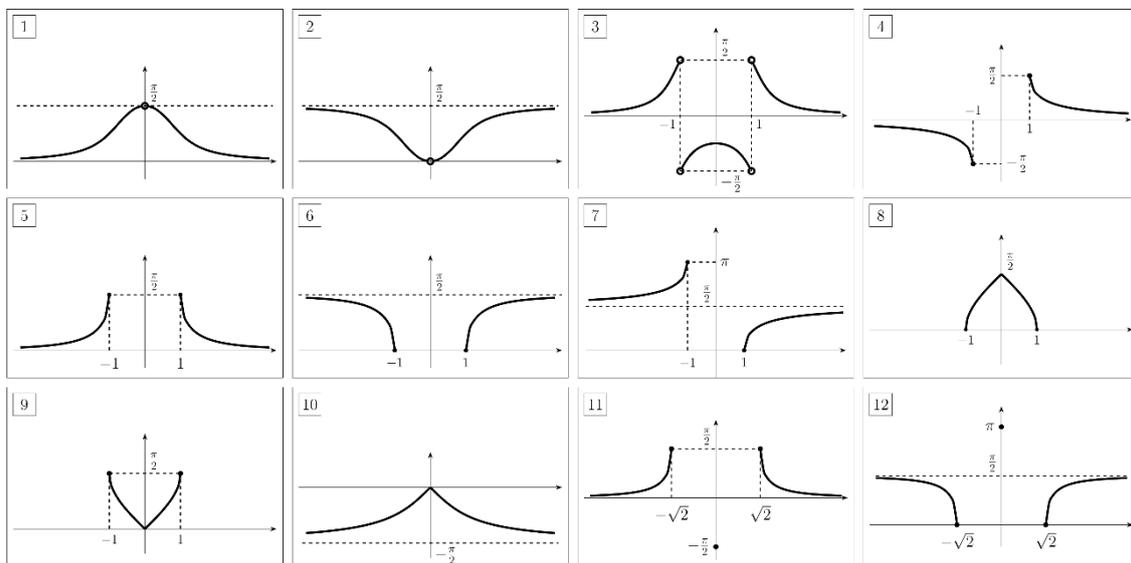


Figura 4a. Cartas utilizadas no jogo “Gêmeos Matemáticos” (gráficos).

<b>H</b> $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$	<b>E</b> $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$	<b>A</b> $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$	<b>M</b> $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$
<b>F</b> $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$	<b>J</b> $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x^2}\right)$	<b>C</b> $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$	<b>G</b> $f(x) = \arccos( x )$
<b>L</b> $f(x) = \arcsen( x )$	<b>B</b> $f(x) = \arctan(- x )$	<b>I</b> $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$	<b>D</b> $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$

Figura 4b: Cartas utilizadas no jogo “Gêmeos Matemáticos” (expressões).



### As caixas de primitivas

O último jogo implementado na sequência de jogos realizados na unidade curricular de Cálculo I foi intitulado 'As caixas de primitivas'. Neste jogo, cada equipa recebe um conjunto de 25 cartas coloridas (uma cor distinta por equipa), contendo expressões correspondentes a primitivas (ver Figura 5).

Adicionalmente, são colocadas no centro da sala oito caixas identificadas como caixas de primitivas, cada uma representando um tipo de primitiva (ver Figura 6).

O objetivo do jogo consiste em associar corretamente cada carta à caixa correspondente, com base na regra de primitivação aplicável. Por exemplo, conforme ilustrado na Figura 7, a primitiva número 2 deverá ser colocada na caixa A, enquanto a primitiva número 15 corresponde à caixa H.

$\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ 1	$\int \cos x \sqrt{\sin x} dx$ 2	$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ 3	$\int 2xe^{x^2} dx$ 4	$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx$ 5
$\int \cos^2(x) \sin(x) dx$ 6	$\int \frac{1}{x^2+7} dx$ 7	$\int \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} dx$ 8	$\int e^{3\cos^2 x} \sin x \cos x dx$ 10	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ 9
$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$ 11	$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ 12	$\int \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$ 13	$\int e^{x^2+4x+3}(x+2) dx$ 14	$\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$ 15
$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$ 16	$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ 17	$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$ 18	$\int \frac{x}{(7+5x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ 19	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 20
$\int \frac{3^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 21	$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ 22	$\int x^2 \sec^2(x^3+1) dx$ 23	$\int \csc^2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} dx$ 24	$\int x^{3x^2+1} dx$ 25

Figura 5. Conjunto de 25 cartas contendo expressões correspondentes a primitivas.



$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{\text{A}} \int (g(x))^n \cdot g'(x) dx & \boxed{\text{B}} \int \cos(g(x)) \cdot g'(x) dx & \boxed{\text{C}} \int \sec^2(g(x)) \cdot g'(x) dx & \boxed{\text{D}} \int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} dx \\
 n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \text{ou} & \text{ou} & \\
 & \int \sin(g(x)) \cdot g'(x) dx & \int \csc^2(g(x)) \cdot g'(x) dx & \\
 \\
 \boxed{\text{E}} \int a^{g(x)} \cdot g'(x) dx & \boxed{\text{F}} \int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx & \boxed{\text{G}} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx & \boxed{\text{H}} \int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} dx \\
 a \neq e & & & 
 \end{array}$$

Figura 6. Tipos de primitivas presentes nas caixas de primitivas.

$$\begin{array}{cc}
 \int \cos x \sqrt{\sin x} dx & \boxed{2} \quad \boxed{\text{A}} \int (g(x))^n \cdot g'(x) dx \\
 & n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\
 \int \frac{x^3}{1+x^8} dx & \boxed{15} \quad \boxed{\text{H}} \int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} dx
 \end{array}$$

Figura 7. Exemplos utilizados no jogo “As caixas de primitivas”.

Em equipa, os estudantes discutem e decidem em que caixa colocar cada uma das cartas. Posteriormente, determinam quais os elementos da equipa responsáveis por colocar fisicamente as cartas nas caixas correspondentes. O jogo tem a duração total de 10 minutos, ao fim dos quais são selecionados, de entre os próprios alunos, árbitros para cada uma das caixas de primitivas. A função dos árbitros consiste em verificar quais as equipas que colocam corretamente as primitivas nas respetivas caixas de primitivas.

A pontuação é atribuída com base na correção das respostas: cada primitiva colocada corretamente na caixa adequada atribuí 1 ponto à respetiva equipa, enquanto cada erro resulta na subtração de 1 ponto. Vence a equipa que tiver maior pontuação no final do jogo.

Este jogo foi concebido para responder às dificuldades frequentemente relatadas pelos estudantes no início do estudo das primitivas, sobretudo no que diz respeito à identificação e aplicação das diferentes regras de primitivação. Ao promover um ambiente de aprendizagem lúdico e colaborativo, o jogo incentiva a interação entre os membros de cada equipa, fomentando a discussão, a argumentação matemática e a tomada de decisão fundamentada.

A Figura 8 apresenta os resultados obtidos no jogo ‘As caixas de primitivas’ numa das turmas participantes. Do lado esquerdo da imagem encontram-se as cartas com primitiva que foram corretamente associadas às respetivas caixas, enquanto do lado direito surgem as cartas que foram incorretamente colocadas, em número significativamente inferior. Esta representação visual permite observar, de forma imediata, o desempenho geral da turma e a eficácia da atividade na identificação e aplicação correta das regras de primitivação.

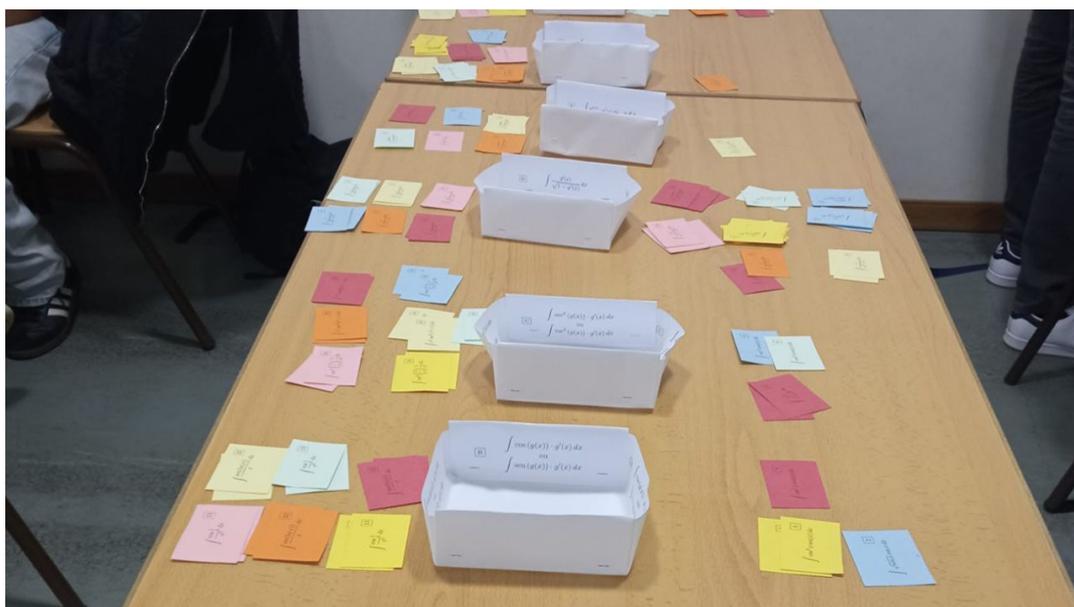


Figura 8. Resultados obtidos no jogo “As caixas de primitivas” numa turma.

O jogo apoia-se nos princípios da aprendizagem ativa (Bonwell & Eison, 1991), ao envolver os estudantes diretamente na construção do conhecimento, e do trabalho colaborativo, reconhecido como uma estratégia eficaz para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático e o aprofundamento conceptual (Johnson, Johnson, & Smith, 2008). A resolução conjunta dos desafios propostos contribui, assim, não apenas para a consolidação dos conteúdos, mas também para o fortalecimento da comunicação matemática, o pensamento crítico e do espírito de cooperação.

Este jogo apresenta um elevado potencial de reutilização e adaptação, podendo ser facilmente ajustado para incluir diferentes conjuntos de expressões de primitivas. A seleção das primitivas a utilizar pode ser orientada pelos objetivos de aprendizagem previamente definidos, permitindo, por exemplo, focar regras específicas de primitivação, níveis distintos de complexidade ou conteúdos adaptados ao ritmo da turma. Esta flexibilidade torna o jogo uma ferramenta versátil no ensino do cálculo integral, viabilizando a sua integração em diversos momentos do processo de ensino-aprendizagem, quer como introdução ao tema, quer como instrumento de consolidação ou de revisão.

No contexto da unidade curricular de Cálculo I, após a realização do jogo, cada equipa recebeu um conjunto de primitivas, escolhidas de entre as 25 primitivas do jogo, para resolver. Esta tarefa foi concebida como uma extensão do jogo, permitindo a transição de um ambiente colaborativo e exploratório para um momento de trabalho focado na consolidação dos conteúdos abordados. As soluções foram submetidas, para avaliação, através da plataforma Moodle, garantindo uma componente de formalização e responsabilização no processo de aprendizagem.

Para além de reforçar os conceitos fundamentais associados às regras de primitivação, esta atividade permitiu aos estudantes aplicar os conhecimentos adquiridos em contexto de jogo,



avaliando a sua compreensão. A submissão digital das respostas possibilitou, ainda, a monitorização do desempenho das equipas e a identificação de dificuldades persistentes, permitindo ao docente ajustar, de forma mais precisa, as intervenções pedagógicas subsequentes.

## Discussão e resultados

A utilização de jogos nas aulas tem-se mostrado uma estratégia eficaz para melhorar a participação e a motivação dos estudantes, além de desenvolver competências essenciais, como a comunicação em Matemática e o uso da linguagem matemática. Estas competências são fundamentais para o sucesso em disciplinas desafiadoras, como o Cálculo.

Os jogos, não só facilitam a interação entre os estudantes, mas também promovem uma aprendizagem ativa, prática e motivadora, essencial para o entendimento profundo dos conceitos matemáticos. Ao utilizarem jogos nas aulas de Cálculo I, os docentes estão a criar uma experiência de aprendizagem dinâmica e colaborativa, que pode resultar em melhores resultados académicos e maior envolvimento dos estudantes.

Ao envolverem-se nos jogos, os estudantes precisam aplicar os conceitos aprendidos de forma prática e intuitiva, o que ajuda na retenção e compreensão dos conteúdos. Além disso, os jogos promovem a motivação e o interesse pela matéria, algo que muitas vezes é desafiador em unidades curriculares como Cálculo I. Os estudantes são motivados pelo espírito competitivo e pelos desafios propostos, tornando a aprendizagem mais envolvente.

Os jogos ajudam a criar um ambiente de aprendizagem colaborativa, onde os estudantes trabalham juntos para resolver problemas, discutir estratégias e chegar a conclusões. Este tipo de interação é fundamental para desenvolver habilidades sociais e cognitivas, como comunicação, pensamento crítico e resolução de problemas. Além disso, ao trabalharem em equipas, os estudantes aprendem a respeitar diferentes pontos de vista e a valorizar o trabalho coletivo.

Neste ano letivo, após lecionar os conteúdos, os estudantes realizaram tarefas nas aulas (conjuntos de exercícios realizados em grupo e submetidos na plataforma MOODLE no final da aula) que complementaram a avaliação. A experiência acumulada ao longo dos anos evidencia que os alunos, em geral, enfrentam dificuldades iniciais na resolução de exercícios sobre primitivas. Apesar da ausência de dados quantitativos de anos anteriores que permitam uma comparação, a análise dos resultados deste ano letivo permite constatar que as classificações obtidas na tarefa subsequente à implementação do jogo foram, de forma geral, superiores às das restantes tarefas em que não foi utilizada esta abordagem lúdica. Estes dados reforçam a hipótese de que estratégias pedagógicas baseadas em jogos podem ser eficazes na superação de dificuldades iniciais e na promoção da aprendizagem ativa.

Para além de adaptar estes jogos a diferentes conteúdos, podem também ser reaproveitados os materiais usados em alguns dos jogos, para outros. Por exemplo, as características das funções podem ser usadas para jogos tipo monopólio em que cada duas características poderiam servir para comprar uma função, sendo o objetivo adquirir o maior número de funções possível.



A integração de jogos nas aulas de Cálculo I não só melhora a participação e a motivação dos estudantes, mas também promove uma aprendizagem mais profunda e colaborativa. Esta abordagem inovadora tem o potencial de transformar a experiência de aprendizagem, tornando-a mais envolvente e eficaz.

## Conclusões

Ao longo dos anos, fomos adaptando a forma de ensinar aos nossos estudantes e percebemos que, mesmo que o nosso esforço em resolver e explicar no quadro fosse enorme, apenas alguns estudantes aproveitariam. Acreditamos firmemente que quando tentam resolver problemas/exercícios por si próprios, com a ajuda dos seus colegas, é a melhor forma de aprender. Trabalhar em pequenos grupos encoraja os estudantes a fazer perguntas aos colegas, algo que não se sentiriam à vontade em fazer frente a toda a turma. Sabe-se também que uma das técnicas mais eficientes para aprender é ensinar, e isso pode acontecer quando os estudantes estão agrupados e têm de explicar aos outros as estratégias utilizadas para resolver a tarefa que têm de fazer.

A utilização de jogos parece ser uma estratégia adequada para aprender alguns conceitos e para promover a interação entre os estudantes. De acordo com Pan, Ke, & Xu (2022), “Os efeitos positivos da utilização de jogos no desempenho dos alunos em matemática foram consistentemente demonstrados nos estudos analisados.”

Apesar de algumas vozes discordantes, em particular porque ocupam muito tempo de aula, os resultados de aprendizagem justificam a sua utilização. Ao envolver os estudantes em atividades lúdicas, conseguimos estimular a curiosidade e o interesse pelo conteúdo, além de facilitar a retenção do conhecimento. Além disso, é crucial criar um ambiente de sala de aula onde os estudantes se sintam seguros para expressar suas dúvidas e dificuldades. Isso pode ser alcançado através da implementação de técnicas de ensino que promovam a inclusão e o respeito mútuo.

A análise dos resultados de aprendizagem referente ao ano letivo em que foi implementada a metodologia aqui referida é objeto de estudo do artigo de Oliveira, Nolasco, & Vettori (2025).

A integração da tecnologia na sala de aula pode também ser uma ferramenta poderosa para o ensino de Matemática. Utilizar softwares educativos, plataformas de aprendizagem online e recursos multimédia pode enriquecer a experiência de aprendizagem e tornar os conteúdos mais acessíveis e interessantes. Este tipo de abordagem, combinada com o trabalho colaborativo, pode efetivamente preparar os estudantes para os desafios do mundo moderno, capacitando-os com as habilidades necessárias para se destacarem tanto academicamente quanto profissionalmente.

Ao refletir sobre a importância de métodos inovadores de ensino, deve ser considerada também a formação contínua dos docentes. A educação é um campo em constante mudança, e é essencial que os professores se mantenham atualizados com as novas metodologias e tecnologias. A formação profissional contínua pode ajudar os educadores a desenvolver novas competências e a melhorar as suas práticas pedagógicas. Workshops, cursos de atualização e conferências são excelentes oportunidades para os professores aprenderem e compartilharem experiências.



Outro aspeto importante é a colaboração entre educadores. A troca de ideias e práticas entre colegas pode enriquecer o ensino e beneficiar os estudantes. Incentivar a cultura de colaboração nas escolas/universidades pode resultar num ambiente de aprendizagem mais dinâmico e criativo. Os professores podem trabalhar juntos na elaboração de planos de aula, na criação de materiais didáticos e na resolução de problemas comuns.

A avaliação contínua dos métodos de ensino também é essencial. Os professores devem estar dispostos a analisar e ajustar suas abordagens com base no feedback dos estudantes e nos resultados de aprendizagem. Ferramentas de avaliação formativa, como questionários, auto-avaliações e discussões em grupo, podem fornecer informações valiosas sobre o progresso dos estudantes e a eficácia das estratégias de ensino. Adaptar as metodologias de acordo com essas avaliações pode levar a melhorias significativas no desempenho dos alunos.

A educação no século XXI deve ser centrada no estudante, promovendo o desenvolvimento de competências essenciais para a vida e para o mercado de trabalho. A abordagem pedagógica deve ser flexível, dinâmica e inclusiva, valorizando a individualidade de cada aluno e incentivando o trabalho colaborativo. Integrar tecnologia, jogos educativos e métodos inovadores pode transformar a sala de aula num espaço de aprendizagem estimulante e eficaz. A formação contínua dos docentes, a colaboração entre educadores e a avaliação constante das práticas pedagógicas são fundamentais para garantir a qualidade do ensino e preparar os estudantes para os desafios do futuro.

Os educadores têm um papel crucial não só na transmissão de conhecimento, mas também em inspirar, motivar e orientar os alunos no seu percurso de aprendizagem. Criar um ambiente acolhedor e inclusivo é vital para ajudar os estudantes a desenvolverem habilidades críticas e emocionais essenciais para o sucesso pessoal e profissional. A educação do século XXI não se limita a aprender factos e conceitos, mas prepara os indivíduos para serem pensadores críticos, colaboradores eficazes e cidadãos globais.

## Contribuições dos autores

Conceptualização: Ana Paula Nolasco, Maria Paula Oliveira e Paolo Vettori; Metodologia: Maria Paula Oliveira; Software: N/A (não aplicável); Validação: N/A; Análise formal: Ana Paula Nolasco; Investigação: Ana Paula Nolasco, Maria Paula Oliveira e Paolo Vettori; Recursos: Ana Paula Nolasco, Maria Paula Oliveira e Paolo Vettori; Curadoria de dados: Paolo Vettori; Escrita - Esboço original: Maria Paula Oliveira; Escrita - Revisão & Edição: Ana Paula Nolasco, Maria Paula Oliveira e Paolo Vettori; Visualização: Ana Paula Nolasco, Maria Paula Oliveira e Paolo Vettori; Supervisão: N/A; Gestão do projeto: N/A; Captação de financiamento: N/A

## Financiamento

Este trabalho é suportado pelo CIDMA (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações) ao abrigo do Programa de Financiamento Plurianual de Unidades de I&D da FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), ref. UIDB/04106/2020



## Referências

- Acruchi Alves, M. N., & Victor, E. d. (2022). *Aprendizagem, Socialização e Diversão com Jogos Matemáticos*. Duque de Caxias, RJ: Unigranrio.
- Araujo, L. d. (2020). Jogos como Recursos Didáticos na Alfabetização: o que dizem e fazem as Professoras. *Educação em Revista*, 36(e220532). doi:10.1590/0102-4698220532
- Balestra, M. M., & Geuelin, F. (2008). O PAPEL DO JOGO NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM E NA RELAÇÃO CONHECIMENTO ESPONTÂNEO X CONHECIMENTO FORMAL. *Revista Eletrônica de Ciências da Educação*, 7(1).
- Bonwell, C. C., & Eison, J. A. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom*. The George Washington University, School of Education and Human Development. Washington D.C.: ASHE-ERIC Higher Education.
- Iannella, A., Morando, P., & Spreafico, M. L. (2022). Challenges in Mathematics Learning at the University: An Activity to Motivate Students and Promote Self-awareness. Em G. Casalino, M. Cimitile, P. Ducange, N. Padilla Zea, R. Pecori, P. Picerno, & P. Raviolo (Ed.), *Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online*. 1542, pp. 321--332. Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-030-96060-5\_23
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Smith, K. A. (2008). Active learning: Cooperation in the college classroom. *The Annual Report of Educational Psychology in Japan*.
- Morando, P., & Torconi, G. (2022). Brains on in Math classes. *EDULEARN22 Proceedings* (pp. 1522--1529). Palma, Spain: IATED. doi:10.21125/edulearn.2022.0401
- Nolasco, A. P., Oliveira, M. P., & Vettori, P. (2025). Enhancing Student Engagement and Assessment. *PAEE/ALE'2025 - Innovative Pathways: Bridging Professional Development and Active Learning*. Porto: PAEE association School of Engineering of University of Minho.
- Nunes, M. Y., & Lopes, L. A. (2023). O uso de jogos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem na educação de jovens e adultos: um estudo exploratório. *Revista Contribuciones a Las Ciencias Sociales*, 16(7), 6839-6848.
- Oliveira, M. P., Nolasco, A. P., & Vettori, P. (2025). Strategies To Improve Student Engagement: Comparison Of Assessment Results And Student Feedback. *Proceedings END2025*. Budapest: World Institute for Advanced Research and Science (WIARS), Portugal.
- Pais, S., Sousa, A. E., & Lopes, M. S. (2024). Play2Eescape - a digital escape room in math classes for undergraduate tourism students - case study. *Elearning and Digital Learning 2024 and Sustainability, Technology and Education 2024* (pp. 59-66). Budapest: IADIS Press.
- Pan, Y., Ke, F., & Xu, X. (2022). A systematic review of the role of learning games in fostering mathematics education in K-12 settings. *Educational Research Review*, 36, 1-13.
- Vankúš, P. (2021). Influence of Game-Based Learning in Mathematics Education on Students' Affective Domain: A Systematic Review. *Mathematics*, 9(9). doi:10.3390/math9090986