



Conhecimento especializado do conteúdo sobre números racionais: um estudo com professores portugueses dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico

Specialized Content Knowledge about rational numbers: a study with Portuguese teachers from the 1st and 2nd cycles of basic education

Conocimiento especializado de contenido de profesores sobre números racionales: un estudio con profesorado portugués de 1º y 2º ciclo de educación básica

Catarina Vasconcelos Gonçalves

Instituto Politécnico de Viana do Castelo (IPVC), Portugal
inED, Centro de Investigação e Inovação em Educação, IPVC, Portugal
goncalves.catarina@ese.ipvc.pt
<https://orcid.org/0000-0002-7943-0729-53>

Alexandra Gomes

CIEC/ IE, UMinho, Portugal
magomes@ie.uminho.pt
<https://orcid.org/0000-0002-5908-570X>

Resumo

O presente artigo apresenta uma investigação que analisa o Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) de professores portugueses dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, com foco na temática dos números racionais. Para o estudo desta dimensão do conhecimento matemático para ensinar, foi adotada uma abordagem metodológica mista. Participaram no estudo 61 professores. Recorreu-se, para a recolha de dados, a um conjunto de questões de escolha múltipla relativas ao tema Números, originalmente desenvolvidas pelo grupo de investigação da Universidade de Michigan (EUA) no âmbito do projeto Learning Mathematics for Teaching, posteriormente traduzidas e validadas para o contexto português. Foram ainda realizadas entrevistas a professores selecionados. A questão central da investigação foi: Qual o desempenho de professores portugueses em questões sobre números racionais que exigem Conhecimento Especializado do Conteúdo? Os resultados revelam que os professores participantes evidenciam dificuldades na resolução de questões que requerem SCK. As suas respostas revelam, frequentemente, uma abordagem baseada na aplicação de regras e procedimentos ou na exemplificação, em detrimento de um entendimento concetual mais profundo dos conteúdos envolvidos.

Palavras-chave: Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK); Números racionais; Ensino Básico.

Abstract

This article presents research that analyzes the Specialized Content Knowledge (SCK) of Portuguese teachers from the 1st and 2nd Cycles of Basic Education, focusing on the topic of rational numbers. To study this dimension of mathematical knowledge for teaching, a mixed methodological approach was adopted. 61 teachers participated in the study. For data collection, a set of multiple-choice questions related to the topic of Numbers were used, originally developed by the research group at the University of Michigan (USA) within the scope of the Learning Mathematics for Teaching project, later translated and validated for the Portuguese context. Interviews were also conducted with selected teachers. The central question of the research was: How do Portuguese teachers perform in questions about rational numbers that require specialized content knowledge?

The results reveal that the participating teachers show difficulties in solving questions that require SCK. Their responses often reveal an approach based on the application of rules and procedures or on examples, to the detriment of a deeper conceptual understanding of the content involved.

Keywords: Specialized Content Knowledge (SCK); Rational numbers; Elementary School.

Resumen

Este artículo presenta una investigación que analiza el Conocimiento de Contenido Especializado (SCK) de profesores portugueses del 1º y 2º Ciclo de Educación Básica, centrándose en la temática de los números racionales. Para estudiar esta dimensión del conocimiento matemático para la enseñanza, se adoptó un enfoque metodológico mixto. En el estudio participaron 61 docentes. Para la recolección de datos se utilizó un conjunto de preguntas de opción múltiple relacionadas con el tema de Números, originalmente desarrolladas por el grupo de investigación de la Universidad de Michigan (EE. UU.) en el ámbito del proyecto Learning Mathematics for Teaching, posteriormente traducidas y validadas para el contexto portugués. También se realizaron entrevistas con profesores seleccionados. La pregunta central de la investigación fue: ¿Cómo se desempeñan los profesores de portugués en preguntas sobre números racionales que requieren conocimientos de contenido especializado?

Los resultados revelan que los docentes participantes presentan dificultades para resolver cuestiones que requieren SCK. Sus respuestas a menudo revelan un enfoque basado en la aplicación de reglas y procedimientos o en ejemplos, en detrimento de una comprensión conceptual más profunda del contenido en cuestión.

Palabras-clave: Conocimiento especializado del contenido; Números racionales; Educación Básica.

Introdução

Ao longo dos anos e dos vários estudos realizados sobre a matemática dos primeiros anos escolares, tem-se vindo a evidenciar a importância do desenvolvimento de competências fundamentais sólidas em matemática no início dos estudos de todas as crianças (Sitabkhan et al., 2024, p.1).



Trabalhos anteriores patenteiam a importância do professor, do seu papel e do seu conhecimento na aprendizagem dos alunos. Ribeiro (2011) refere que para se conhecer e compreender melhor, a partir da prática, o processo de ensino e aprendizagem, um dos fatores determinantes remete-se ao conhecimento demonstrado pelo professor. Investigações realizadas por Sanders e Rivers (1996) e Haycock (2006) concluíram que a qualidade dos professores é o fator mais determinante na aprendizagem dos alunos, isto é, que a eficácia e os níveis de desempenho dos professores têm influência na aprendizagem dos alunos e, consequentemente, na sua prestação. Nesse sentido, a Comissão Europeia reforça que a qualidade dos professores é o fator mais determinante ao nível escolar que afeta os resultados dos alunos (European Commission, 2018, p. 9).

Por essa razão, o conhecimento e as competências necessárias para um desempenho exemplar por parte do professor no ensino da matemática - o ensino que conduz os alunos a desenvolver uma compreensão robusta da matemática - há muito tempo que é do interesse dos investigadores desta área (Copur-Gençtürk & Tolar, 2022; Blomeke et al., 2015; Li & Kaiser, 2011; Tatto et al., 2008).

Nesta perspetiva, no presente trabalho, abordarse-á o “Conhecimento Especializado do Conteúdo” (*Specialized Content Knowledge*), que se caracteriza como um dos subdomínios do Conhecimento Matemático para Ensinar (*Mathematical Knowledge for Teaching - MKT*), estudado e definido por Ball, Thames e Phelps (2008) como o conhecimento matemático que os professores usam em sala de aula para que os alunos aprendam e se enriqueçam. O construto “Conhecimento Matemático para Ensinar” tem origem nas investigações de Shulman (1986), que introduziu o conceito de conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical content knowledge – PCK*). Shulman defende que o conhecimento que o professor possui sobre um conteúdo não se limita à sua compreensão académica, mas envolve a capacidade de o reinterpretar, transformar e representar de forma acessível e significativa para os alunos. Trata-se, assim, de uma forma particular de conhecimento profissional que articula o domínio conceptual da disciplina com a sua didática, e que, segundo o autor, é determinante para orientar e fundamentar a prática de ensino. Neste estudo, o foco incide no “Conhecimento Especializado do Conteúdo” de alguns conceitos do tema Números. Este é um “(...) tópico curricular de importância inquestionável para a educação matemática dos jovens e adultos de todos os países” (Brocardo & Carrillo, 2019, p. 1). Em Portugal, em particular, conforme indicado nas Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021), trata-se de um dos cinco temas principais, que acompanha toda a escolaridade do Ensino Básico e mesmo do Ensino Secundário.

Neste enquadramento, o presente artigo centra-se na importância do Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), uma das vertentes do Conhecimento Matemático para Ensinar, no contexto de professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (CEB), em Portugal, e relacionado com os números racionais. Tendo por base este foco, definiu-se a seguinte questão de investigação: Qual o desempenho de professores portugueses em questões sobre números racionais que exigem Conhecimento Especializado do Conteúdo?

Para responder a esta questão, o artigo encontra-se estruturado em três partes principais. Na primeira, apresenta-se um enquadramento teórico sobre o Conhecimento Matemático do Professor, com especial atenção ao Conhecimento Matemático para Ensinar e ao Conhecimento Especializado do Conteúdo e à sua relevância para a prática docente no ensino dos números racionais. Segue-se a descrição da metodologia adotada, de natureza mista, com destaque



para o instrumento de recolha de dados constituído por questões de escolha múltipla sobre Números (Gonçalves, 2020), das quais duas serão analisadas em profundidade neste artigo. Por fim, apresentam-se e discutem-se os principais resultados, com vista a identificar dificuldades, padrões de resposta e implicações para a formação de professores dos anos iniciais de escolaridade.

Contextualização teórica

Conhecimento Matemático do Professor

O conhecimento do professor é considerado, inquestionavelmente, fulcral no processo de ensino e aprendizagem, na medida que determina o que se faz na sala de aula, a forma e o que o aluno aprende. Por outro lado, estudar o conhecimento do professor tem-se revelado uma tarefa difícil e complexa pois, tal como refere Gomes (2003, p. 61), “esse conhecimento apresenta-se numa forma heterogénea, formado por diferentes componentes interligadas e difíceis de isolar”. Por essa razão, ao longo dos anos, foram desenvolvidas diversas teorias e taxonomias que possibilitam uma análise desse conhecimento.

Hiebert e Lefevre (1986) propõem a distinção entre *Conhecimento Matemático Processual* e *Conhecimento Matemático Concetual*. Essa diferenciação é relevante, pois ajuda a compreender as ações dos professores em sala de aula e o seu impacto na aprendizagem dos alunos, fornecendo informações valiosas para esta investigação.

Os autores definem o conhecimento concetual como rico em relações (Hiebert & Lefevre, 1986, p. 3), enquanto o conhecimento processual é linear, exigindo poucas conexões entre as etapas do procedimento. Como consequência, o conhecimento processual pode ser aprendido mecanicamente, ao contrário do conhecimento concetual, que requer uma compreensão mais profunda. No tema em estudo, Números, e mais especificamente nos números racionais, considere-se como exemplo a multiplicação de frações. O conhecimento processual cinge-se à aplicação do algoritmo. O professor sabe como fazer a multiplicação de frações, aplicando o algoritmo corretamente (multiplicar os numeradores entre si, para obter o numerador do produto, e os denominadores entre si, para obter o denominador do produto), mas não sabe explicar o porquê ou relacionar a operação com um contexto significativo. Já o conhecimento concetual pressupõe explicar o significado da operação com base em contextos reais ou representações visuais. O professor entende que multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$, por exemplo, significa calcular metade de $\frac{1}{4}$, e pode representar isso com um diagrama de área, mostrando que metade de uma das quatro partes congruentes em que a unidade está dividida corresponde a um oitavo do todo.

Os contributos de Shulman (1986) e dos seus colegas revolucionaram as investigações sobre o conhecimento do professor, na medida em que focaram e destacaram o conhecimento do conteúdo por parte do professor como uma forma especial de conhecimento que, segundo estes autores, determinaria a sua prática de ensino.

Baseando-se no trabalho deste investigador, Deborah Ball (1990) veio, mais tarde, a evidenciar-se como uma das investigadoras mais relevantes na área do conhecimento do professor.

Ao longo dos anos, Ball e outros investigadores, como Heather Hill e Hyman Bass, questionaram-se acerca daquilo que, na prática, os professores precisam de saber sobre matemática para terem sucesso com os seus alunos (Ball, et al., 2005, p. 17). Assim sendo, Ball, Hill e Bass (2005) definiram o modelo do Conhecimento Matemático para Ensinar (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT), que integra o conhecimento do conteúdo (Subject Matter Knowledge – SMK) e o conhecimento pedagógico do conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*).

Partindo de uma base teórica sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, os investigadores construíram um conjunto de questões de escolha múltipla, que pretendiam representar o conhecimento matemático usado no ensino da matemática elementar (Hill et al., 2004, p.14).

Na sequência destes estudos, Hill, Schilling e Ball (2004) definiram uma estrutura para o construto MKT, isto é, perceberam de que forma este conhecimento está organizado, e se as questões de escolha múltipla que construíram e aplicaram (num teste piloto) mediam, de forma confiável, com rigor e precisão, este conhecimento.

Na tabela 1 apresentam-se os domínios do MKT.

Tabela 1. Domínios do Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) (adaptado de Ball et al., 2008)

Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT)	Conhecimento do Conteúdo (SMK)	Conhecimento Comum (CCK)
		Conhecimento Especializado (SCK)
		Conhecimento Horizonte (HCK)
	Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK)	Conhecimento do Conteúdo e dos alunos (KCS)
		Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT)
		Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC)

Nas últimas décadas, diversos estudos têm investigado a estrutura do MKT, com ênfase na dimensão e na relevância do Conhecimento do Conteúdo e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo para o ensino da matemática (e.g., Copur-Gencturk & Tolar, 2022; Charalambous et al., 2020; Copur-Gencturk et al., 2019). Esses domínios desempenham um papel essencial na qualidade do ensino e na aprendizagem dos alunos (e.g., Copur-Gencturk, 2015; Hill et al., 2005).

Copur-Gencturk e Tolar (2022) argumentam que, além do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo, os professores precisam desenvolver competências específicas de percepção do conteúdo (*content-specific noticing skills*), propondo assim uma estrutura de três componentes para o MKT. Por outro lado, Copur-Gencturk et al. (2019) concluíram que, no contexto do ensino básico, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo podem ser considerados um único construto.

Adicionalmente, Scheiner, Buchholtz e Kaiser (2023) compararam o Conhecimento Matemático para Ensinar com o *Mathematics Didactic Knowledge* e observaram que, embora esses construtos compartilhem diversas semelhanças, as suas bases teóricas e conceituais são distintas.

No presente trabalho, optou-se por utilizar a teoria e os instrumentos desenvolvidos no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching* (LMT), uma vez que os investigadores responsáveis por esse projeto realizaram uma análise psicométrica que demonstrou a consistência das pontuações atribuídas às questões que avaliam MKT, no que respeita ao conhecimento dos



professores (Hill et al., 2004). Além disso, esses instrumentos revelaram-se adaptáveis a diferentes contextos educativos fora dos Estados Unidos, como foi o caso neste estudo. Exemplos disso são as adaptações das referidas questões de escolha múltipla realizadas por Delaney (2008), ao contexto irlandês, por Cole (2011), que procedeu da mesma forma no Gana, por Known (2009) na Coreia do Sul, por Ng (2011) na Indonésia, e por Mosvold et al. (2009) na Noruega.

Devido à relevância da temática, focamo-nos, neste artigo, no Conhecimento do Conteúdo que, como indicado antes, se encontra subdividido em Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) e Conhecimento Horizonte do Conteúdo (HCK).

- O CCK é o conhecimento necessário para efetuar um simples cálculo ou responder corretamente a um dado problema (Ball et al., 2008, p. 399). Apesar de denominarem este conhecimento de “comum”, estes autores esclarecem que não significa que toda a gente possua este conhecimento, sublinhando também que este não é um conhecimento único para ensinar. Por exemplo, um professor calcula corretamente que $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$, convertendo ambas as frações para denominadores comuns. Este conhecimento não é exclusivo do professor — qualquer adulto com boa literacia matemática pode fazê-lo.
- O SCK é o conhecimento necessário para se ensinar esta disciplina e que apenas os professores precisam de ter. É definido como o conhecimento matemático e habilidade (skill), e caracterizam-no como a forma de conhecimento que é unicamente necessária aos professores para conduzirem o seu trabalho (Ball et al., 2008, p. 400). Este tipo de conhecimento é considerado fundamental para um ensino de alta qualidade (e.g. Sita-bkhan et al., 2024; Ball et al., 2008). Por exemplo, um professor com este conhecimento consegue antecipar e explicar por que motivo alguns alunos acreditam que $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, que é um erro comum em que os alunos adicionam numeradores e denominadores. Ele utiliza representações visuais (como diagramas de área) para demonstrar o erro e reconduzir os alunos ao raciocínio correto, adaptando a explicação à sua compreensão.
- O HCK foi descrito por Ball, Thames e Phelps (2008) como uma estrutura, como uma categoria provisória referente às conexões necessárias a realizar entre os diferentes tópicos do currículo. Por exemplo, o professor mostra como o conceito de fração está relacionado com a medição, os números decimais e a proporcionalidade que os alunos irão estudar mais tarde.

Conhecimento Matemático do Professor sobre Números Racionais

Diversos estudos têm investigado o Conhecimento Matemático para Ensinar números racionais, destacando desafios aí enfrentados por professores e futuros professores. Em particular, pesquisas apontam dificuldades relacionadas com o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) (Ribeiro, 2009; Pinto & Ribeiro, 2013; Martins & Branco, 2018; Silva et al., 2021).

Especificamente no conceito do número racional e operações com números racionais, Pinto e Ribeiro (2013) verificaram que a maioria dos futuros professores apresentava sérias lacunas



em termos dos diferentes significados das frações e que tinham pouca familiaridade com o significado da fração como parte-todo, conceito este muito trabalhado ao longo da sua escolaridade. Na mesma linha de ideias, Silva, Santos, Almeida e Amorim (2021) analisaram o conhecimento de futuros professores sobre números racionais e constataram limitações tanto no Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) quanto no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). Entre as dificuldades observadas estavam a localização de frações na reta numérica e a representação de frações impróprias. Além disso, identificaram fragilidades no Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS), uma vez que os participantes demonstraram dificuldades em compreender e discutir as causas dos erros cometidos pelos estudantes.

Martins e Branco (2018), numa investigação sobre a interpretação de estratégias de resolução de tarefas sobre números racionais, revelaram que os professores foram capazes de identificar o raciocínio de alunos em tarefas que envolvem a representação pictórica de números racionais e que conseguiram interpretar resoluções de alunos com operações de números racionais e representações pictóricas. No entanto, nem todos se mostraram capazes de identificar estratégias ou erros relativos aos números racionais, particularmente com operações com frações.

Outro aspeto crítico do conhecimento matemático do professor refere-se à compreensão dos próprios procedimentos matemáticos ensinados. Ribeiro (2009) investigou o conhecimento necessário para ensinar números racionais, com foco na multiplicação de números decimais. O estudo revelou que os professores desconheciam modelos conceituais da multiplicação e os processos subjacentes aos algoritmos que transmitiam aos alunos, evidenciando lacunas tanto no Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) quanto no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). Ribeiro (2011) considera ser ainda mais problemático, pois “ninguém pode ensinar aquilo que não se sabe” e que os professores só irão alterar essa prática se forem possuidores de um saber ensinar a fazer, mais do que apenas um saber fazer (Ribeiro, 2011; Ball et al., 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill et al., 2005).

Metodologia

A investigação na sua globalidade foi desenvolvida através de métodos qualitativos e quantitativos (Tashakkori & Teddlie, 2003), que se complementaram ao longo de todo o processo investigativo, tendo como objetivo final o estudo do conhecimento matemático de professores de 1.º CEB e de Matemática no 2.º CEB em Portugal. O presente artigo focou-se no tema Números relacionado com os números racionais e no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), definindo-se assim como questão de investigação: qual o desempenho de professores portugueses em questões sobre números racionais que exigem SCK?

O processo metodológico de todo o trabalho (Gonçalves, 2020) dividiu-se em duas fases complementares. A primeira fase consistiu na seleção criteriosa de um conjunto de questões de escolha múltipla, originalmente desenvolvidas pelo grupo de investigação de Michigan no âmbito do projeto *Learning Mathematics for Teaching (LMT)*. Estas questões foram traduzidas e adaptadas ao contexto educativo português, assegurando a sua validade linguística e cultural. A segunda fase teve como



objetivo analisar o MKT de professores portugueses dos primeiros anos de escolaridade. Para isso, foi aplicado um questionário composto por 29 questões focadas no tema Números (Gonçalves, 2020), sendo que duas dessas questões constituem o objeto de análise no presente artigo.

Este questionário foi respondido por uma amostra de 61 professores, cujo perfil será apresentado mais à frente. A análise estatística das respostas foi realizada com recurso ao programa IBM SPSS Statistics (versão 25), através da aplicação de estatísticas descritivas e medidas de correlação, com o intuito de caracterizar o MKT dos participantes.

Complementarmente, foram selecionados dois docentes que foram submetidos a entrevista, com o objetivo de verificar, através dos seus desempenhos nas entrevistas, se as respostas que deram ao questionário são consistentemente adequadas ao seu raciocínio, servindo também essas entrevistas para acrescentar mais informação acerca do Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) por professores participantes do estudo.

A amostra de professores

Para obter a amostra, utilizou-se uma amostragem não aleatória do tipo bola de neve (Bockorni & Gomes, 2021). O questionário foi inicialmente enviado para diversas escolas da região Norte de Portugal. Nas escolas que aceitaram participar, os Coordenadores do 1.º Ciclo e do Departamento de Matemática encaminharam o questionário aos docentes dos 1.º e 2.º CEB, especificamente de Matemática e Ciências Naturais. Como resultado, 61 professores responderam ao questionário, constituindo a amostra deste estudo.

No que diz respeito aos 61 professores, refira-se que, como se verifica no gráfico circular (figura 1), a maioria leciona o 1.º CEB.

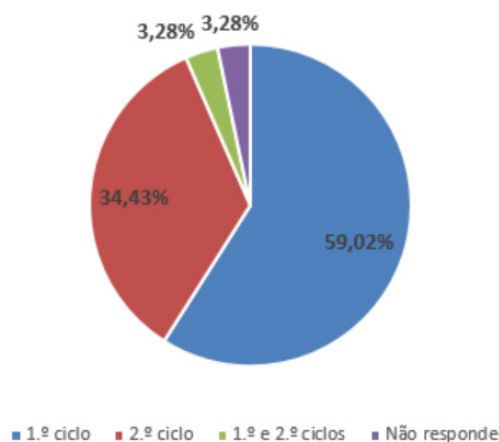


Figura 1. Percentagem de professores, participantes do estudo, que lecionam em cada ciclo de ensino

Além disso, note-se que 79 % (48) são do género feminino e os restantes, 16 % (10) do masculino, sendo que três professores não indicaram o seu género.



Quanto à idade dos intervenientes desta investigação, esta amostra de docentes caracteriza-se como heterogénea, como se verifica na figura 2, contendo professores com idades compreendidas entre os 21 e os 25 anos, professores com mais de 60 anos e apenas 1 não respondeu.

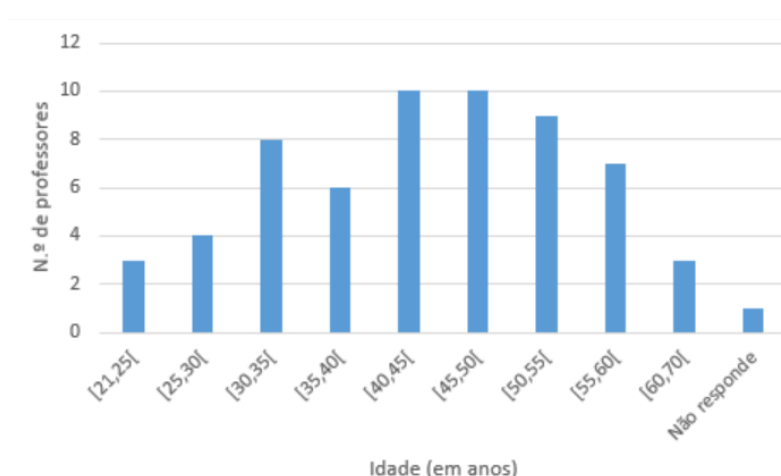


Figura 2. Idade (em anos) dos intervenientes desta investigação

De referir ainda que, a maioria dos professores profissionalizados que responderam ao questionário, 67% (41), indicou ser licenciado; cerca de 16% (10) disse ter mestrado, 5% (3) referiu ter completado, para além da licenciatura, um curso de pós-graduação, e também 5% (3) mencionaram, ter bacharelato, os restantes 7% (4) não responderam.

Os entrevistados

As entrevistas foram realizadas com dois professores que responderam ao questionário, escolhidos com base nas diferenças significativas que apresentavam em vários dos parâmetros definidos para a seleção. A intenção foi garantir diversidade nos perfis, de forma a enriquecer a análise do MKT. Os critérios considerados na seleção dos entrevistados foram os seguintes:

- o desempenho obtido no questionário de avaliação do MKT;
- tempo de serviço docente;
- o nível de ensino que leciona;
- o tipo de escola onde exerce funções de docência (pública ou privada).

Na tabela 2 resume-se a caracterização dos dois entrevistados.

Tabela 2. Dados dos professores entrevistados (adaptado de Gonçalves, 2020)

Nome	Classificação obtida no teste	Tempo de serviço docente	Nível de ensino que leciona	Tipo de escola
Maria	50%	22 anos	2.º CEB	Pública
Pedro	92%	6 anos	1.º CEB	Privada

As questões do questionário

Para este estudo selecionaram-se duas questões que fazem parte do questionário constituído por 29 perguntas do tema *Números* (Gonçalves, 2020) e que requerem Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) relativo aos números racionais.

Devido à confidencialidade das questões, exigida pelos autores do projeto LMT, não podem ser apresentadas as perguntas, mas será feita a sua necessária descrição e caracterização, segundo os seguintes parâmetros: *Conteúdo Matemático* que apresentam e *Conteúdo da Tarefa* que exigem.

Em suma, apresenta-se, na tabela 3, a caracterização das questões em estudo, que será explanada com mais pormenor no ponto 4.

Tabela 3. Caracterização das questões em estudo (adaptado de Gonçalves, 2020)

Número da questão	Conteúdo Matemático	Conteúdo da Tarefa
Questão 4	Simplificação de frações	Analisar explicações de alunos
Questão 7	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	Selecionar o melhor exemplo

Note-se que o *conteúdo da tarefa* se refere ao que a questão exige exatamente que o professor faça, isto é, por exemplo: se se trata de analisar várias explicações matemáticas de alunos e identificar a apropriada, se é uma questão que pressupõe a análise de definições de manuais diferentes e selecionar a mais adequada didática e matematicamente, ou se é uma questão que requer a avaliação da resolução de um algoritmo por um aluno.

Resultados e sua discussão

De seguida, irão ser analisados os resultados dos professores participantes neste estudo nas duas questões em análise, e a prestação de dois destes docentes nas entrevistas.



Questão 4

A questão 4 aborda o conceito matemático de frações equivalentes, que faz parte do programa do 5.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021).

Nesta questão, os professores tinham de selecionar a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido porque é que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente. Assim, era exigido, nesta questão, ao professor, um SCK para “avaliar rapidamente a plausibilidade das questões (reivindicações) dos alunos” (Ball et al., 2008, p. 400).

Um professor responderia corretamente se identificasse que a simplificação das frações se resume à divisão das frações por um e que, por essa razão, a nova fração representa a mesma quantidade do que a primeira.

Em baixo (figura 3), apresenta-se um exemplo fornecido aos professores pelo Caderno de Apoio ao 1.º ciclo, com base nas Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (Bivar et al., 2013, p. 72), que mostra como pode ser abordada a equivalência de frações com os alunos de modo a entenderem os conteúdos presentes na questão 4 deste teste.

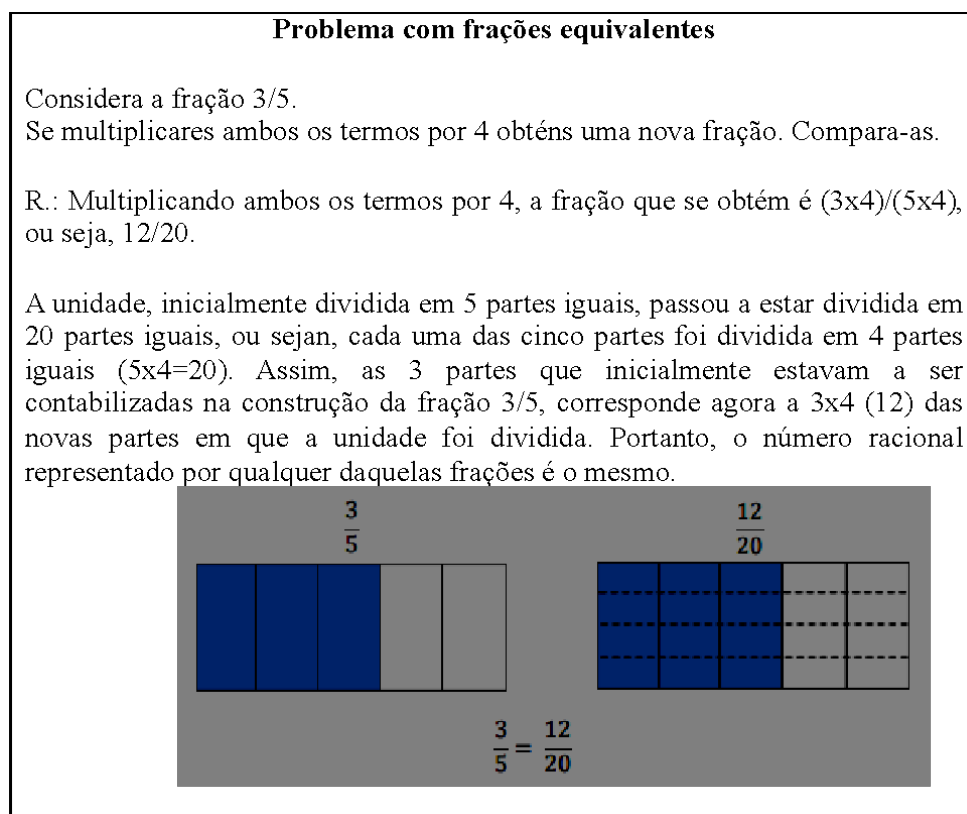


Figura 3. Problema com frações equivalentes (adaptado de Bivar et al., 2013)



Após a resolução geométrica desta questão, o professor poderia também chamar a atenção aos seus alunos que:

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{12}{20} : 1 = \frac{12}{20} : \frac{4}{4} = \frac{3}{5}$$

Assim, os alunos verificariam que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente, na medida em que na realidade só se está a dividir a fração (neste caso, 12/20) por um, logo esta fração representa a mesma quantidade (do que 3/5), o que justifica a opção correta à questão 4.

No presente estudo, como se observa na tabela 4, em baixo, apenas 18% (11) dos professores identificou corretamente a afirmação: “esta regra resulta porque na realidade só se está a dividir a fração por 1, logo a nova fração é a mesma quantidade”. 78,7% (48) não selecionaram a melhor explicação e 3,3% (2) não responderam.

Tabela 4. Respostas dos professores participantes à questão 4 (adaptado de Gonçalves, 2020)

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	48	78,7
Correta	11	18,0
Não responde	2	3,3
Total	61	100

Relativamente aos 48 participantes que não responderam corretamente, constatou-se que selecionaram argumentos que traduziam regras ou procedimentos de simplificação de frações ou exemplos de frações equivalentes, como a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido porque é que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente.

Nesta questão, a professora Maria não selecionou a melhor explicação. Considerou que a melhor evidência de que um aluno tinha compreendido o processo de simplificações de frações se referia a: “esta regra resulta porque se divide o número de cima e o de baixo pelo mesmo número, logo a nova fração tem que representar a mesma quantidade”.

Na entrevista, Maria manteve a sua resposta e justificou o seu raciocínio, o que revela que a sua resposta ao questionário é consistente e coerente com o seu pensamento. A sua justificação foi a seguinte:

Maria: Eu consigo demonstrar isto aos miúdos através de objetos:



Nós temos um jogo das frações e eles conseguem perceber que quando dividimos o numerador e denominador pelo mesmo número, ...o número é o mesmo, mantém... e depois faz-se através da divisão: se eu tenho $12/4$ e $6/2$, divido o 12 pelo 4 e 6 pelo 2 e o número é o mesmo... Mas tem de ser concretizado, porque senão... eles não percebem: Nesta fase tem de haver concretização de tudo!... e as frações não são fáceis de entender... eles não conseguem perceber.

Desta afirmação verifica-se que Maria revela um conhecimento processual e não concetual (Hiebert & Lefevre, 1986) da simplificação de frações.

Nesta questão e ao longo de toda a entrevista, Maria mostrou alguma dificuldade em separar o que considera ser (mais) correto matematicamente e aquilo que lhe parece que os seus alunos são capazes de perceber, como se verifica de seguida.

Investigador – Mas não considera importante que os alunos compreendam que na realidade só se está a dividir a fração por 1?... logo as frações são equivalentes, representam a mesma quantidade?
Maria – Não, porque eles não percebem! É completamente abstrato.
Eu aqui tenho de lhes provar que aqui vai dar o mesmo número.

Neste excerto, a professora Maria utiliza o termo *provar* como sinónimo de *exemplificar*. Ora a prova em matemática tem um sentido preciso. Por exemplo, Mariotti (2006, p.199), refere que a prova matemática tem, evidentemente, a função de validação — confirmando a veracidade de uma afirmação e verificando a coerência lógica dos argumentos envolvidos. No entanto, para além desse propósito, deve também desempenhar um papel mais amplo na construção e aprofundamento do conhecimento matemático.

Hanna (2014) observa que as recomendações curriculares existentes para a prova matemática em sala de aula são sobretudo baseadas no facto de a prova matemática contribuir para a compreensão concetual.

Durante a entrevista, o professor Pedro explicou que não respondeu à questão 4, relacionada com a simplificação de frações, porque não lhe dedicou tempo suficiente, acrescentando que teria conseguido resolvê-la se o tivesse feito.

Aquando da entrevista, respondeu a esta pergunta de forma correta e justificou o seu raciocínio.

Pedro – Quando li a hipótese B não identifiquei logo..., mas neste momento, seria a minha resposta... porque, no fundo, quando estamos a dividir ou a multiplicar o numerador e o denominador estamos a multiplicar ou a dividir por 1 porque é o mesmo número sobre o mesmo número. De qualquer forma, esta explicação... ou melhor, esta explicação é a única explicação que, apesar do nível de abstração..., é uma coisa que faz sentido e o que dá uma lógica que as crianças podem perceber é de facto esta opção B, porque também já aprenderam a multiplicação e a divisão por 1.

Apesar de não ter respondido a esta questão no questionário, neste excerto, Pedro demonstra ter um SCK, uma vez que de entre as respostas dos alunos é capaz de selecionar a que fornece a melhor evidência de que o aluno compreende que através da simplificação de frações se obtém uma fração equivalente.



Questão 7

Na questão 7 patenteia-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como uma estratégia de cálculo mental. Formalmente, as propriedades das operações matemáticas só aparecem nas Aprendizagens Essenciais (Canavarro et al., 2021) no 5.º ano, no entanto, a exercitação do cálculo mental e de estratégias de cálculo, segundo consta neste documento, devem desenvolver-se “(...) desde os primeiros dias de escola e a prosseguir ao longo dos anos, ampliando-se progressivamente o leque das estratégias que os alunos podem mobilizar e o universo numérico da sua aplicação” (Canavarro et al., 2021, p. 10).

Para responder corretamente a esta pergunta, um professor teria de “encontrar um exemplo para fazer um ponto específico da matemática” (Ball et al., 2008, p.400), mais concretamente, teria de selecionar o melhor exemplo, dos quatro apresentados, para ajudar a sua turma a perceber que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em algumas situações, faz com que as expressões numéricas sejam mais fáceis de se resolver. Nesta linha de ideias, a resposta à questão 7 exigia um SCK.

De forma semelhante, nesta investigação, como está patente na tabela 5, 38% dos professores intervenientes responderam corretamente, isto é, selecionaram a expressão , em que realmente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição traz vantagens na agilidade do cálculo mental.

Tabela 5. Respostas dos professores participantes à questão 7.

Caracterização das respostas	Frequência	Percentagem
Incorreta	34	56
Correta	23	38
Não responde	4	6
Total	61	100

Constata-se também na tabela acima que 56% dos professores selecionaram uma das três expressões numéricas em que a propriedade em causa não é facilitadora do cálculo.

Repare-se que muitas vezes, utilizar-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição torna os cálculos mais fáceis e mais rápidos, relativamente ao uso das regras de resolução de expressões numéricas, em que a resolução do que está dentro de parêntesis é prioritária. Refira-se que é muito importante não só que os alunos saibam usar esta propriedade, mas também que percebam em que situações é que a sua utilização traz vantagens em termos de cálculo, na figura 4.



Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação é vantajosa

Primeira resolução, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$15 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) = 15 \times \frac{2}{3} + 15 \times \frac{3}{5} = 10 + 9 = 19$$

Segunda resolução, não se utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$15 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\right) = 15 \times \left(\frac{10}{15} + \frac{9}{15}\right) = 15 \times \left(\frac{10+9}{15}\right) = 15 \times \frac{19}{15} = 19$$

Figura 4. Vantagens no uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (adaptado de Gonçalves, 2020)

No entanto, há situações em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pode dificultar o cálculo, como no exemplo da figura 5.

Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação não é vantajosa

Primeira resolução, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\frac{1}{4} \times (3 + 9) = \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 9 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Segunda resolução, não se utilizando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$\frac{1}{4} \times (3 + 9) = \frac{1}{4} \times 12 = \frac{12}{4} = 3$$

Figura 5. Exemplo em que o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição não é vantajoso (adaptado de Gonçalves, 2020)

Na questão 7 em estudo neste trabalho, sobre as vantagens da utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a professora Maria selecionou uma opção em que esta propriedade não se caracteriza como vantajosa em termos de cálculo e manteve e justificou a resposta que deu no questionário.

Como se observa no extrato da entrevista em baixo, Maria focou-se na regra de resolução de expressões numéricas com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Maria – Quando nós damos a propriedade distributiva... nós damos a propriedade distributiva e depois fazemos o inverso.

Eu aqui aprendi uma vez com um professor, já foi na faculdade... a “propriedade do baile”... é assim que eu ensino aos alunos. É uma analogia. Eu uso e retiro a analogia. Mas para eles perceberem que é a distribuição do 7 pelos dois algarismos que estão dentro dos parêntesis.

Portanto, este é o cavalheiro que dança com a primeira senhora e depois vai dançar com a segunda senhora.

...e eles conseguem perceber, mecanizam e conseguem utilizar a propriedade distributiva.



Depois, faço precisamente o contrário, que é... se nós formos pelas regras das operações, das expressões numéricas, o que é que se faz em primeiro lugar? O que está dentro de parêntesis. ...e eles conseguem perceber...
Este para mim era o melhor exemplo. E ainda uso.

Deste excerto denota-se que a professora tem o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, na medida em que explica como se utiliza na prática. No entanto, também é importante, até mesmo se pode dizer crucial, que os professores mostrem aos alunos como podem usar esta e outras propriedades das operações matemáticas, de modo a que prossigam a “compreensão dos números e das operações, bem como da fluência do cálculo mental e escrito” (Canavarro et al., 2021, p. 4), isto é, tenham um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).

Por outro lado, o professor Pedro respondeu corretamente à pergunta que abordava a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, no questionário. Na entrevista, explicou o raciocínio que utilizou, justificando a sua resposta de forma consistente com a opção de resposta que escolheu no questionário.

Pedro – Escolhi a hipótese D – $12 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right)$ – pois é a única expressão numérica que se verifica que em algumas situações a propriedade distributiva da multiplicação pode facilitar o cálculo, comparativamente à resolução de uma expressão numérica “normal”, em que se dá prioridade aos parêntesis.

Em todas as outras opções A, B e C, a propriedade distributiva tornava os cálculos mais complexos. Assim, nenhuma destas três opções seria indicada escolher para mostrar aos alunos uma situação em que a propriedade distributiva ajuda no cálculo.

O docente revela, mais uma vez, deter um Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). Neste caso, revela ser capaz de entre quatro expressões numéricas selecionar a que seria o melhor exemplo para ajudar a sua turma a perceber que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, nalgumas situações, faz com que as expressões numéricas sejam mais fáceis de resolver.

Conclusões

A presente investigação analisou o desempenho de 61 professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico na resolução de um questionário e, de forma mais aprofundada, o raciocínio de dois desses professores em entrevistas semiestruturadas. O objetivo foi caracterizar o seu Conhecimento Matemático para Ensinar (MKT) no tema Números, com especial enfoque nos números racionais e na dimensão do Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK).

Os resultados obtidos indicam que, ao resolverem questões que exigiam SCK, os participantes evidenciaram diversas dificuldades. Em particular, na avaliação de explicações matemáticas de alunos, observou-se uma tendência para valorizar respostas baseadas em exemplos ou na descrição de procedimentos, em detrimento de justificações conceituais mais fundamentadas.



Este padrão sugere o predomínio do conhecimento processual sobre o conhecimento concetual (Hiebert & Lefevre, 1986) e revela fragilidades no domínio do SCK.

Adicionalmente, verificou-se que os professores, em geral, centraram a sua atenção na explicação de regras matemáticas, mas revelaram dificuldades em encontrar exemplos adequados para ilustrar a aplicação dessas regras — uma competência essencial no âmbito do SCK. Estes resultados levantam questões relevantes sobre a necessidade de reforçar a formação inicial e contínua dos professores, no sentido de aprofundar o seu conhecimento concetual em Números Racionais e em outros tópicos matemáticos fundamentais.

Com base nestes dados, sugere-se que a formação docente inclua tarefas que promovam a análise crítica e a comparação de diferentes estratégias de resolução de problemas, incentivando os futuros professores a justificar e a reconhecer respostas matematicamente mais rigorosas. Recomenda-se ainda a criação e adaptação de questões com níveis graduados de complexidade, de forma a fomentar o desenvolvimento de um conhecimento mais profundo, articulado e flexível — essencial para uma prática pedagógica mais eficaz no ensino da matemática.

Importa, contudo, reconhecer algumas limitações do estudo. O número restrito de entrevistas analisadas (dois casos) limita a possibilidade de generalização dos resultados. Além disso, a análise centrou-se em apenas duas questões do questionário, o que pode não refletir a totalidade das competências matemáticas dos participantes no domínio dos números racionais. Futuras investigações poderão ampliar o número de participantes em entrevistas e explorar uma gama mais diversificada de tarefas, permitindo uma caracterização mais abrangente e robusta do SCK dos professores.

Contribuições dos autores

Conceção, coleta e análise dos dados: Catarina V. Gonçalves e Alexandra Gomes. Escrita e revisão do artigo: Catarina V. Gonçalves e Alexandra Gomes.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia - no âmbito do Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho com as referência UID/00317: Centro de Investigação em Estudos da Criança.

Bibliografia

- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90, 449-466. <http://doi.org/10.1086/461626>
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407. <http://doi.org/10.1177/0022487108324554>

- Ball, D.L., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, 29 (1) 14-46. <http://hdl.handle.net/2027.42/65072>
- Bivar, A. G., Grosso, C., Oliveira, F. e Timóteo, M. C. (2013). *Caderno de Apoio ao 1.º ciclo*. Ministério da Educação.
- Blomeke, S., Gustafsson, J. E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223(1), 3-13. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194>
- Brocardo, J., & Carrillo, J. (2019). Ensino e aprendizagem dos números e das operações. *Quadrante*, 28(2), 1–5. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23028>
- Bockorni, B. R. S. & Gomes, A. (2021). A amostragem em snowball (bola de neve) em uma pesquisa qualitativa no campo da administração. *Revista de Ciências Empresariais da UNIPAI*, 22(1). <http://10.25110/receu.v22i1.8346>
- Canavarro, A., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P. M., & Espadeiro, R. G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico*. Direção-Geral de Educação.
- Caseiro, A. & Ribeiro, C., M. (2012). Conhecimento de futuros professores dos Primeiros Anos: uma experiência com racionais. In R. Cadima, I. Pereira, H. Menino, I.S. Dias & H. Pinto (Eds). *Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação*, 393-400. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria. (ISBN:978-989-95554-9-5).
- Charalambous, C. Y., Hill, H. C., Chin, M. J., & McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: Exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(6), 579-613. <http://doi.org.10.1007/s10857-019-09443-2>
- Cole, Y. A. (2011). *Mathematical knowledge for teaching: Transferability and use in the Ghanaian context: A pilot study*. Paper presented at the AERA Annual Meeting.
- Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge on teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(3), 280-330. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.3.0280>
- Copur-Gencturk, Y. & Tolar, T. (2022). Mathematics teaching expertise: A study of the dimensionality of content knowledge, pedagogical content knowledge, and specif noticing skills. *Teaching and Teacher Education*, 114(5), 1-13, <http://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103696>.
- Copur-Gencturk, Y., Tolar, T., Jacobson, E., & Fan, W. (2019). An empirical study of the dimensionality of the mathematical knowledge for teaching construct. *Journal of Teacher Education*, 70(5), 485-497. <http://doi.org.10.1177/0022487118761860>
- Delaney, S. (2008). *Adapting and using U. S. measures to study Irish teachers' Mathematical Knowledge for Teaching*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Michigan.
- European Commission (2018). *Boosting teacher quality: pathways to effective policies*. Publications Office. <https://data.europa.eu/doi/10.2766/069297>.
- Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores de 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Tese de Doutoramento (não publicada), Instituto da Criança da Universidade do Minho.
- Gonçalves, C. V. (2020). *O conhecimento matemático de professores portugueses de matemática dos primeiros anos*. Tese de Doutoramento (não publicada). Instituto de Educação da Universidade do Minho.

- Hanna, G. (2014). The width of a proof. *PNA*, 9 (1), 29-39.
- Haycock, K. (2006). *Improving achievement and closing gaps, Pre-K through college*. <http://www2.edtrust.org/EdTrust/Product+Catalog/recent+presentations>.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In: J. H. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics*, 1-27. Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9780203063538>
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406. <http://doi.org/10.3102/00028312042002371>.
- Hill, H. C., Schilling S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary Journal*, 105 (1), 11-30. <https://doi.org/10.1086/428763>.
- Kwon, M. (2009). *Validating the adapted mathematical knowledge for teaching (MKT) measures in Korea*. Paper presented at the AERA 2009 Annual Meeting.
- Li, Y., & Kaiser, G. (Eds.). (2011). *Expertise in mathematics instruction: An international perspective*. <http://doi.org/10.1007/978-1-4419-7707-6>
- Ma, L. (1999). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Gradiva.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. B. Gutiérrez, *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future*, pp. 173-204. Ed. Sende Publishers. doi.org/10.1163/9789087901127_008
- Martins, C. M., & Branco, N. (2018). Interpretação por futuros professores de educação básica de estratégias de resolução de tarefas envolvendo números racionais. *Atas XXIX SIEM*, 125-128.
- Ministério da Educação. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação.
- Mosvold, R., Fauskanger, J., Jakobsen, A. & Melhus, K. F. (2009). Translating test items into Norwegian - without getting lost in translation? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 14 (4), 9-31. <http://doi.org/10.7146/nomad.v14i4.148213>
- Ng, D. (2011). Using the MKT measures to reveal Indonesian teachers' mathematical knowledge: challenges and potentials. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, 44(3), 1–13. <http://doi.org/10.1007/s11858-011-0375-9>.
- Pinto, H. e Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, 3 (1), 80-98.
- Ribeiro, C. M. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Bolema*, 34, 1-26.
- Ribeiro, C. M. (2011). Conhecimento e desenvolvimento profissional do professor. Analisando a prática de Maria, uma professora do 1.º Ciclo. *Indagatio Didactica*, 3(1), 41-58. <https://doi.org/10.34624/id.v3i1.4556>
- Sanders, W.L., & Rivers, J.C. (1996). *Cumulative and residual effects of teachers on future student academic achievement*. Research Progress Report. University of Tennessee Value-Added Research and Assessment Center.
- Scheiner, T., Buchhiltz, N. & Kaiserm G. (2023). Mathematical knowledge for teaching and mathematics didactic knowledge: a comparative study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27, 1083-1104. Springer. <https://doi.org/10.1007/s10857-023-09598-z>.



- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <http://www.jstor.org/stable/1175860>.
- Silva, L. T. S., Santos, T. de F. O., Almeida, R. N., & Amorim, M. (2021). Conhecimentos Evidenciados Por Futuras Professoras de Matemática Sobre os Números Racionais e Sobre seu Ensino. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática*, 14(2), 173–180. <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n2p173-180>
- Sitabkhan, Y., Alikova, A., Toktogulova, N., Zholdosbekova, A., Ralaingita, W., & Stern, J. (2024). *Understanding Primary School Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching*. RTI Press. <https://doi.org/10.3768/rtipress.2024.rr.0052.2409>
- Tashakkori, A. & Teddlie, C. (2003). The past and future of mixed methods research: From data triangulation to mixed model designs. In A. Tashakkori & C. Teddlie (Eds.), *Handbook on mixed methods in the behavioral and social sciences* (671-701). Sage Publications.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): conceptual framework*. Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University