desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

As representações matemáticas na formação inicial de professores do Ensino Básico

Mathematical representations in pre-service of Basic Education teachers

Las representaciones matemáticas en la formación inicial del profesorado de Educación Básica

Adriana Matias Pereira Ferreira
Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto
Agrupamento de Escolas Doutor Manuel Laranjeira, Espinho
adriana@ese.ipp.pt

Resumo

As representações matemáticas ocupam cada vez mais um lugar central nas aulas de matemática e na planificação de tarefas com sentido que impliquem pensar e fazer, mais do que memorizar definições e procedimentos. Os normativos que regulam a atividade matemática, assim como os principais documentos de referência, apontam o conhecimento e uso de representações múltiplas como um dos objetivos centrais da aprendizagem matemática. Neste sentido, o presente estudo tem como principal objetivo a identificação de diferentes tipos de representação, desde uma representação pictórica, mais informal, às representações simbólicas matemáticas, utilizados por alunos do ensino superior, futuros professores do Ensino Básico, e o desenvolvimento da capacidade de compreender e usar diferentes representações convencionais da matemática, escolhendo as mais adequadas a cada situação problemática. A investigação enquadra-se numa abordagem qualitativa e interpretativa, desenvolvida com um total de sessenta e oito estudantes, que resolveram um conjunto de três tarefas que solicitam uma diversidade de representações para a sua compreensão, exploração, registo e solução. Como instrumentos de recolha de dados, recorreu-se à recolha documental das produções dos estudantes, à observação, às notas de campo e ao registo áudio.
Os resultados demonstram que os estudantes têm facilidade na construção de variadas representações matemáticas, predominando as representações informais do tipo pictórico ou icónico para compreensão do enunciado e aparecendo como mais comuns as representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético para resolução e procura de uma resposta. A natureza da tarefa parece influenciar a escolha de um ou de outro tipo de representação. É ainda evidente a abertura para outras formas de representar diferentes das produzidas, desde que haja uma explicação e consequente compreensão das mesmas.

Palavras-chave: Formação inicial de professores; Representações matemáticas; Resolução de problemas.

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

Abstract

Mathematical representations increasingly occupy a central place in mathematics classes and in the planning of tasks with meaning that imply thinking and doing, rather than memorizing definitions and procedures. The main reference documents that regulate mathematical activity point to the knowledge and use of multiple representations as one of the central objectives of mathematical learning. In this sense, the main objective of this study is the identification of different types of representations, from a more informal pictorial representation to mathematical symbolic representations, used by university students, future teachers, and the development of the ability to understand and use different conventional representations, choosing the most appropriate to each problematic situation.
The research is part of a qualitative and interpretative approach, developed with a total of sixty-eight students, who solved a set of three tasks that require a wide range of representations in order to understand, explore, register and to find a solution. The data collection instruments used were documentary analysis of student productions, observation, field notes and audio recording.
The results show that students have ease in building varied mathematical representations. For comprehension of the utterance predominate the informal representations of the pictorial or iconic type; but for resolution and response appear as more common the mathematical symbolic representations of the arithmetic type. The nature of the task seems to influence the choice of one or another type of representation. It is also evident to accept other forms of representation, different from those produced, the students needed an explanation and consequent understanding of them.

Keywords: Pre-service teachers education; Mathematical representations; Problem solving.

Resumen

Las representaciones matemáticas ocupan cada vez más un lugar central en las clases de matemáticas y en la planificación de tareas que impliquen pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos. La normativa que regula la actividad matemática, así como los principales documentos de referencia, señalan el conocimiento y uso de representaciones múltiples como uno de los objetivos centrales de aprender matemáticas. Asique, el presente estudio tiene como principal objetivo la identificación de diferentes tipos de representación, desde una representación pictórica más informal hasta representaciones simbólicas matemáticas, utilizados por alumnos de enseñanza superior, futuros profesores de Enseñanza Básica, y el desarrollo de la capacidad de comprender y utilizar diferentes representaciones convencionales de las matemáticas, eligiendo las más adecuadas a cada situación problemática.
La investigación se enmarca en un enfoque cualitativo e interpretativo, desarrollado con un total de sesenta y ocho estudiantes, que han resuelto un conjunto de tres tareas que requieren una diversidad de representaciones para su comprensión, exploración, registo y solución. Como instrumentos de recolección de datos se utilizaron el análisis documental de las producciones estudiantiles, la observación, las notas de campo y la grabación de audio.
Los resultados demuestran que los estudiantes tienen facilidad en la construcción de variadas representaciones matemáticas, predominando las representaciones informales del tipo pictórico o icónico para comprensión del enunciado y apareciendo como más comunes las representaciones simbólicas matemáticas del tipo aritmético para resolución y búsqueda de una respuesta. La naturaleza de la tarea parece influir en la elección de uno u otro tipo de representación.

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

También es evidente la apertura hacia otras formas de representar distintas de las producidas, siempre que haya una explicación y consecuente comprensión de las mismas.

Palabras claves: La formación inicial del profesorado; Representaciones matemáticas; Resolución de problemas.

Introdução

A compreensão matemática, assim como o seu uso de forma adequada em situações do quotidiano, tem como suporte o raciocínio, sendo, portanto, um dos aspetos centrais do trabalho do professor promovê-lo. Esta capacidade de pensar em Matemática está em muito relacionada com a perceção e compreensão dos processos e práticas que lhe são inerentes, nomeadamente, com o conhecimento de diferentes formas de representar (NCTM, 2007; Brodie, 2010).

Na verdade, as representações matemáticas têm um papel central no raciocínio matemático e na resolução de problemas, o que é já reconhecido pelo National Council of Teachers of Mathematics (2007), que as considera um dos “process standards”, bem como pelos documentos curriculares de relevância para a aprendizagem da disciplina. Já o Programa de Matemática para o Ensino Básico (Damião *et al*., 2013), agora revogado, reforçava a importância do recurso a representações cada vez mais sistemáticas e formalizadas ao longo da escolaridade como um dos objetivos intrínsecos à resolução de problemas; as Aprendizagens Essenciais da Matemática para o Ensino Básico, atualmente em vigor, redigidas em articulação com o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, apontam o desenvolvimento da “capacidade de usar representações múltiplas, como ferramentas de apoio ao raciocínio e à comunicação matemática” (Canavarro, 2021, p. 3), como um dos oito objetivos que os alunos devem alcançar para aprender matemática.

Cabe ao professor, enquanto orientador no processo de aprendizagem, garantir que os seus alunos contactam, exploram e dominam diferentes formas de representar em Matemática, sendo que para tal é necessário que também eles as conheçam e delas se apropriem. Assim, o presente estudo tem como principal objetivo analisar as diferentes representações matemáticas utilizadas por estudantes do Ensino Superior, futuros professores, na resolução de um conjunto de tarefas diversificadas, entendendo-se este como o primeiro passo para um trabalho mais amplo que permitirá refletir sobre as necessidades de formação dos futuros professores do ensino básico.

Contextualização teórica

As representações em Matemática

A matemática é uma área do saber que recorre a uma diversidade imensa de processos de aquisição de conhecimento com funções cognitivas distintas, mas com um objetivo comum: alcançar a compreensão matemática. São vários os estudos que referem as dificuldades que

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

os estudantes sentem neste domínio, muitos deles com foco na resolução de problemas. O uso da noção de representação matemática pode ser utilizado para compreender e caracterizar os processos de resolução de problemas e aferir sobre as dificuldades evidenciadas (Duval, 2006).

Na investigação em educação matemática as representações tem sido um tema cada vez mais debatido, principalmente desde que foram reconhecidas como um processo matemático pelo NCTM, importando, assim, definir este conceito. De acordo com o NCTM (2007), as representações são processos e produtos, modos de "aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesmo" (p. 75), tornando-se, por isso, ferramentas privilegiadas para organizar ideias em matemática, registá-las e, ainda, comunicá-las. A maioria dos autores que explora este tema confirma esta definição, reforçando ainda que as representações não são produtos estáticos, mas sim um processo dinâmico, utilizado para articular, ligar, esclarecer e explicar raciocínios, pelo que se tornam essenciais na construção do conhecimento matemático ou de relações em matemática (Woleck, 2001). De acordo com Goldin, "a representation is a configuration that can represent something else in some manner" (2002, p. 208). A este propósito importa ainda salientar que "os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjeturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas" (NCTM, 2007, p. 240). Tripathi (2008) concorda que as representações facilitam a interpretação, comunicação e discussão de ideias, acrescentando que são construções mentais ou visíveis que permitem estruturar um conceito matemático e relacioná-lo com outros conceitos.

De facto, as representações permitem, muitas vezes, a autocompreensão de um enunciado matemático, funcionando como verdadeiros tradutores de uma linguagem corrente para uma linguagem matemática (ainda que possa ser a um nível informal). Todavia, é muito complexa a relação entre uma determinada representação e o seu significado (Goldin, 2008), já que "uma representação pode representar vários objetos distintos e objetos diferentes podem ter uma mesma representação" (Velez, 2020, p.10). Neste contexto, importa notar que as representações matemáticas não podem ser analisadas e compreendidas de forma isolada (Velez, 2020; Pinto & Canavarro, 2012), mas antes "no quadro de um determinado sistema de representação com regras, significados e normas globalmente aceites" (Velez, 2020, p.10). Goldin (2008) refere que estes sistemas de representações possuem uma estrutura flexível, na medida em que estão em permanente alteração, embora essa estrutura seja também complexa e bem organizada por incluir diferentes representações e relações entre elas. A este propósito, Velez (2020) explica:

> Na prática, o desenvolvimento do sistema de representação de cada pessoa é um processo moroso, em que é necessário comparar e estabelecer conexões entre uma nova representação e as representações que já conhecemos, com o intuito de compreender o seu significado e assim conseguir utilizá-la adequadamente em situações futuras (p. 10).

De facto, são vários os estudos que evidenciam a importância das representações matemáticas, destacando importantes definições e refletindo sobre as dificuldades que os estudantes

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

habitualmente revelam no seu uso. Goldin (2002) distingue representações internas de externas, referindo que as primeiras estão diretamente relacionadas com o raciocínio do aluno, pelo que são mentais ou não observáveis; já as representações externas são observáveis e podem ser analisadas e compreendidas, já que têm de ser comunicadas de forma verbal ou através de desenhos, esquemas, gráficos, entre outros. Deste modo, as representações externas, também designadas por representações semióticas, são essenciais para (a) entender o modo como o aluno interpretou o problema e (b) definir a intervenção do professor.

Por este motivo, vários autores se debruçam essencialmente sobre os sistemas de representação externos, procurando categorizar diferentes tipos de representações. Brunner (1999) distingue três tipos de representações externas: as ativas, as icónicas e as simbólicas. As primeiras estão diretamente relacionadas com a ação e, portanto, implicam a manipulação de materiais que podem ser estruturados ou não. As representações icónicas caracterizam-se pela "organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo" (Brunner, 1999, p.28), pelo que incluem a produção de desenhos, esquemas, diagramas ou outros símbolos não convencionais. Por fim, as representações simbólicas constituem um modo mais complexo de representar, com recurso a palavras ou linguagem simbólica, a símbolos matemáticos, a números ou a fórmulas. Para o mesmo autor, são "um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições" (p.66).

Pinto e Canavarro (2012), utilizando a terminologia de Brunner, identificam ainda subcategorias nas representações icónicas:

(i) o desenho, que segundo Cavalcanti (2001), citado por Pinto e Canavarro (2012),

> pode ser usado de três maneiras diferentes na resolução de problemas: a) para representar aspetos da situação apresentada no texto sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas. b) para representar a resolução completa do problema utilizando apenas o desenho e c) o aluno mistura desenho e símbolos matemáticos (p. 5).

(ii) os símbolos não convencionais, que são símbolos não matemáticos, como traços, pintinhas ou outros, que apesar de representarem elementos da realidade, não têm a forma desses, acabando por ser mais abstratos do que o desenho;

(iii) os diagramas que, segundo Diezmann & English (2001), citados por Pinto e Canavarro (2012), apresentam os dados numa forma espacial, podem revelar-se um modo de representação que auxilia e favorece o raciocínio matemático, e podem ser diagramas em rede, matrizes, diagramas de hierarquias e diagramas parte-todo.

Já Ponte e Serrazina (2000), para além dos três tipos de representações apontadas por Brunner também consideram um quarto tipo no qual incluem a linguagem oral e escrita.

Por seu turno, Presten e Garner (2003) identificam cinco formas de representar ideias: verbais (linguagem natural e relação com o quotidiano), pictóricas (imagens ou desenhos), numéricas/ tabelares (organização da informação em tabelas, formulação de hipóteses, teste), gráficas (representação gráfica, variáveis e relações entre variáveis) e algébricas (símbolos matemáticos e fórmulas, generalizações).

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

Já Clement (2004), citando Lesh, Post e Behr (1987), bem como Tripathi (2008), apresentam modelos de categorização muito próximos, que incluem cinco tipos de representações matemáticas, que se resumem na tabela abaixo:

Tabela 1. Tipos de representações matemáticas

Clement (2004)	**Tripathi (2008)**
Imagens	Semi-concretas (pictóricas)
Materiais manipuláveis	Concretas (manipuláveis)
Linguagem oral	Linguagem
Símbolos escritos	Simbolismo (notação)
Situações relevantes	Contextuais (situações da vida real)

Por sua vez, Velez (2020) considera cinco tipos de representações:

> (i) ativas (que implicam manipulação de objetos, gestos ou movimentos); (ii) pictóricas (desenhos pormenorizados muito próximos da realidade); (iii) icónicas (símbolos não matemáticos e esquemas que implicam alguma abstração); (iv) simbólicas verbais (palavras na forma verbal e escrita) e ; (v) simbólicas matemáticas (notação matemática) (p. 14).

A exploração das representações requer um trabalho cuidadoso, já que é desejável que se estabeleçam conexões entre as diferentes tipologias de representação, para que elas não sejam “entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras. Na verdade, podem ser usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que estão presentes ao longo de toda a vida” (Boavida et al., 2008, p.71).

As representações matemáticas podem ser muito mais do que a mobilização de um sistema de sinais, principalmente se as entendermos como um veículo facilitador da comunicação matemática (Canavarro, 2021), que ajuda “os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros” (NCTM, 2007, p. 240). Nesta vertente de interação social, é essencial o quadro genérico referido por Velez (2020), uma vez que é ele “que torna possível a comunicação matemática, com a utilização universal de representações comummente aceites e generalizadas” (Velez, 2020, p.10).

Quando se fala de representações matemáticas podemos, então, identificar diferentes tipologias, embora possamos também analisar o nível de formalidade das produções realizadas pelos estudantes. Assim, Webb et al. (2008), focam-se nesta característica das representações e apresentam-nos uma espécie de modelo de aprendizagem e apropriação das representações, associado a uma ideia de progressão, não só no que diz respeito às representações, mas também ao conhecimento matemático. Para estes autores, em primeira instância todos nós utilizamos representações informais, que contêm conceitos concretos representados em contextos familiares. Posteriormente, começam a utilizar-se representações pré-formais, que já são mais abstratas e, consequentemente, com maior complexidade. Por fim, passamos a ser capazes de produzir representações formais, nas quais já se utilizam notações matemáticas formais, com recurso a símbolos matemáticos, números, operações, fórmulas. Naturalmente,

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

não há uma linha que defina claramente cada um destes níveis, pelo que podemos oscilar entre eles, o que conduz ao aparecimento de um nível de formalidade híbrido, que pode ser designado por semi-formal.

Neste contexto, Pinto e Canavarro (2012), ao estudar o papel das representações na resolução de problemas com estudantes do Ensino Básico e Secundário evidenciam a utilização de diferentes modos de representação com funções distintas na compreensão de um problema e na sua desconstrução, coexistindo, muitas vezes, representações formais e informais. Deste modo, uma só representação pode conter traços característicos de dois ou dos três níveis de formalidade referidos anteriormente. Esta conceção é reforçada por Ponte e Velez (2011) que num estudo exploratório com professores do 1.º ciclo do Ensino Básico concluíram que, apesar de os alunos recorrerem aos vários níveis de formalidade, os professores valorizam particularmente as representações formais. Goldin (2000), bem como Webb et al. (2008), referem que perante um novo contexto ou situação problema que possa de algum modo trazer insegurança ou incertezas aos alunos, estes tendem a regredir no nível de formalidade e voltar a utilizar as representações informais e/ ou pré-formais que já tinham deixado de utilizar.

Metodologia

Em termos metodológicos, o presente estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa e interpretativa, uma vez que se trata de "investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo" (Coutinho, 2011, p.26). Para além disso, os dados foram recolhidos num ambiente natural de aprendizagem, há uma preocupação descritiva e valoriza-se acima de tudo o processo e não apenas o resultado final, que constituem, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), algumas das principais características de um estudo qualitativo.

Reiterando autores como Quivy e Campenhoudt (2003) ou Tuckman (2002), que referem a importância da identificação de uma pergunta de partida a propósito das fases do processo de investigação, neste trabalho enunciou-se a seguinte questão: "Que tipo de representações são privilegiadas pelos estudantes da Licenciatura em Educação Básica para resolver tarefas matemáticas?".

Os participantes nesta investigação são sessenta e oito estudantes do Ensino Superior, futuros professores, a frequentar a Unidade Curricular (UC) *Números e Estruturas* do 2.º ano do plano de estudos da Licenciatura em Educação Básica, na Escola Superior de Educação de um Instituto Politécnico de Portugal. O conjunto das três tarefas foi realizado numa aula de duas horas, a segunda aula da UC, dividida em duas partes: (i) concretização das tarefas, de um modo individual, tendo sido reforçada a necessidade do registo do percurso utilizado para determinar a resposta e a importância de não rasurar nenhuma resolução, mesmo que se abandone ou que seja considerada incorreta; (ii) discussão coletiva para reflexão sobre as diferentes representações. Como instrumentos de recolha de dados, recorreu-se à recolha documental das produções dos estudantes, à observação, às notas de campo recolhidas durante a realização das tarefas e

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

ao registo áudio do momento da discussão final coletiva. Este último foi essencial para ouvir os estudantes falar sobre as representações por si apresentadas, mas também sobre outras representações, refletindo sobre elas.

A investigação foi conduzida tendo em conta os princípios de boas práticas de investigação, dimensão ética que se concretizou com o contributo do Código de Ética da AERA (AERA, 2011), que estabelece os princípios fundamentais para a realização de estudos no âmbito educativo. Destacamos a participação voluntária dos participantes, que assinaram o consentimento informado após lhes ser dada a conhecer a investigação de forma clara e transparente, bem como a anonimização dos dados pessoais recolhidos para seu tratamento e apresentação.

Partindo da análise da literatura acima mencionada, foi elaborada a tabela 2, na qual se apresentam as categorias através das quais vai ser realizada a análise das representações dos estudantes no decorrer da presente investigação.

Tabela 2. Categorias de análise de dados em função das tipologias de representações matemáticas

Representação			Nível de formalidade
Pictórica		Desenhos com grande proximidade à realidade	Informal
Icónica		Símbolos não convencionais, mais abstratos	
Simbólica verbal		Linguagem verbal escrita ou falada	Semi-formal
Simbólica matemática	aritmética	Linguagem matemática, com recurso a operações simples	Formal
	algébrica	Linguagem matemática, com recurso a construção de equações ou similar	
Mista		Híbrido de duas ou mais representações anteriores	Semi-formal

Resultados e sua discussão

A primeira tarefa apresentada aos estudantes tinha o enunciado seguinte:

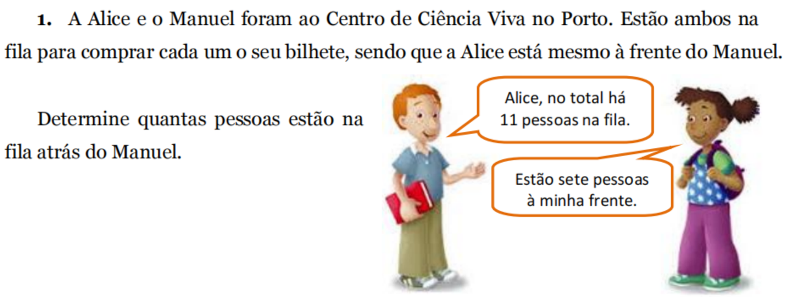


Figura 1. Enunciado da tarefa 1

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

Para responder a esta questão foram apresentados os cinco tipos de representações categorizados. Registaram-se ainda quatro estudantes que apresentaram apenas a resposta, sendo que dois tinham a resposta correta e os outros dois incorreta. Na tabela que se apresenta de seguida quantificam-se os tipos de representação utilizados, bem como o seu sucesso ou insucesso.

Tabela 3. Tipos de representações usados para responder à tarefa 1 e seu sucesso/ insucesso

Representação		**Resposta correta**	**Resposta incorreta**	**Sem resposta**	**Total**
Pictórica		3	0	0	3
Icónica		38	1	0	39
Simbólica verbal		2	0	0	2
Simbólica matemática	aritmética	9	0	0	9
	algébrica	1	0	0	1
Mista		10	0	0	10
Sem representação	Só resposta	2	2	-----	4
	Em branco	-----	-----	0	0
Total		65	3	0	**68**

A maioria dos estudantes utilizou um esquema para determinar a resposta, mas destacam-se dois tipos de representações esquemáticas. Apenas três estudantes recorreram a representações pictóricas, tendo necessidade de desenhar pessoas organizadas numa fila, identificando a Alice e o Manuel (figura 2). As representações icónicas foram as mais recorrentes, nas quais as pessoas foram representadas através de tracinhos, pintinhas ou quadrados (figura 3), importando salientar que dos trinta e nove estudantes que o fizeram, apenas um não conseguiu determinar a resposta certa. Há ainda estudantes neste conjunto (onze, a saber) que representam as sete pessoas que se encontram à frente da Alice como um conjunto, não tendo a necessidade de as representar uma por uma.

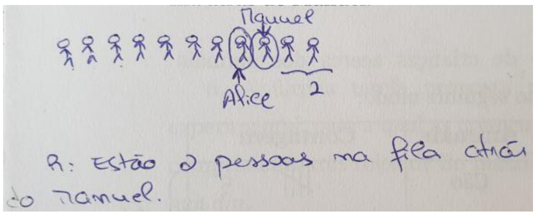


Figura 2. Representação pictórica

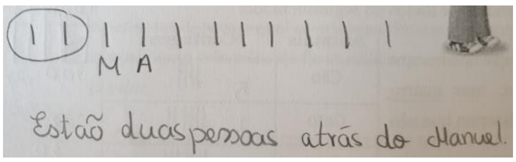


Figura 3. Representação icónica

Relativamente aos estudantes que apresentaram representações aqui classificadas como mistas, uma grande parte começa por utilizar o cálculo horizontal para determinar quantas pessoas estão na fila sem as sete que se encontram à frente da Alice (11-7=4), mas depois constroem um esquema para perceber quantas é que sobram a partir daí, sabendo que lá estão

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

a Alice e o Manuel (figura 4). Assim, estas resoluções acabam por se tornar um híbrido entre representações formais do tipo simbólico matemático aritmético e representações mais informais do tipo icónico. Outros, para confirmar a sua resposta, apresentam um cálculo horizontal, no qual as palavras "Alice" e "Manuel" surgem como parcelas (figura 5).

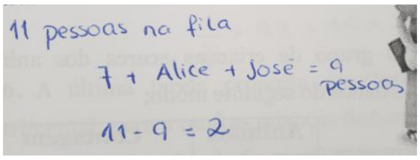


Figura 4. Representação semi-formal

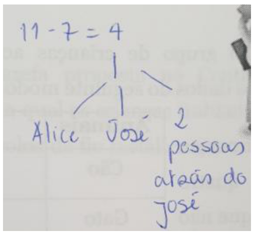


Figura 5: Cálculo horizontal

Há ainda um estudante que combina uma representação icónica, um esquema com recurso a tracinhos, com uma do tipo simbólica verbal, através da qual, num texto estruturado, recorre aos numerais ordinais para explicar o esquema construído primeiramente.

Apenas dois estudantes optaram unicamente por resoluções simbólicas verbais, baseando-se também nos números ordinais. Estes determinaram a resposta correta, embora não tenham usado vocabulário específico da matemática.

No que diz respeito aos estudantes que apresentaram representações simbólicas matemáticas, comecemos por abordar as do tipo aritmético. Dos nove estudantes que as utilizaram, sete resolveram o problema em dois passos, realizando duas subtrações (ora primeiro subtrair ao total as sete pessoas e, de seguida, subtrair dois, o Manuel e a Alice, ora o contrário). Os outros dois que seguiram o mesmo tipo de representação resolveram o problema apenas num passo, construindo e resolvendo a expressão numérica 11-(7+1+1). Por fim, apenas um estudante utilizou uma representação simbólica matemática algébrica, construindo uma equação na qual a sua incógnita representava o valor desconhecido.

Por tudo isto, predomina claramente a utilização de representações icónicas para a resolução desta questão, o que se pode explicar pela forma como a informação é apresentada no enunciado, que sugere a existência de pessoas organizadas numa fila. A visualização que a situação implica levou muitos estudantes a representá-la esquematicamente. No momento de discussão final as representações icónicas foram apontadas como as mais simples por facilitarem a organização da informação visualmente e a descoberta da resposta com elevado grau de certeza. No entanto, foram poucos os estudantes que as referiram para comunicar o seu raciocínio aos pares; pelo contrário, predominou neste diálogo a referência às operações para explicar a forma mais rápida e, portanto, mais eficiente, de determinar a resposta certa. Muitos reconheceram as representações simbólicas matemáticas aritméticas como as mais adequadas à resolução. Por sua vez, as representações simbólicas matemáticas algébricas foram apenas referidas pelo seu elevado nível de formalidade, tendo, um número significativo de alunos assumido dificuldades no âmbito da álgebra.

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

Esta questão foi considerada por praticamente todos os estudantes como "simples" e "muito acessível, de fácil resolução", pelo que foi resolvida por todos num curto período de tempo. Para além disso, também se pode afirmar que a maioria dos estudantes raciocinou de uma forma organizada, tendo entendido bem o problema e definido uma estratégia simples e rápida de resolução.

A segunda tarefa tinha o enunciado que se segue:

2. Para pagar o bilhete, o Manuel foi ao seu mealheiro, onde guarda moedas de dois euros e moedas de cinquenta cêntimos. Ele contou 30 moedas num total de 33€. Quantas moedas de dois euros tem o Manuel?

Figura 6. Enunciado da tarefa 2

Para responder a esta segunda questão os estudantes recorreram a tipos de representações diferentes, uns com mais sucesso do que outros, conforme demonstra a tabela 4.

Tabela 4. Tipos de representações usados para responder à tarefa 2 e seu sucesso/ insucesso

Representação		**Resposta correta**	**Resposta incorreta**	**Sem resposta**	**Total**
Icónica		0	0	2	2
Simbólica matemática	aritmética	23	6	14	43
	algébrica	4	1	6	11
Mista		4	0	2	6
Sem representação	Só resposta	0	2	-----	2
	Em branco	-----	-----	4	4
Total		31	9	28	**68**

Há notoriamente um predomínio pela utilização de representações formais para responder a esta questão, já que nenhum estudante recorreu a representações pictóricas e apenas dois apresentaram representações icónicas. Destes últimos, um deles começou por representar trinta bolinhas, aparentemente as trinta moedas que refere o texto, mas depois não se alonga mais, acabando por não dar continuidade ao seu raciocínio nem resposta à questão; o outro constrói aquilo que parece ser um diagrama de Venn, embora incompleto. Nele constam duas linhas curvas fechadas, com as designações A e B, em baixo legendadas como "2€" e "0,50€", respetivamente. Na interseção das duas linhas estão representadas as trinta moedas. Este estudante também abandona a representação e a questão sem chegar a qualquer resposta.

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

ISSN: 1647-3582

A representação mais utilizada foi a do tipo simbólica matemática aritmética. Os estudantes que seguiram esta via utilizaram maioritariamente a tentativa-erro para determinar a sua resposta, mas nem todos foram capazes de definir uma estratégia de resolução organizada que lhes permitisse encontrar uma resposta e ter a certeza de que era a correta. De facto, a análise das representações destes estudantes leva-nos a concluir que são vários aqueles que tentam resolver de forma desorganizada, sem método, limitando-se a fazer tentativas inúmeras até encontrar uma resposta em concordância com o enunciado. Na maior parte das vezes, acabam por se perder nas suas representações ou devido a erros de cálculo ou devido à confusão entre número de moedas e respetivo valor em euros. Há também aqueles que raciocinam de forma sistemática e organizada, refletindo sobre as tentativas que realizam e definindo, em função dos resultados, as tentativas seguintes. Analise-se, a este propósito, a figura seguinte (figura 7).

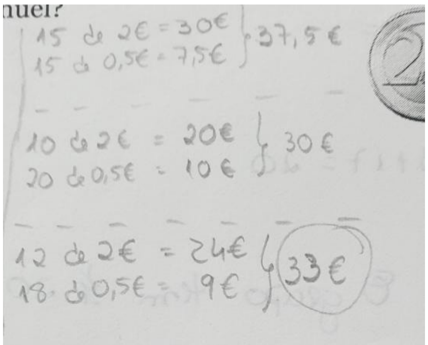


Figura 7. Representação simbólica matemática aritmética organizada

O próprio estudante que apresentou esta resolução, no momento final de discussão coletiva conseguiu explicar-se:

> Estudante A: Eu não sabia por onde começar. Então pensei que podia haver quinze moedas de cada, fiz os cálculos e deu-me trinta e sete euros e meio. Eu queria o mesmo número de moedas, mas menos dinheiro [valor, em euros], então tinha que reduzir nas moedas maiores. Experimentei com dez moedas de dois euros e vinte de cinquenta [cêntimos] e foi ao contrário, já deu pouco dinheiro, só trinta [euros]. Então experimentei o doze [doze moedas de dois euros] e já deu.
>
> Estudante B: Eu fiz mais ou menos a mesma coisa, mas fixei o valor em vez do número de moedas. Imagina, sabia que tinha de dar trinta e três euros, por isso experimentei vinte [euros, em moedas de dois euros] mais treze [euros, em moedas de cinquenta cêntimos], mas dava trinta e seis moedas e eu queria só trinta. Então, para manter o mesmo valor, mas diminuir o número de moedas... Espera... O que é que eu fiz? Pois, aumentei o número de moedas de dois euros porque valem mais.

Esta exposição por parte do estudante A, responsável pela representação presente na figura 7, mas também do estudante B, evidencia, de facto, alguma reflexão sobre o processo e

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

organização de ideias no momento de o pôr em prática. Também há um número significativo de estudantes que escreveram vários múltiplos de dois e vários múltiplos de cinquenta centésimas e foram fazendo combinações até alcançar um total de trinta múltiplos, cujos valores somados desse trinta e três.

Concentremo-nos agora nos estudantes que recorreram a representações do tipo simbólico matemático algébrico, através da construção e resolução de um sistema de equações. Dos onze que o fizeram, apenas quatro conseguiram determinar a resposta certa. Começaram por identificar duas incógnitas e depois construíram duas equações literais de modo a traduzir a informação presente no enunciado, uma delas sobre o número total de moedas e outra sobre o valor total em euros. É de registar que alguns estudantes utilizaram a dízima 0,5 para representar a moeda de cinquenta cêntimos e outros utilizaram a representação fracionária $\frac{1}{2}$, conforme consta nas figuras 8 e 9.

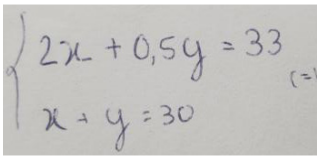


Figura 8. Representação simbólica matemática algébrica com dízima

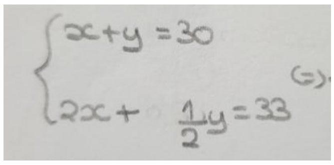


Figura 9. Representação simbólica matemática algébrica com fração

Um outro estudante, apesar de ter construído corretamente o sistema de equações, determinou uma resposta incorreta devido a um erro de cálculo no decorrer da resolução. Dos estudantes que tentaram a formalização através de representações algébricas, mas não apresentaram resposta, três construíram corretamente o sistema, mas não foram capazes de o resolver até ao fim, dois escreveram uma equação literal corretamente e a outra com informação que não constava no enunciado e um só conseguiu construir uma das equações literais.

Relativamente ao uso de representações mistas, verifica-se que foi um número reduzido de estudantes que iniciou a resolução com um tipo de raciocínio e depois o alterou. Analisemos o caso concreto de um estudante que alterou a sua forma de pensar duas vezes ao longo da resolução. Inicialmente tentou formalizar o enunciado, construindo uma só equação com apenas uma incógnita, a saber $2x+0{,}5x=3$, considerando, portanto, que número de moedas de dois euros e de cinquenta cêntimos é igual, informação que não consta no enunciado. Ao resolver a equação apresentada constatamos que a solução não é um número natural, pelo que não pode corresponder ao número de moedas. No entanto o estudante não chega a concluir isso mesmo, já que simplifica a equação, mas não chega a terminá-la, abandonando essa representação. Ela revela-se demasiado formal e as dificuldades que o estudante encontra levam-no a iniciar uma nova tentativa de resolução. Desta vez, começa por determinar o quociente entre trinta e três e dois, explicando posteriormente na discussão final:

> Estudante C: Metade do valor vai ser em moedas de dois euros e a outra metade nas moedas de cinquenta cêntimos.

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

> Estudante D: Porquê?
>
> Estudante C: Na altura achei que fazia sentido, depois descobri que não, porque não cheguei à resposta. Mas eu nem reparei que a divisão dava resto 1, ignorei. Então a partir daqui, como o resultado era dezasseis, eu multipliquei-o por dois... Mas agora estou a ver que não faz sentido... O dezasseis já era euros e eu voltei a multiplicar por dois, que era as moedas de dois euros, ainda vai dar mais euros. Estou confusa...

De facto, neste momento em que era privilegiada a comunicação matemática, a própria estudante ao explicar a sua resolução encontra erros que não lhe permitiram encontrar uma solução. É evidente que confundiu o número de moedas com o valor em euros que elas representavam, o que levou a uma resolução errada. O mesmo estudante ainda iniciou uma resolução por tentativa e erro, mas acabou por desistir sem encontrar a solução, revelando-se incapaz de definir uma estratégia organizada e sistemática que lhe permitisse descobrir a resposta de um modo mais simples e rápido. Outro estudante que utilizou uma estratégia mista, também começou com uma representação formal, mas não conseguiu completá-la, apresentando apenas uma equação com duas incógnitas que traduz de forma errada o enunciado, já que misturou o número que moedas com o seu valor em euros (figura 10).

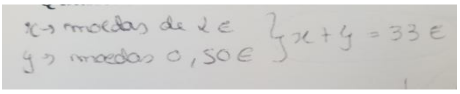


Figura 10. Representação formal com erro de raciocínio

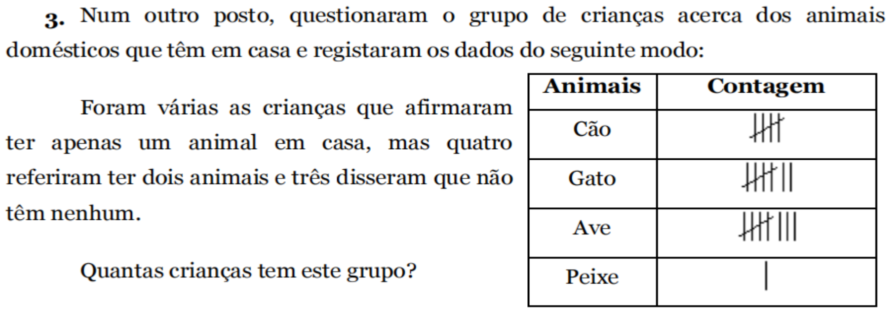
Posteriormente, o estudante optou pela tentativa-erro, tendo conseguido determinar a resposta certa, apesar de não utilizar um raciocínio regular. Quando comunicou a sua resolução ao grande grupo, apercebeu-se de imediato do erro na equação, sem nenhuma intervenção. Depois explicou “Fui alternando, ou mexia no valor, ou mexia no número de moedas e à quarta tentativa consegui”.

Estes dois casos são exemplo do percurso mais comum destes estudantes que apresentaram mais do que um tipo de representação: iniciam com uma representação formal do tipo algébrico, mas as dificuldades que encontram levam-nos a abandonar essa representação e a seguir pelo tipo simbólico matemático aritmético, através da criação de hipóteses e sua verificação. Há, no entanto, a salientar um estudante que faz o percurso inverso, isto é, inicia a sua resolução com tentativa-erro, mas, ao fim de duas tentativas, acaba por desistir, constrói um sistema de equações corretamente e resolve-o sem percalços.

Assim, nesta segunda tarefa predominam as representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético, apesar de se considerar que o enunciado revela alguma dependência algébrica, o que poderia remeter os estudantes para a construção de representações simbólicas matemáticas desse tipo, como um sistema de equações. Acredita-se que muitos não o fizeram pelas dificuldades que têm no cálculo algébrico. Note-se que a taxa de sucesso para os estudantes que recorreram a operações aritméticas ultrapassou os cinquenta por cento e a dos que optaram por representações algébricas é apenas de cerca de trinta e seis por cento.

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

A tarefa três tinha o enunciado que se encontra abaixo:



3. Num outro posto, questionaram o grupo de crianças acerca dos animais domésticos que têm em casa e registaram os dados do seguinte modo:

Foram várias as crianças que afirmaram ter apenas um animal em casa, mas quatro referiram ter dois animais e três disseram que não têm nenhum.

Quantas crianças tem este grupo?

Animais	Contagem
Cão	𝍸
Gato	𝍸 ‖
Ave	𝍸 ‖|
Peixe	|

Figura 11. Enunciado da tarefa 3

Os estudantes apresentaram representações diversas para procurar dar resposta a esta questão: representações icónicas, representações simbólicas verbais, representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético e do tipo algébrico e representações mistas (que combinaram as representações de caráter aritmético ora com explicação verbal, ora com representações icónicas). Houve ainda estudantes que não apresentaram qualquer tipo de representação, deixando a questão em branco ou indicando apenas a resposta. A tabela 5, que surge abaixo, resume o modo como os estudantes resolveram esta questão.

Tabela 5. Tipos de representações usados para responder à tarefa 3 e seu sucesso/ insucesso

Representação		Resposta correta	Resposta incorreta	Sem resposta	**Total**
Icónica		0	0	1	1
Simbólica verbal		0	1	0	1
Simbólica matemática	aritmética	37	8	0	45
	algébrica	0	2	0	2
Mista		5	5	0	10
Sem representação	Só resposta	2	2	-----	4
	Em branco	-----	-----	5	5
Total		44	18	6	**68**

Antes de iniciarmos a análise dos diferentes tipos de representações utilizados para responder a esta questão, importa referir a necessidade de alguns estudantes organizarem a informação presente no enunciado, completando o *tally-chart* que o acompanha. Assim, contabilizam-se vinte e nove estudantes que acrescentaram uma coluna com a frequência absoluta correspondente à contagem e um estudante que o fez na forma de frequência absoluta acumulada (sem nenhum deles lhe ter atribuído estas designações), dezassete estudantes que acrescentaram uma linha final com o total (em todos os casos o total foi representado utilizando os algarismos e nunca a

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

contagem) e um estudante que acrescentou uma linha ao *tally-chart* para representar as crianças que não têm animais domésticos.

Analisando, agora, a tabela 5 é evidente o predomínio na utilização de representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético, correspondendo à opção de mais de sessenta e cinco por cento dos estudantes. Ainda assim, dentro do mesmo tipo de representações, conseguimos distinguir diferentes percursos para determinar a resposta, que dividimos em três grupos: (a) estudantes que determinaram o total da contagem, subtraíram quatro unidades correspondentes às crianças que deram duas respostas e adicionaram três unidades relativas às crianças que não responderam por não terem animais domésticos, ou vice-versa (figura 12); (b) estudantes que determinaram o total da contagem, subtraíram oito unidades para determinar o número de crianças que tem apenas um animal doméstico e adicionaram, por fim, o número de crianças que não têm animais com as que têm um animal e com as que têm dois animais (figura 13); (c) estudantes que apresentaram raciocínio similar a (a) ou a (b), mas representaram todos os passos numa só expressão numérica (figura 14). Importa referir que nestes três grupos constam apenas representações formais (cálculos horizontais ou algoritmos) para determinar as respostas. Relativamente a (a) e (b), o problema foi resolvido em três passos pelos estudantes, recorrendo a três operações simples, duas adições e uma subtração.

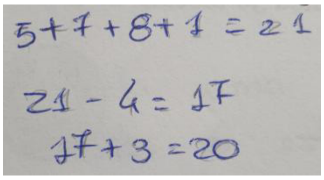


Figura 12. Representação do tipo (a)

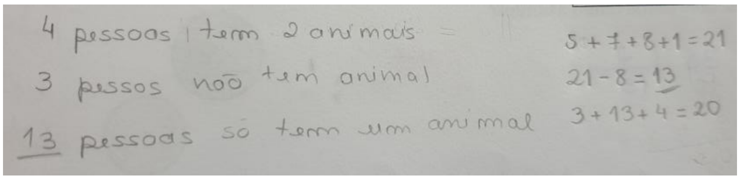


Figura 13. Representação do tipo (b)

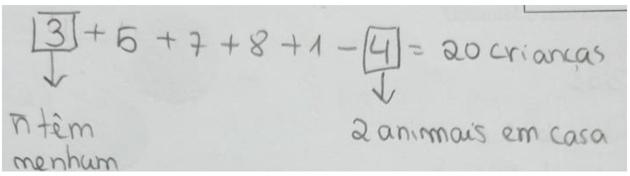


Figura 14. Representação do tipo (c)

Alguns estudantes que utilizaram a categoria acima definida por (b) afirmaram considerar mais organizada a sua resolução pois precisavam de saber exatamente “o número de crianças com zero animais, o número de crianças com um animal e o número de crianças com dois animais para só somar os três resultados”. Ainda assim, todos eles demonstraram compreender estas três formas de resolver o problema. Outra nota também importante relativa a estas resoluções é um erro apresentado por dois estudantes, que registam o seguinte: $21-4=17+3=20$. Estes estudantes, apesar de determinarem a resposta certa, cometem um grave erro matemático ao considerar que as expressões $21-4$ e $17+3$ são iguais, quando na verdade não são. Estes

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758 ISSN: 1647-3582

estudantes determinam o resultado da primeira subtração e a esse resultado pretendem adicionar uma outra quantidade, fazendo-o indevidamente na mesma operação. Também é curioso referir o caso de um outro estudante que iniciou as representações com o intuito de resolver a questão seguindo um percurso similar ao descrito em (b), mas acabou por se confundir, anular essa resolução e iniciar uma outra, similar à descrita em (a), que o levou de uma forma rápida à resposta correta.

Dos estudantes que recorreram a representações desta categoria, mas apresentaram respostas incorretas, destacam-se essencialmente duas situações: alguns adicionaram as três crianças que não têm animais aos vinte e um animais representados no *tally-chart*, ignorando o facto de existirem quatro crianças com dois animais, o que equivale a somar "crianças com animais", comentário feito por um dos colegas durante a reflexão final; outros apresentaram vinte e dois como resposta, resultante das operações $21+3$ e $24-2$, considerando que deviam subtrair o número de animais e não o número de crianças que afirmaram ter dois animais. É possível que estes estudantes ao ler "quatro [crianças] referiram ter dois animais" no enunciado acabassem por confundir a quantidade de crianças com o número de animais que possuem.

As representações aritméticas também foram comuns naquilo a que chamamos representações mistas ou híbridas, já que todas estas acabaram por implicar cálculos horizontais simples, ainda que pudessem estar acompanhados de outros tipos de representações. Dois estudantes sentiram necessidade de acompanhar os seus cálculos (similares a (a)) de uma breve exposição matemática, na qual explicavam a origem dos valores que incluíam nos seus cálculos, bem como o significado de cada um dos resultados que iam obtendo. Estes dois estudantes resolveram com sucesso a questão.

Já aqueles que utilizaram um híbrido entre representações aritméticas e representações icónicas, oito no total, foram menos bem sucedidos, já que apenas três conseguiram determinar a resposta certa. Vejamos as representações de um dos estudantes que se integra nesta categoria (figura 15):

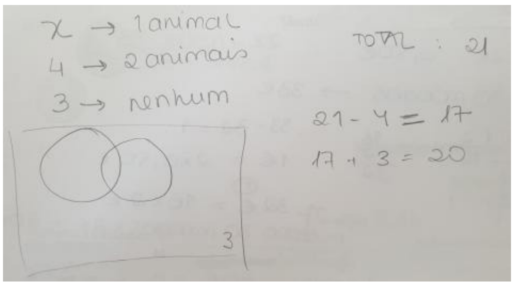


Figura 15. Resolução mista da tarefa 3

O estudante começou por registar os dados do enunciado do problema, fazendo corresponder a incógnita x ao número de crianças que tem um animal, aproximando-se das representações simbólicas matemáticas do tipo algébrico. No entanto, não avança por essa via, construindo, de seguida, um diagrama de Venn, no qual representou apenas as três crian-

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

ças que pertencem ao universo, mas não têm nenhum animal. Note-se que, neste diagrama apenas surgem duas curvas fechadas, pelo que não são contempladas as quatro opções de resposta constantes no *tally-chart* do enunciado. Só no final é que o estudante avança para os três cálculos horizontais que lhe permitem determinar a resposta certa. Na discussão coletiva final, este estudante referiu que precisava de construir o diagrama de Venn para perceber se tinha de adicionar ou subtrair aquelas crianças que referiram não ter animais domésticos. Um outro estudante que fez um percurso de resolução semelhante, embora tenha no final chegado à resposta vinte e quatro, por ter ignorado as crianças que afirmaram ter dois animais de estimação, concordou com esta explicação, afirmando que também construiu o diagrama de Venn com esse objetivo.

O diagrama de Venn ou a sua tentativa de construção com erros foi utilizado por mais estudantes, a maior parte deles são estudantes que apresentaram respostas incorretas. Vejamos dois exemplos:

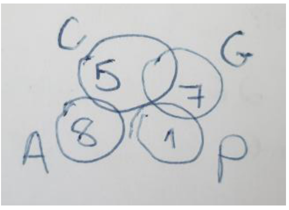


Figura 16. Tentativa de diagrama de Venn 1

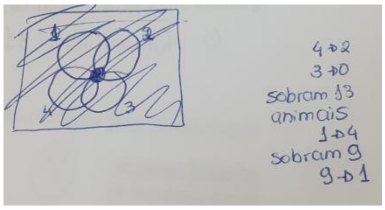


Figura 17. Tentativa de diagrama de Venn 2

O estudante que procurou resolver a tarefa através das representações presentes na figura 16 tentou explicar o seu raciocínio:

Estudante E: Quando li que havia crianças com um animal, com dois ou sem nenhum, lembrei-me logo deste diagrama, mas nem me lembrava que tem esse nome [Venn]. Só que acho que confundi tudo... Em vez de pôr o nome dos animais nos círculos eu coloquei primeiro ter zero animais, um, dois ou três. Depois ainda risquei e tirei os zero animais, mas agora nem percebo porquê... Depois comecei a registar: quatro crianças têm dois animais, três crianças têm zero animais, sobram treze animais, que é o vinte e um menos oito; depois registei aqui que uma criança tem quatro animais e então sobram nove, que é das crianças que só têm um animal. Mas não faz sentido. [...] Fui buscar os quatro animais ao centro do diagrama que unia as quatro bolas [linhas curvas]. Está mal, já sei...

Note-se que este estudante registou na sua resposta "O grupo tem 17 crianças", que para ele resultava do cálculo $4+3+1+9$, que corresponde ao número de crianças que tem dois animais domésticos, zero, quatro e um, respetivamente.

Relativamente à figura 17, esse foi o único registo realizado pelo estudante em causa para esta questão. Ele revelou-se incapaz de dar continuidade à representação que iniciou e que contém várias incorreções para além de estar muito incompleta.

Durante o momento de reflexão sobre as representações e os raciocínios utilizados por cada um, a investigadora projetou a resolução seguinte:

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

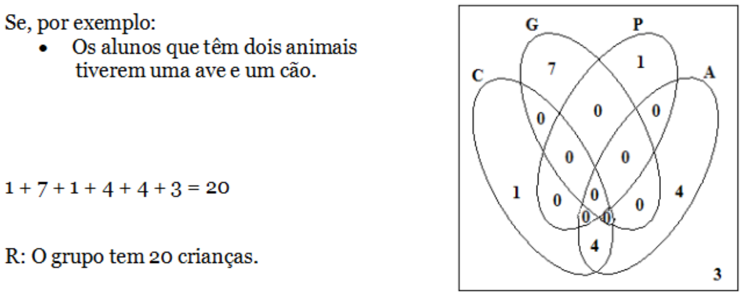


Figura 18. Resolução proposta pela investigadora para reflexão

O estudante responsável pela resolução da figura 17 foi o primeiro a intervir:

Estudante F: Eu não conseguia posicionar essas rodas, sabia que tinham de estar sobrepostas todas entre si, mas na forma de quadrado, como eu coloquei, o G nunca ia tocar no A... Agora percebo: nenhum tem os quatro animais nem três ao mesmo tempo, daí os zeros.

Estudante E: Mas por que é que os alunos que têm dois animais tem de ser o passarinho [ave] e o cão? Eu posso achar que é...

Estudante G: Não tem de ser, é só um exemplo, mas se forem outros não muda nada na resposta. Eu percebo esse diagrama, mas acho muito mais confuso e não sei também se conseguia colocar os círculos nessas posições ou noutras que desse.

No geral, os estudantes partilharam desta última reflexão do estudante G, revelando compreensão da representação, mas estranheza. A maioria assumiu que não conseguiria construir uma representação similar sem auxílio e considerou que não é facilitadora. Por outro lado, as representações aritméticas foram apontadas por quase todas como uma opção "intuitiva", "simples" e "muito mais rápida". A taxa de sucesso destas representações, principalmente quando comparada com as restantes, reitera esta adjetivação.

O enunciado da questão, para além de linguagem corrente, contém uma tabela com dados organizados, sendo que nem todos são essenciais para encontrar a resposta, o que pode explicar parte do insucesso nesta tarefa. Apesar de se apresentarem os dados desse modo, era esperado que os estudantes optassem tendencialmente por representações do tipo aritmético.

Conclusões

Os estudantes revelaram facilidade na construção de várias representações matemáticas, principalmente nas representações icónicas e nas representações simbólicas matemáticas do tipo aritmético, que foram as mais utilizadas pelos participantes neste estudo. Verifica-se que utilizaram as diferentes representações como ferramenta para compreender o problema, explorar diferentes

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758

possibilidades e registá-las, fazer verificações e, ainda, auxiliar a comunicação matemática nos momentos de discussão em grupo. Verificou-se que as representações são utilizadas individualmente de um modo pouco flexível, apesar de todos os estudantes se mostrarem recetivos a novas formas de representar nos momentos de partilha. Na verdade, considera-se que os estudantes parecem acolher representações e raciocínios diferentes daqueles que têm à partida, sendo, no entanto, essencial que haja uma explicação.

As representações pictóricas bem como as representações simbólicas verbais são as menos recorrentes. Pelo contrário, surgem as representações icónicas como grande recurso, principalmente na organização do enunciado e dos dados que o mesmo sugere. A seu par também se realçam as representações formais do tipo simbólico matemático aritmético, predominando o cálculo horizontal, com a realização de uma operação de cada vez. São menos aqueles que se sentem confortáveis e que conseguem terminar uma resolução formal do tipo algébrico, com recurso, por exemplo, à construção de uma equação com uma incógnita. Assim, a formalização é compreendida pela grande maioria dos estudantes, embora não seja o percurso escolhido por uma parte deles por considerarem que é mais difícil de concretizar e mais suscetível a erros no decorrer da resolução.

As representações são assumidamente essenciais para a correta interpretação do problema, mas parecem em vários casos funcionar também como uma ferramenta para o raciocínio matemático, já que são vários os relatos similares a "organizar assim os dados ajuda-me a pensar" ou "só depois de fazer o esquema é que percebi que conta tinha de fazer". Considera-se, portanto, que os estudantes compreendem a importância das representações, reconhecem-lhes diferentes funções e acabam por ser capazes de escolher diferentes representações em função da natureza da tarefa e do que se pretende determinar. Também a articulação entre diferentes representações, que deu origem ao que designamos por representações mistas, é uma forte evidência desta compreensão.

Paralelamente, as representações externas e as explicações de quem as realizou revelaram-se um meio por excelência para compreender o raciocínio destes estudantes, destacando-se claramente uma tendência para a utilização da linguagem natural na descrição e justificação dos raciocínios.

Referências

AERA (2011). *Code of Ethics*. AERA.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no ensino básico*. DGIDC.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Relógio d'Água.

Canavarro, A. P. (Coord.) (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico*. Direção-Geral da Educação.

Indagatio Didactica, vol. 16 (2), julho 2024
https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35758
ISSN: 1647-3582

Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. In *Teaching Children Mathematics*, *11* (2), pp. 97-102. NCTM.

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Edições Almedina S. A.

Damião, H, Festas, I., Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C. (Coords.) (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61* (1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Goldin, G. A. (2000). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203930236

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática (APM).

Pinto, E. & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães & A. Folque (org.), *Práticas de investigação em Educação* (pp. 1-17). Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). As representações matemáticas nas concepções dos professores do 1.º ciclo do ensino básico: Um estudo exploratório. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 177-194), EIEM.

Preston, R. & Garner, A. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics teaching in the middle school*, *9* (1), 38 - 43.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2003). *Manual de investigação em ciências sociais* (3ª ed.). Gradiva.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13* (8), 438-445

Tuckman, B. (2002). *Manual de investigação em educação – Como conceber e realizar o processo de investigação em educação* (2ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

Velez, I. (2020). *Tarefas na sala de aula: prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas*. [Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/42865/1/ULSD734578_td_Isabel_Velez.pdf

Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14* (2), 110-113.

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The role of representation in school mathematics* (pp. 215- 227). National Council of Teachers of Mathematics.