

Utilizando o *GeoGebra Discovery* no contexto da Geometria Plana em uma formação de professores de matemática

Using GeoGebra Discovery in the context of Plane Geometry in a mathematics teacher training

Uso del *GeoGebra Discovery* en el contexto de la Geometría Plana en la formación de profesores de matemáticas

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
abarcaap@pucsp.br
<https://orcid.org/0000-0002-6685-9956>

Daniel Mendes Inácio de Souza
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
danielmisouza@outlook.com.br
<https://orcid.org/0009-0008-5504-5245>

Resumo

Este artigo apresenta o desenvolvimento e resultados de uma formação continuada de professores de matemática para o estudo e a exploração de tópicos da Geometria Plana com a utilização do *GeoGebra Discovery*, uma versão experimental do GeoGebra com a qual é possível, devido a um conjunto de Ferramentas de Raciocínio Automático (ART), a verificação de propriedades da Geometria Plana, algumas apontadas na literatura como teoremas. O objetivo dessa formação foi permitir uma reflexão sobre o possível uso educacional das ART para utilização na prática docente. Por meio da promoção de uma oficina didática remota, pela plataforma Teams, esse estudou investigou, com os participantes, possibilidades de criação colaborativa de estratégias pedagógicas para o uso das ART no ensino de Geometria Plana. Empregou-se nessa investigação de cunho qualitativo os pressupostos metodológicos do *Design Research* para a criação, execução e condução do curso de formação, com a participação de cinco professores, que atuam na Educação Básica ou no Ensino Superior, em instituições brasileiras. Para analisar os dados coletados recorreu-se à teoria TPACK (sigla em inglês para Technological Pedagogical Content Knowledge), proposta por Mishra e Koehler. Esse aporte teórico permitiu identificar a quais conhecimentos pedagógico, tecnológico e do conteúdo os participantes recorreram ao longo do curso de formação continuada com a utilização do *software*, bem como identificar as dificuldades enfrentadas por eles ao longo do curso, a fim de implementarem em suas práticas pedagógicas o *GeoGebra Discovery*.

Palavras-chave: *GeoGebra Discovery*; Formação de Professores de Matemática; Geometria Plana; Educação Matemática e Tecnologias.

Abstract

This article presents the development and results of a continuing education of mathematics teachers for the study and exploration of Plane Geometry topics with the use of GeoGebra Discovery, an experimental version of GeoGebra with which it is possible, due to a set of Automatic Reasoning Tools (ART), to verify properties of Plane Geometry, some of them are pointed out in the literature as theorems. The objective of this training was to allow a reflection on the possible educational use of ART for use in teaching practice. Through the promotion of a remote didactic workshop, through the Teams platform, this study investigated, with the participants, possibilities of collaborative creation of pedagogical strategies for the use of ART in the teaching of Plane Geometry. In this qualitative investigation, the methodological assumptions of *Design Research* for the creation, execution and conduction of the training course were used, with the participation of five teachers, who work in Basic Education or Higher Education, in Brazilian institutions. To analyse the collected data, we used the TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) theory, proposed by Mishra and Koehler. This theoretical contribution allowed us to identify which pedagogical, technological, and content knowledge the participants resorted to throughout the continuing education course with the use of the software, as well as to identify the difficulties faced by them throughout the course, to implement GeoGebra Discovery in their pedagogical practices.

Keywords: GeoGebra Discovery; Mathematics Teacher Training; Plane Geometry; Mathematics Education and Technologies.

Resumen

En este artículo se presenta el desarrollo y los resultados de una formación continuada de profesores de matemáticas para el estudio y exploración de temas de Geometría Plana con el uso de *GeoGebra Discovery*, una versión experimental de GeoGebra con la que es posible, gracias a un conjunto de Herramientas de Razonamiento Automático (ART), verificar las propiedades de la Geometría Plana. Algunos de ellos son señalados en la literatura como teoremas. El objetivo de esta formación fue permitir una reflexión sobre el posible uso educativo de las ART para su uso en la práctica docente. A través de la promoción de un taller didáctico a distancia, por medio de la plataforma Teams, este estudio investigó, con los participantes, posibilidades de creación colaborativa de estrategias pedagógicas para el uso de las ART en la enseñanza de la Geometría Plana. En esta investigación cualitativa se utilizaron los supuestos metodológicos de *Design Research* para la creación, ejecución y conducción del curso de formación, con la participación de cinco docentes, que actúan en Educación Básica o Educación Superior, en instituciones brasileñas. Para el análisis de los datos recolectados, se utilizó la teoría TPACK (Conocimiento Pedagógico Tecnológico de Contenidos), propuesta por Mishra y Koehler. Este aporte teórico nos permitió identificar a qué conocimientos pedagógicos, tecnológicos y de contenido recurrieron los participantes a lo largo del curso de educación continua con el uso del *software*, así como identificar las dificultades que enfrentaron a lo largo del curso, con el fin de implementar *GeoGebra Discovery* en sus prácticas pedagógicas.

Palabras clave: *GeoGebra Discovery*; Formación de Profesores de Matemáticas; Geometría Plana; Educación Matemática y Tecnologías.

Introdução

No cenário educacional contemporâneo, as tecnologias digitais emergem como catalisadoras de transformações, especialmente no contexto do ensino da matemática. Entre as inovações, os Sistemas de Geometria Dinâmica (DGS) se destacam como ferramentas importantes para aprimorar a compreensão e a aplicação de conceitos geométricos, promovendo uma abordagem mais interativa e envolvente na sala de aula (Lopes et al., 2018).

Os DGS são programas computacionais projetados para explorar e manipular objetos geométricos de maneira dinâmica. Ao contrário dos métodos tradicionais, nos quais os desenhos geométricos são estáticos, tais ambientes permitem que os estudantes alterem parâmetros, movam pontos e observem instantaneamente as consequências dessas mudanças na Geometria. Esse dinamismo não apenas pode promover uma maior atenção dos alunos, mas também fornece uma compreensão significativa e intuitiva dos conceitos geométricos (Lima & Rocha, 2022).

Para González-López (2001) desde a concepção dos DGS, esses sistemas oferecem oportunidades para cultivar habilidades de visualização geométrica e experimentação nos estudantes e possibilitam representações dinâmicas que podem desenvolver habilidades importantes para o pensamento geométrico e para a argumentação (Leivas et al., 2023).

A digitalização na Educação Matemática traz consigo novas ferramentas que demandam ajustes e adaptações curriculares, um redesenho de tarefas e uma maior integração com outras disciplinas. Isso possibilita o protagonismo do aluno, elemento crucial para seu próprio processo de aprendizado (Pereira, 2012).

Os DGS mais recentes, tendo como exemplo o *GeoGebra Discovery*, uma versão experimental do GeoGebra oficial, incluem recursos de raciocínio automatizado que permitem a descoberta, verificação automática e, com rigor matemático, demonstram teoremas e propriedades da Geometria (Kovács et al., 2022).

Esses recursos estão em processo de aperfeiçoamento por parte dos desenvolvedores do GeoGebra (Hohenwarter, 2019), e tem suscitado a realização de novas pesquisas, as quais tem como objeto de estudo essas recentes ferramentas tecnológicas, que por sua vez possuem relevância nas investigações no âmbito da Educação Matemática.

Foi incorporado ao software *GeoGebra Discovery* um conjunto de comandos e recursos, denominadas de Ferramentas de Raciocínio Automático (ART, em inglês), que possibilitam uma verificação matemática, ou seja, a Prova Automática de Teorema (ATP, em inglês) e a descoberta automatizada de proposições gerais sobre construções da Geometria Euclidiana desenvolvidas pelo usuário.

Essas ferramentas (fornecidas por botões no Menu) e comandos (a serem digitados no Campo de Entrada) permitem que o usuário conjecture, descubra e verifique declarações exibidas pelo software sobre diferentes elementos de uma determinada construção geométrica. As ART do *GeoGebra Discovery*, até o momento, são compostas de algumas ferramentas e comandos denominados *Relation*, *LocusEquation*, *Prove*, *ProveDetails*, *Discover* e *Compare* (Kovács, 2021; Kovács et al., 2022).

A ferramenta e o comando *Relation*, existente na versão oficial do GeoGebra, retorna com respostas numéricas, afirmando ou não a possibilidade de as relações ocorrerem entre objetos

geométricos (Kovács et al., 2022) e, a versão disponível no *GeoGebra Discovery*, possui outros aprimoramentos que serão abordados ao longo desse trabalho.

O comando *LocusEquation* permite obter uma equação implícita de um ponto, dada uma propriedade a ser validada, sendo um refinamento do comando *Locus* (Kovács et al., 2018).

Os comandos *Prove* e *ProveDetails*, disponíveis na versão 6 do GeoGebra, funcionam de maneira semelhante, ou seja, o usuário digita um comando e insere a conjectura, obtendo como resposta se é verdadeira ou falsa (Kovács et al., 2022).

O comando *Discover*, ainda exclusivo da versão experimental do *GeoGebra Discovery*, aplicado a um determinado ponto, escolhido pelo usuário que manipula o software, busca, de forma automática, possíveis relações geométricas envolvendo os objetos da construção realizada e tais resultados são apresentados, visualmente, ao usuário (Kovács et al., 2022).

O comando *Compare*, também ainda exclusivo do *GeoGebra Discovery*, permite comparar duas grandezas geométricas, procurando uma relação entre elas (Kovács, 2021).

Alguns recursos básicos de raciocínio automatizado estão disponíveis no GeoGebra Clássico e outros comandos das ART podem ser encontrados no *GeoGebra Discovery*, disponível *online* e utilizada com os professores participantes deste estudo, no curso de formação, no endereço <http://autgeo.online/geogebra-discovery/>. Há uma versão para *download*, que pode ser obtida, por exemplo, em <https://github.com/kovzol/geogebra/releases/tag/v5.0.641.0-2023Sep28> e em constante atualização.

O objetivo geral dessa pesquisa foi verificar se as ferramentas e comandos do *GeoGebra Discovery*, colaboraram para o processo de ensino e de aprendizagem de propriedades da Geometria Plana por meio da interação, exploração, criação e verificação de conjecturas, dos respectivos participantes, nesse contexto.

Segundo Garuti, Boero e Lemut (1998):

Durante a produção de uma conjectura, o aluno elabora progressivamente seu enunciado por meio de uma intensa atividade argumentativa funcionalmente entremeada à justificativa da plausibilidade de suas escolhas. Na etapa subsequente, de depoimento, o aluno articula-se com esse processo de forma coerente, organizando alguns dos argumentos anteriormente produzidos segundo uma cadeia lógica¹ (Garuti et al., 1998, p. 352, tradução nossa).

Balacheff (2022) caracterizou a argumentação como um “discurso que pode ser: Orientado: visa a validade de uma afirmação; Crítico: analisa, apoia e defende; Intencional: visa modificar um julgamento” (Balacheff, 2022, p. 774). Em relação a argumentar, autor considera como um processo e destaca “que instrumenta a linguagem; que muda o valor epistêmico de um enunciado; que modifica a relação com o conhecimento; que estrutura a socialização” (Balacheff, 2022, p. 774).

¹ During the production of the conjecture, the student progressively works out his/her statement through an intensive argumentative activity functionally intermingled with the justification of the plausibility of his/her choices. During the subsequent statement-proving stage, the student links up with this process in a coherent way, organising some of the previously produced arguments according to a logical chain.

A utilização do *GeoGebra Discovery* pode possibilitar que os estudantes e professores desenvolvam habilidades próprias do pensamento geométrico, como identificar relações e propriedades, argumentar, visualizar, formular conjecturas, testar e verificar (Leivas et al., 2023; Russo, 2023).

Sobre o curso de formação continuada

O curso de formação continuada, com professores de matemática, sobre *GeoGebra Discovery*, no contexto da Educação Matemática, foi oferecido, durante 2 meses e meio, em 2023, a docentes das redes pública e privada de Ensino Básico e Superior.

Houve a participação efetiva de 5 professores em 10 encontros com duração de uma hora e meia, às segundas-feiras, no período da noite, a fim de evitar que coincidisse com os compromissos deles.

A formação foi desenvolvida por meio de encontros síncronos, via *Microsoft Teams*, com o compartilhamento de tela da janela do *GeoGebra Discovery*, no desenvolvimento de algumas atividades, para que os participantes pudessem acompanhar e interagir com a execução das construções.

Era incentivado que os participantes explorassem o *GeoGebra Discovery* durante diferentes horários, entre um encontro síncrono e outro, além de realizarem as tarefas que eram propostas. As tarefas solicitadas indicavam atividades que envolvessem propriedades ou teoremas da Geometria Plana para que durante os encontros fossem verificadas utilizando as ART do *GeoGebra Discovery*.

Contextualização teórica

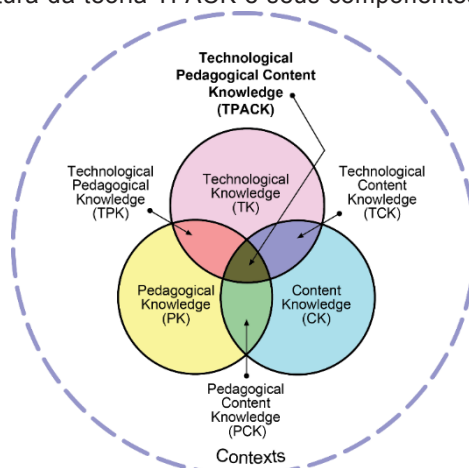
O modelo TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge) de Mishra e Koehler (2006) visa analisar a integração entre as tecnologias, os conhecimentos em práticas pedagógicas e os conteúdos específicos a serem ensinados. Essa abordagem permite a compreensão e descrição dos diversos tipos de conhecimentos fundamentais para que um professor alcance uma prática pedagógica eficaz em um ambiente de aprendizagem que faça uso de tecnologias. Os autores destacam em seu trabalho que as tecnologias estão sujeitas a mudanças constantes, uma característica intrínseca ao conhecimento tecnológico, tornando necessário que os docentes busquem atualização contínua em virtude do desenvolvimento profissional. Esse modelo foi proposto como uma expansão da ideia de conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de Shulman (1986, 2015).

A teoria TPACK reconhece que a eficácia do uso da tecnologia na educação não se resume apenas ao conhecimento de como utilizar ferramentas tecnológicas, mas está intrinsecamente ligada à compreensão de como incorporar essas ferramentas de maneira significativa no processo de ensino. Isso implica considerar cuidadosamente o conteúdo a ser ensinado e escolher as estratégias pedagógicas mais adequadas (Nakashima & Piconez, 2016).

De acordo com Mishra e Koehler (2006) é possível identificar três domínios de conhecimento: o conhecimento pedagógico (*Pedagogical Knowledge* – PK), que abrange as práticas e estratégias de ensino; o conhecimento de conteúdo (*Content Knowledge* – CK), relacionado ao

domínio dos conteúdos específicos da disciplina lecionada; e o conhecimento tecnológico (*Technological Knowledge* – TK), vinculado à compreensão de ferramentas e tecnologias, bem como à sua utilização eficaz, identificados na Figura 1.

Figura 1. A estrutura da teoria TPACK e seus componentes de conhecimento



Fonte: Koehler e Mishra (2009, p. 63).

Quando combinados, esses três domínios de conhecimento resultam, conforme Mishra e Koehler (2009), o conhecimento tecnológico pedagógico (*Technological Pedagogical Knowledge* – TPK), envolve a habilidade de escolher e utilizar ferramentas tecnológicas para promover processos de ensino e aprendizagem. O conhecimento tecnológico do conteúdo (*Technological Content Knowledge* – TCK) está associado à capacidade de empregar tecnologias para ensinar e facilitar a compreensão de um conteúdo específico. O conhecimento pedagógico de conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK) refere-se à eficácia no ensino de um conteúdo específico, levando em consideração as características e necessidades dos alunos.

Por fim, o conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo (*Technological Pedagogical Content Knowledge* – TPACK), central na teoria TPACK, representa uma integração holística das habilidades que englobam os aspetos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo do professor. Isso visa aprimorar a aprendizagem dos estudantes, proporcionando uma abordagem mais abrangente e efetiva no processo educacional.

Abreu (2022) recorreu à teoria TPACK, para analisar os dados produzidos, a partir da investigação de como os professores de matemática utilizavam as tecnologias digitais na prática pedagógica e como mobilizam e desenvolviam tais conhecimentos em sala de aula. Os resultados evidenciaram que mesmo a mobilização consciente dos conhecimentos relativos à pedagogia e ao conteúdo matemático, ainda requer do profissional um percurso de amadurecimento, reflexão e avaliação das experiências em sala de aula, juntamente com um aprofundamento teórico, a fim de tornar efetivo o uso das ferramentas digitais em suas aulas.

Silva (2021) investigou um curso de formação com professores que ensinam matemática, com intuito de compreender como eles se apropriam da utilização do software GeoGebra em sua prática pedagógica no ensino de Geometria Plana. A pesquisadora enfatizou a importância da realização de cursos dessa natureza, pelo fato deles possibilitarem o compartilhamento de experiências profissionais, reflexão de práticas pedagógicas, além de pensar de formas colaborativa em atividades que integrem as tecnologias digitais ao ensino de matemática.

Destacamos que conteúdos que atendem aspetos da Geometria Plana foram desenvolvidos nas atividades oferecidas no curso.

Método

Em pesquisas de cunho qualitativo, como apontam Bodgan e Biklen (1994), o foco desloca-se aos processos envolvidos, ao detalhamento e ao caráter descritivo dos dados coletados.

Para conduzir a pesquisa recorreu-se ao aporte metodológico do *Design Research*, que no contexto educacional, conforme delineada por Collins, Joseph e Bielaczyc (2004), refere-se a uma abordagem específica para investigar e melhorar práticas de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, Collins, Joseph e Bielaczyc (2004) sublinham que o *Design Research* foi concebido para orientar pesquisas formativas, ou seja, para aprimorar e aperfeiçoar projetos educacionais com base em investigações científicas e observações anteriores. Isso viabiliza ajustes e adaptações em resposta às contribuições provenientes dos *feedbacks* fornecidos pelos participantes envolvidos no estudo. Esta metodologia fundamentou a proposta apresentada e exposta a seguir, permeando sua construção, organização e o desenvolvimento do curso *online* de formação continuada de professores de matemática.

Os passos adotados para a preparação da formação incluíram a realização de reuniões para organizar os encontros síncronos. Durante essas reuniões, discutiu-se a versão experimental do GeoGebra, novos comandos, a seleção de atividades e o desenvolvimento destas no *software* para fins de verificação e estudo dos novos recursos. Ao longo da formação, as reuniões prosseguiram, permitindo ajustes contínuos durante os encontros, com base nos *feedbacks* coletados dos professores participantes.

A fim de possibilitar a realização das análises, os seguintes procedimentos foram realizados: todos os encontros síncronos foram gravados no *Teams*, anotações provenientes das observações de um dos pesquisadores e o envio de arquivos com as atividades desenvolvidas pelos professores participantes.

Podemos destacar como exemplos de problemas enfrentados durante a realização do curso de formação a questão da familiaridade com a plataforma, visto que alguns docentes tinham dificuldade em compartilhar a tela e, conseqüentemente, mostrar aos demais participantes suas construções e explorações com o GeoGebra Discovery, além de problemas de conexão com a internet.

A seguir apresentam-se os dados, seus resultados e análise considerando o aporte teórico da teoria TPACK.

Resultados e análise

São apresentados nesta sessão o perfil dos participantes da pesquisa, a descrição de quatro atividades desenvolvidas durante a formação continuada, os respectivos resultados e a análise. Em virtude do caráter descritivo das pesquisas qualitativas (Bogdan & Biklen, 1994), optamos por apresentar os dados, descrever parte dos encontros e realizarmos as análises em uma única seção.

Perfil dos participantes da pesquisa

Houve cerca de 20 inscritos para participar da formação, realizado em 2023, tendo uma participação efetiva de 5 docentes considerados para este estudo. Cabe salientar que no início do curso houve o interesse de todos os professores, porém o número de participantes diminuiu com o avançar dos encontros síncronos devido ao compromisso de muitos deles e, assim, para fins de análise, considerou-se os 5 referidos professores de instituições brasileiras.

Em relação à caracterização do perfil dos 5 participantes, duas eram professoras de Ensino Superior e três docentes (dois homens e uma mulher) lecionavam na Educação Básica.

No Quadro 1, apresenta-se a formação acadêmica e o tempo de experiência em docência, seja na Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) ou Ensino Superior.

Quadro 1. Caracterização dos participantes da pesquisa

Professor	Formação acadêmica	Tempo de experiência em docência
P1	Licenciatura em Matemática	3 anos
P2	Licenciatura em Matemática, Especialização e Mestrado	25 anos
P3	Licenciatura em Matemática e Mestrado	18 anos
P4	Licenciatura em Matemática, Mestrado e Doutorado	Mais de 25 anos
P5	Licenciatura em Matemática, Mestrado e Doutorado	Mais de 25 anos

Fonte: Elaborado pelos autores.

As docentes de Ensino Superior possuem Licenciatura em Matemática, Mestrado e Doutorado, com mais de 25 anos de experiência na carreira docente, em especial, em instituições privadas.

Em relação aos professores da Educação Básica, todos possuem Licenciatura em Matemática. Um deles possui Especialização em Ensino de Matemática e Mestrado, enquanto a professora tem Mestrado. Um dos professores é mais jovem na carreira docente, com 3 anos de experiência, enquanto os outros possuem entre 14 e 25 anos de experiência profissional.

No ato da inscrição do curso, os interessados responderam a um questionamento relacionado ao conhecimento do *software* GeoGebra. Houve respostas indicando cursos de capacitação,

atividades desenvolvidas durante a graduação ou ao trabalho no ambiente profissional com essa ferramenta digital. Um dos participantes relatou não se lembrar com precisão, pois já fazia muito tempo que conhecia o *software* e suas explorações com ferramentas digitais se iniciaram com o *software* Cabri Géomètre.

Podemos citar como exemplos de problemas que enfrentamos foram que alguns professores possuíam dificuldade em compartilhar a tela, seja por não terem familiaridade com a plataforma ou por problemas de conexão com a internet.

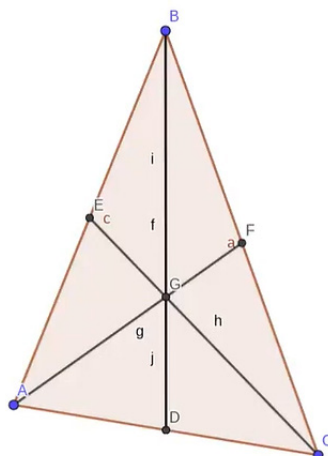
Apresentação das quatro atividades desenvolvidas

A primeira atividade explorada solicitava a construção de um triângulo qualquer e as medianas dos respectivos lados. Também foi questionado o que se poderia afirmar sobre as propriedades entre os vértices do triângulo, o ponto de intersecção das medianas (ponto G) e o ponto médio dos lados.

Um dos participantes afirmou que a relação de um segmento para outro era dois terços e, desse modo, demandava verificar que informações do *GeoGebra Discovery* permitiram comprovar tal afirmação.

Após acederem *online* ao *GeoGebra Discovery* e ansiosos para utilizá-lo, os participantes iniciaram a construção, semelhante à apresentada na Figura 2.

Figura 2. Construção da atividade do triângulo no *GeoGebra Discovery*



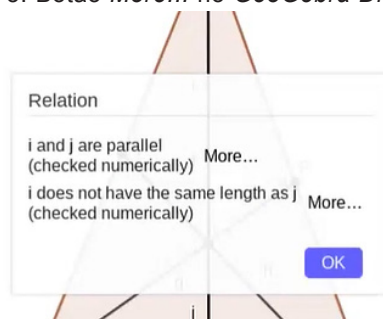
Fonte: Dados da pesquisa.

Os professores conversavam entre si, conjecturando e discutindo como a ferramenta iria fornecer tal informação.

Foram instruídos a digitar o comando *Relation()* na linha de Entrada e o *GeoGebra Discovery* fornece, então, uma janela de informações e um botão adicional, chamado de “More...” que ao

clicá-lo é acionado o sistema ART que interpreta o objeto geométrico selecionado enviando uma mensagem de verificação numérica (Figura 3) afirmando ou negando a existência de relações entre os objetos escolhidos.

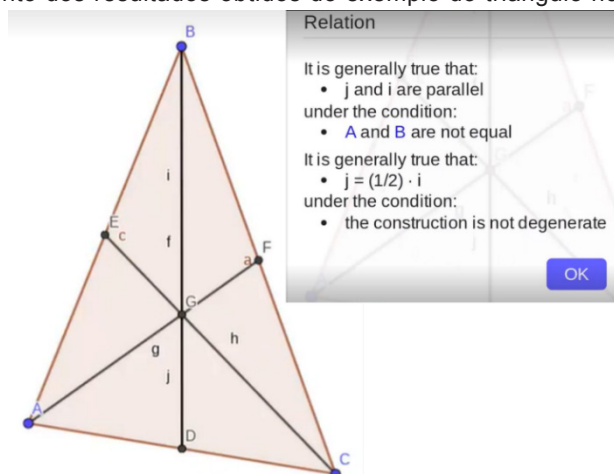
Figura 3. Botão *More...* no *GeoGebra Discovery*



Fonte: Dados da pesquisa.

Após clicar o botão “More...”, tiveram acesso a uma nova janela, que apresentava as seguintes informações, conforme a Figura 4: “*é geralmente verdadeiro que j e i são paralelos, sob a condição: os pontos A e B não são iguais*”. Além disso, apresenta que “*é geralmente verdadeiro que $j = \frac{1}{2} \cdot i$, sob a condição: a construção não é degenerada*”. A construção seria degenerada, por exemplo, se e fossem o mesmo ponto, pois não existiria a construção de um triângulo.

Figura 4. Detalhamento dos resultados obtidos do exemplo do triângulo no *GeoGebra Discovery*



Fonte: Dados da pesquisa.

A realização dessa atividade trouxe indícios sobre os conhecimentos do conteúdo (CK), ou seja, conhecimentos matemáticos relativo ao próprio estudo de Geometria Plana. Alguns parti-

cipantes já possuíam conhecimento sobre o comando *Relation* do GeoGebra, evidenciando que eles já tinham alguma informação acerca da ferramenta digital. Por essa razão, os conhecimentos prévios desempenharam um impacto relevante nos professores ao decidirem participar de um curso de formação (Souza & Abar, 2023), o qual lança luz sobre uma inovação, que são os novos recursos de ART disponibilizados pelo *GeoGebra Discovery*.

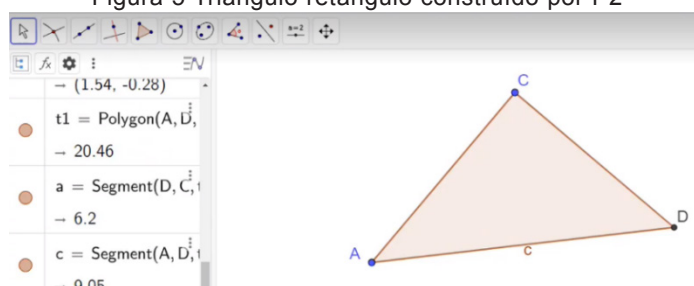
Na segunda atividade, foi compartilhada novamente, no Teams, a tela do *GeoGebra Discovery* e solicitado para que um dos professores (P2) a conduzisse indicando quais passos deveriam ser executados para verificar a seguinte propriedade dos triângulos: “A medida da mediana relativa ao vértice oposto da hipotenusa de um triângulo retângulo, é igual à metade da medida da hipotenusa”. Essa propriedade foi indicada por P2 como uma das atividades que deveriam desenvolver nos momentos de estudo ao longo da semana, entre um encontro e outro.

O professor P2 indicou as seguintes instruções para construir o triângulo retângulo:

[Construir] uma reta passando por dois pontos A e B; um ponto fora da reta [ponto C]; [construir] a reta AC; [construir] a reta perpendicular à reta AC, passando por C e, por fim, marcar a intersecção da primeira e da terceira [retas] (Professor P2).

O ponto de intersecção entre as retas mencionadas originou o ponto D. Na sequência utilizou a ferramenta Polígono, disponível no Menu, para construir o triângulo ACD que é retângulo em C e ocultou alguns objetos (as retas, os rótulos dos lados AC e CD e o ponto B), a fim de deixar a construção mais organizada, conforme a Figura 5.

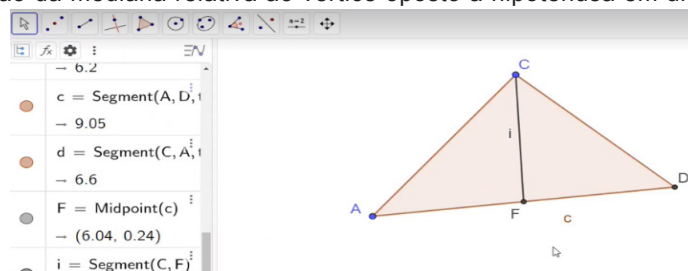
Figura 5 Triângulo retângulo construído por P2



Fonte: Dados da pesquisa.

Na sequência, P2 solicitou que se utilizasse a ferramenta Ponto Médio na hipotenusa AD, originando o ponto F e, posteriormente, construísse o segmento CF, que é a mediana relativa à hipotenusa c, como ilustrada na Figura 6.

Figura 6. Construção da mediana relativa ao vértice oposto à hipotenusa em um triângulo retângulo

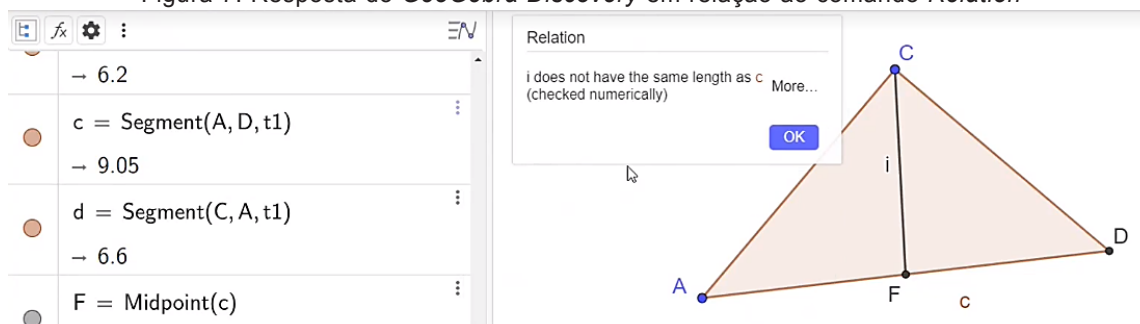


Fonte: Dados da pesquisa.

Após a construção do segmento c , P2 conjecturou “ i é igual à metade de c ”, e ressaltou que essa informação foi verificada pelo *software*. Na Barra de Entrada do *GeoGebra Discovery* digitou o comando *Relation* (`<object>`, `<object>`) e, em prosseguimento, indicou que os objetos seriam os segmentos i e c , respectivamente, e teclou Enter.

Depois de digitar o comando *Relation* (i , c) e teclar Enter o sistema do *GeoGebra Discovery* acionou automaticamente um subsistema interno, as ART, que forneceu como resposta uma janela com a seguinte informação “ i não possui o mesmo comprimento que c (verificado numericamente)”, e ao lado um botão com *More...*, como se pode observar na Figura 7.

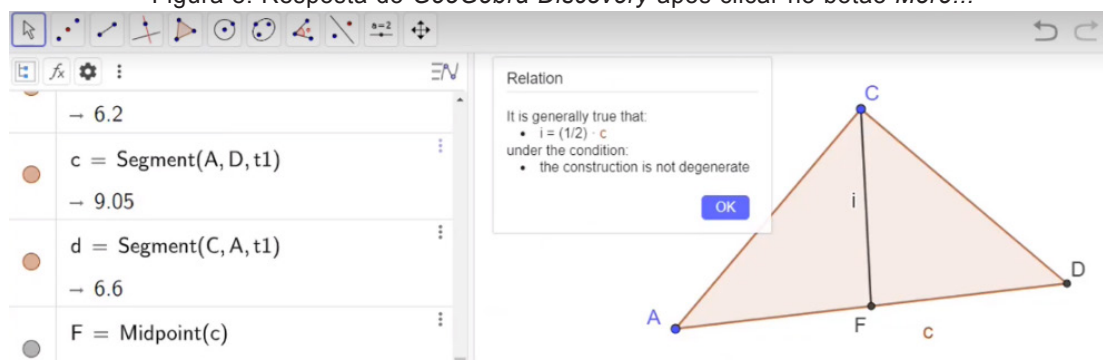
Figura 7: Resposta do *GeoGebra Discovery* em relação ao comando *Relation*



Fonte: Dados da pesquisa.

Foi realizada a leitura das informações da tela apresentada e, na sequência, clicando no botão *More...*, o *GeoGebra Discovery* apresentou novas informações, Figura 8: “é geralmente verdadeiro que $i = (\frac{1}{2}) \cdot c$, sob a condição que a construção é não degenerada” validando, dessa forma, por meio do *software* a propriedade indicada por P2. Cabe salientar que os demais participantes assentiam com a cabeça em conformidade e entendimento em relação ao desenvolvimento da atividade proposta.

Figura 8. Resposta do *GeoGebra Discovery* após clicar no botão *More...*

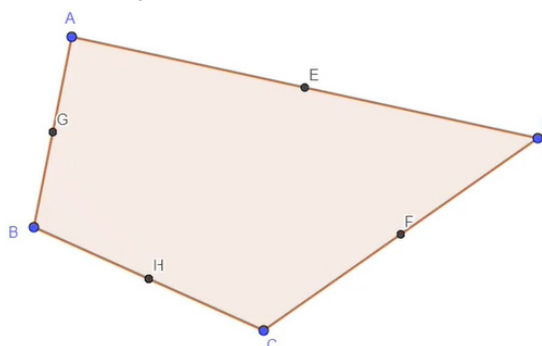


Fonte: Dados da pesquisa.

Com base no modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006), podemos constatar que o professor foi capaz de aplicar seus conhecimentos tecnológicos - TK, especificamente relacionados ao *software* GeoGebra. Observa-se a relevância do teorema escolhido, uma vez que está vinculado à Geometria Plana, demonstrando, por conseguinte, domínio do conhecimento matemático. Além disso, desenvolveu sem apresentar dificuldades a tarefa proposta o que ressalta a consolidação do TCK, conforme apontam Mishra e Koehler (2006), esse conhecimento refere-se ao saber associado aos conteúdos específicos da área permeado da utilização de elementos tecnológicos – como as ART do *GeoGebra Discovery*.

A quarta atividade envolveu a utilização do comando *Discover*. Foi solicitado aos participantes que construíssem um quadrilátero qualquer $ABCD$ e os pontos médios G , H , F e E dos respectivos lados, como na Figura 9 e foi colocada a questão se eles reconheciam a figura formada pelos pontos $GHFE$: O que se pode afirmar sobre o quadrilátero $GHFE$?

Figura 9. Construção do exemplo do quadrilátero qualquer

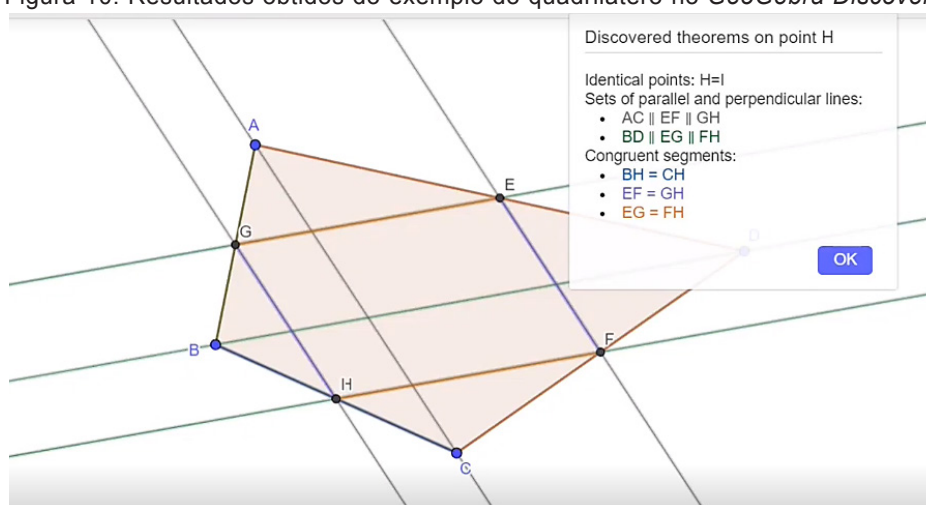


Fonte: Dados da pesquisa.

Foi indicada a instrução para que digitassem no Campo de Entrada do *GeoGebra Discovery*: *Discover(H)* ou utilizassem o comando *Discover*  no Menu. Após alguns segundos

da digitação, o *software* abre uma janela e retorna com algumas construções e informações, como na Figura 10.

Figura 10. Resultados obtidos do exemplo do quadrilátero no *GeoGebra Discovery*



Fonte: Dados da pesquisa.

Foi solicitado aos docentes que lessem as informações apresentadas na janela aberta e identificassem, por meio das propriedades disponibilizadas, a figura formada. Responderam que era um paralelogramo e, assim, foi colocada a questão: quais informações na janela aberta permitem reconhecer a figura construída como um paralelogramo?

A consideração dessa indagação é fundamental ao refletir sobre em como abordar as potenciais aplicações desta ferramenta digital como um instrumento didático na exploração de algumas propriedades da Geometria Plana. Os participantes responderam que as informações na janela indicava o paralelismo entre os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{FH}$; $\overline{GH}$ e $\overline{EF}$, e a congruência dos segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{FH}$; $\overline{GH}$ e $\overline{EF}$ garantindo que o quadrilátero era, de fato, um paralelogramo.

Segundo Morselli (2006), a atividade de conjecturar e provar engloba fases específicas. Tais etapas, podem ser relacionadas com as ações realizadas com o uso do *GeoGebra Discovery*.

Considerou-se as fases indicadas pela autora e as ações realizadas na atividade acima:

1. **Explorar o problema, a fim de descobrir uma propriedade** - Construir um quadrilátero ABCD e os pontos médios GHFE dos respectivos lados.
2. **Formular e comunicar a conjectura** - Conjeturar sobre a figura formada pelos pontos GHFE.
3. **Explorar a conjectura e descobrir argumentos teóricos que a validem** - Utilizar o comando Discover e obter as informações: paralelismo entre os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{FH}$; $\overline{GH}$ e $\overline{EF}$ e a congruência dos segmentos ($\overline{GE}$ e $\overline{FH}$; $\overline{GH}$ e $\overline{EF}$).

4. **Construir uma prova, que deve ser aceitável pela comunidade de matemáticos - Reconhecer nas informações da janela aberta no GeoGebra Discovery a prova da propriedade.**

Em alguns livros didáticos a prova dessa propriedade é semelhante à apresentada a seguir:

Hipótese: No quadrilátero do ABCD sejam G, H, F e E os pontos médios dos lados.

Demonstração: Em qualquer triângulo, se G é o ponto médio de AB e E, o ponto médio de AD, então $\triangle ABD \sim \triangle AGE$. Assim, como $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2} = \frac{AG}{AB}$, $\triangle AGE \sim \triangle ABD$, portanto, $\overline{GE} \parallel \overline{BD}$ e $\overline{GE} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Do mesmo modo, $\overline{HF} \parallel \overline{BD}$ e $\overline{HF} = \frac{\overline{BD}}{2}$. Assim, $\overline{GE} \parallel \overline{HF}$ e $\overline{GE} = \overline{HF}$.

Tese: Portanto, o GHFE é um paralelogramo.

Observa-se a caracterização de uma estrutura argumentativa, ou seja, um discurso (Balacheff, 2022), seja no caminho de buscar a demonstração formal, como organizado por Morselli (2006), ou por meio da utilização de uma ferramenta tecnológica – *GeoGebra Discovery* – que não irá informar diretamente os passos para construir a prova, mas fornecerá um conjunto de informações pertinentes à construção com as quais o usuário deverá indicar os argumentos necessários para identificar a demonstração.

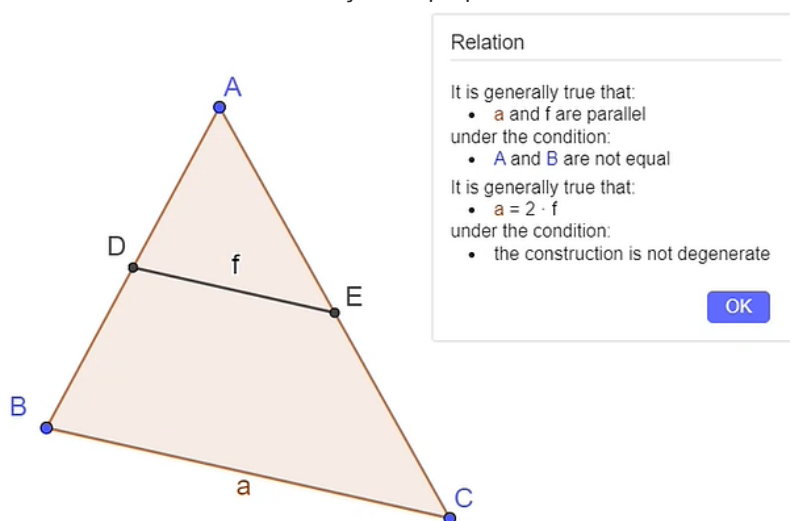
Foi observado aos participantes que o *GeoGebra Discovery*, por meio do comando *Discover*, busca propriedades a partir do ponto escolhido (Kovács, 2022), cabendo ao usuário interpretar o conjunto de informações na caixa apresentada para comprovar a propriedade a ser verificada.

A quarta atividade trazia a seguinte propriedade da Geometria Plana: “o segmento que une os pontos médios dos lados de um triângulo é paralelo à respectiva base e igual a sua metade”. Foi compartilhada, no Teams, a tela do *GeoGebra Discovery* com a construção de triângulo ABC e, com a ferramenta *Ponto Médio*, foi determinado os pontos médios E e D dos lados b e c, respectivamente. Na sequência, foi criado o segmento f que une os pontos médios.

Na Barra de Entrada foi digitado o comando *Relation* (<object>, <object>), sinalizando que os objetos seriam os segmentos e , respectivamente, e acessada a tecla Enter. O *software* retornou uma janela de informações e duas teclas com a palavra More, ao clicar, o sistema mostra as seguintes informações: “é geralmente verdadeiro que a e f são paralelos, sob a condição que A e B não são iguais”. Além disso, “é geralmente verdadeiro que $a=2.f$, sob a condição que a construção é não degenerada”, como se pode observar na Figura 11.

Nota-se que $f = \frac{1}{2}a$, o que o conjunto de ART, também, poderia verificar colocando na *Barra de Entrada* o comando *Relation* com a ordem invertida dos segmentos, este ponto foi ressaltado com os professores, pois eventualmente essa situação poderia ocorrer em um ambiente de sala de aula.

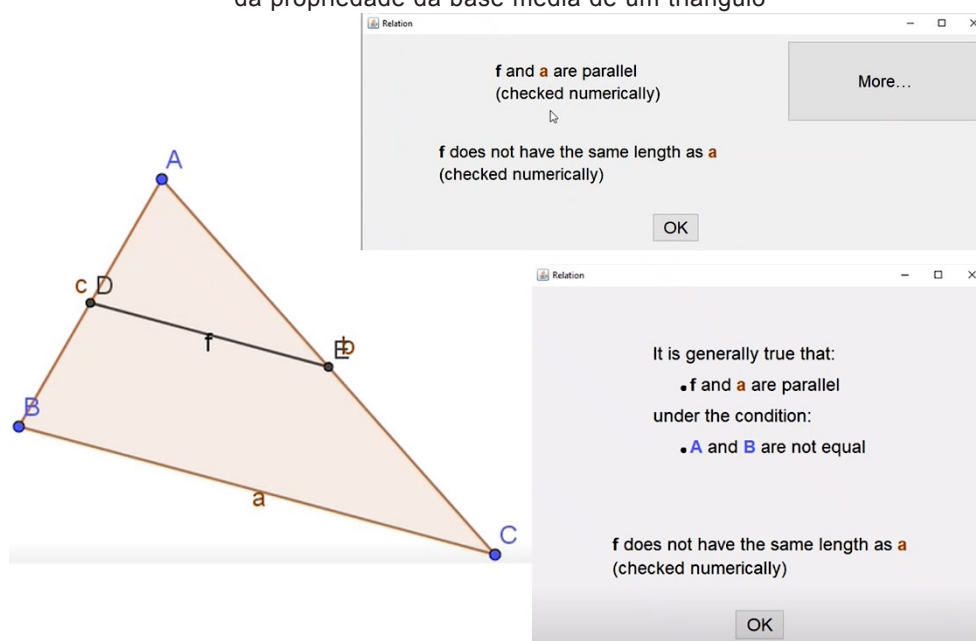
Figura 11. Comando *Relation* na verificação da propriedade da base média de um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa.

Foi realizada a mesma construção no GeoGebra 5 utilizando o comando *Relation* com os mesmos segmentos e os participantes puderam observar os aprimoramentos que esse comando possui no *GeoGebra Discovery*, pois a informação que a base média do triângulo é metade do respectivo lado não era disponibilizada, como ilustrada na Figura 12.

Figura 12. Comando Relation no GeoGebra 5 na verificação da propriedade da base média de um triângulo



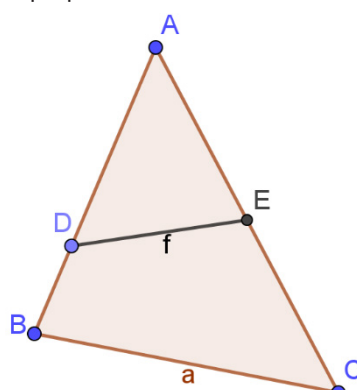
Fonte: Dados da pesquisa.

A caixa de informações aberta ao acionar a ferramenta *Relation* no GeoGebra 5 trouxe apenas que “é geralmente verdadeiro que f e a são paralelos, sob a condição que A e B não são iguais”, além disso, “ f não possui o mesmo comprimento que a (chechado numericamente)”.

Cabe salientar que nessa versão do GeoGebra não houve a informação que o segmento $f = \frac{1}{2}a$, sendo assim, o comando *Relation* foi aprimorado na versão do *GeoGebra Discovery*, encontrando novas relações entre os elementos que constituem a construção (Kovács et al., 2022).

Em outro desdobramento dessa tarefa, houve a proposta em se considerar a recíproca desta atividade possibilitando, assim, explorar o comando *LocusEquation*. Considerou-se no triângulo ABC, o ponto médio E e outro ponto qualquer (D) no lado oposto (Figura 13). E foi feita a seguinte indagação: “Onde deve estar esse ponto (D) para que propriedade seja válida?”

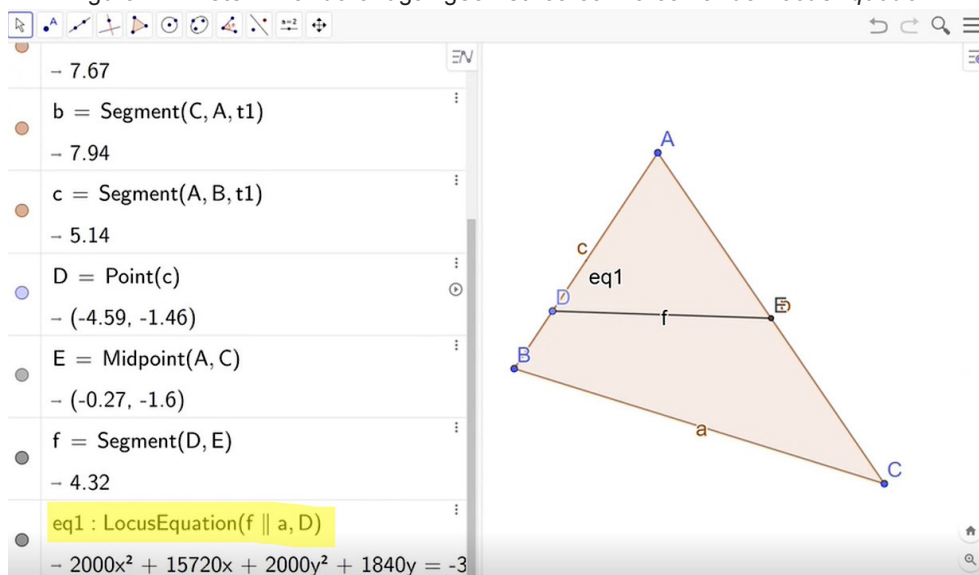
Figura 13. Construção da proposta da atividade da base média de um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o comando *LocusEquation*(f||a,D) o *GeoGebra Discovery* determina um lugar geométrico (c) indicando onde deveria estar o ponto D por meio de uma equação eq1 dada na Janela de Álgebra como apresentado na Figura 14.

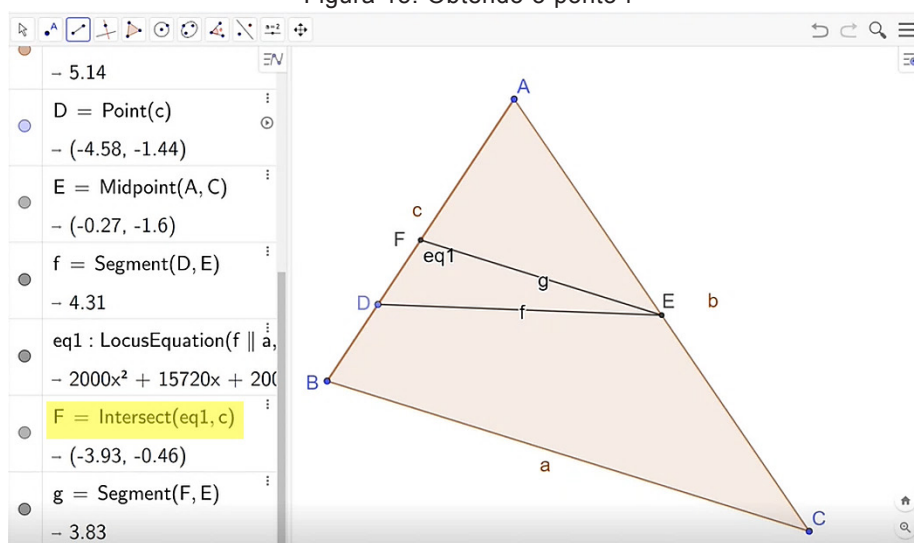
Figura 14. Determinando o lugar geométrico com o comando *LocusEquation*



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o comando *Intersect*(eq1,c) é obtido o ponto F procurado e após construir o segmento EF, denominado de g, como pode observado na Figura 15, foi possível provar a propriedade proposta.

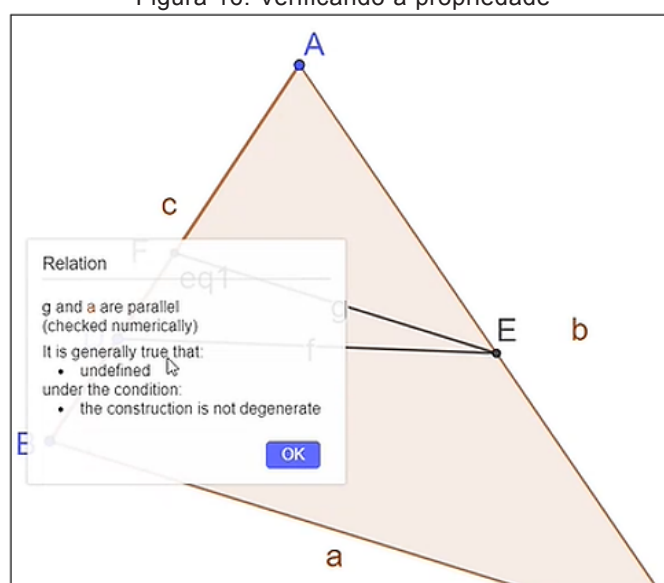
Figura 15: Obtendo o ponto f



Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizar e utilizando o comando *Relation(g,a)* é verificada a validade da propriedade na janela do *GeoGebra Discovery* (Figura16).

Figura 16. Verificando a propriedade



Fonte: Dados da pesquisa.

Pensando no modelo da teoria TPACK (Mishra & Koehler, 2006), o conhecimento tecnológico envolve a compreensão de elementos pertinentes ao GeoGebra, como o domínio dos comandos, serem digitados na Barra de Entrada ou diretamente no Menu, e ferramentas da Janela de Álgebra e Janela de Visualização. No caso da utilização do *GeoGebra Discovery*, há a incorporação de novos recursos, indicando que o professor atualize seus conhecimentos relacionados ao *software* e aprenda como torná-lo um recurso eficaz para o ensino no âmbito escolar.

Evidencia-se indícios da mobilização de TCK dos professores, como abordado por Mishra e Koehler(2006), ao conjecturarem, pensarem em caminhos possíveis, a localização do ponto para que a propriedade da chamada base média do triângulo fosse satisfeita.

Uma estratégia para explorar com os estudantes seria questionar se o segmento $f=1,5$, como sendo uma das conjecturas, utilizando o comando *Relation(f,1,5.a)*, e verificar a resposta retornada pelo *software* de que não são iguais, buscar outra constante que torne essa relação verdadeira (Kovács, 2018).

Diante das atividades expostas, reiteramos, em consonância com os escritos de Kovács et al. (2022) que a ferramenta Relation possibilita a verificação de conjecturas, uma vez que o usuário ao inserir no *Campo de Entrada* determinada afirmação, as ART, por meio da ATP, integradas ao sistema interno do *GeoGebra Discovery*, retornam com informações que validam ou negam a relação entre os objetos selecionados.

Enquanto o comando *Discover* realiza a descoberta de possíveis propriedades geométricas, em uma construção, a partir de um ponto e o usuário em posse das informações fornecidas pode construir a sua própria demonstração, confirmando ou refutando conjecturas de acordo com a atividade demandada.

Percebemos que, para que o docente possa utilizar esse *software* em sala de aula, é necessário que recorra aos seus conhecimentos prévios, estruture as aulas para incorporar essa inovação, bem como mobilize conhecimentos matemáticos, ou seja, do conteúdo, aliados ao pedagógico e ao tecnológico. Para abranger o *GeoGebra Discovery* nas aulas de matemática, o professor precisa enxergar nesta ferramenta tecnológica um potencial auxiliar no ensino de tópicos da Geometria Plana (Souza & Abar, 2023).

Nos estudos de Silva (2021) e Abreu (2022), foram discutidas as questões relacionadas à importância da reflexão sobre a prática docente. Nesse sentido, mesmo os professores mais experientes que participaram do presente estudo e desejam inserir novos recursos em suas aulas precisam observar e compartilhar com seus pares aspectos atrelados às dificuldades enfrentadas no percurso de construção de novos saberes ligados às tecnologias digitais no contexto educacional, visto que tais elementos constituem um caráter formativo da base de conhecimento do docente.

Outras propostas foram feitas, pelos professores, para serem exploradas no *GeoGebra Discovery*:

P1: A minha é que “a intersecção das bissetrizes de um triângulo, chamada de Incentro, é o centro de uma circunferência inscrita neste triângulo.”

P2: A minha proposta é “A medida da mediana relativa ao vértice oposto à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da medida da hipotenusa.”

P3: Com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental: “Como demonstrar o teorema de Pitágoras?”

P4: “O baricentro G de um triângulo ABC apresenta a relação $AG = \frac{2}{3}AM$ na qual AM é a mediana relativa ao lado AC .”

P5: A minha proposta é “A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central.”

A proposta sugerida por P5: “A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente”, não foi possível ser desenvolvida pois, como se trata de uma versão experimental, o *GeoGebra Discovery* necessita de outros aprimoramentos em relação a descoberta e verificação de conjecturas que envolvam medidas de ângulos.

Como abordado em Kovács e Yu (2020, p. 10, tradução nossa), “em um cenário de geometria algébrica complexa, o estudo de ângulos não é tão simples quanto investigar outros objetos. Para uma versão futura, no entanto, esse recurso seria uma melhoria importante”.²

Pontuamos que, para estudos futuros, pretendemos realizar com os participantes o confronto prévio da resolução de alguma tarefa sem o uso do *software* para enriquecer as discussões e as análises.

Considerações finais

Destaca-se a importância de promover o ensino da Geometria Plana por intermédio da verificação da validade de teoremas e que o ensino pode ser alicerçado sobre fundamentação e no estudo de propriedades, e não somente utilizá-las e aplicá-las para fins de resolver situações-problema.

Se o discente tiver a oportunidade de entender a essência de uma propriedade e puder verificá-la de forma prática, rápida e visual, ele poderá criar suas próprias conjecturas e avançar para o estado de generalizações que pode auxiliá-lo na resolução de outra situação-problema acerca do conteúdo estudado.

Trgalová et al. (2023) salientam que:

É importante observar que a qualidade dos recursos por si só não implica diretamente na qualidade do ensino e aprendizagem de matemática na sala de aula ou virtualmente. Embora os recursos sejam importantes, um pressuposto subjacente é que os efeitos dos recursos estão relacionados a sua disponibilidade e uso no sistema educacional e na sala de aula (Cohen et al., 2003). Isso desloca o foco dos recursos para como eles são utilizados e qual é o efeito na mudança no ensino e na aprendizagem de matemática (Trgalová et al., 2023, p. 2, tradução nossa).³

² In a complex algebraic geometry setting, the study of angles is not as straightforward as investigating other objects. For a future version, however, this feature would be an important improvement (Kovács & Yu, 2020, p. 10).

³ It is important to note that the quality of resources alone does not directly imply the quality of mathematics teaching and learning in the classroom or virtually. While resources do matter, an underlying assumption is that the effects of resources relate to their availability and use within the education system and classroom

Dessa forma, considera-se que o ensino de Geometria Plana por meio da exploração e a criação de conjecturas para posterior verificação, possibilitadas pelo *GeoGebra Discovery*, permitem ao estudante atuar, interagir e construir sua própria aprendizagem evidenciando sua importância como um recurso para a prática docente.

A metodologia do *Design Research* na educação incentiva, ainda, a colaboração e o compartilhamento de conhecimento entre comunidades de prática, criando um ambiente propício à construção coletiva de soluções inovadoras e eficazes para os desafios educacionais.

Como limitações observadas, destacamos que o *GeoGebra Discovery* não foi implementado nas aulas de matemática dos professores, impossibilitando o aprofundamento das análises nos domínios do TPK, previsto pela teoria TPACK. Além disso, a versão *online* utilizada nesse estudo difere em alguns recursos com a versão disponível para *download*, mais especificamente, em atividades que envolvem congruência de áreas em figuras planas.

Os professores compreenderam a importância em participar de um curso de formação continuada que envolvesse a utilização de tecnologias, seja com intuito de explorar o *GeoGebra Discovery*, para aqueles que não o conheciam, ou para ampliar os conhecimentos acerca do GeoGebra Clássico.

Contribuições dos autores

Conceptualização: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Metodologia: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Software: GeoGebra Discovery; Validação: Comitê de Ética – PUC-SP; Análise formal: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Investigação: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Recursos: Plataforma Teams e GeoGebra Discovery; Curadoria de dados: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Escrita - Esboço original: Daniel Mendes Inácio de Souza; Escrita - Revisão & Edição: Daniel Mendes Inácio de Souza e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Visualização: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Supervisão: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Gestão do projeto: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar; Captação de financiamento: Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por meio de projeto aprovado pelo Edital PIPEq 11918/2022, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida para a realização do mestrado de um dos autores.

(Cohen et al., 2003). This shifts attention from the resources to how they are used and to what effect there is a change in teaching and learning of mathematics (Trgalová et al., 2023, p. 2).

Referências

- Abreu, S. M. (2022). *A integração das tecnologias digitais à prática pedagógica do professor de matemática*. [Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas]. Repositório da Produção Científica e Intelectual da Unicamp. <https://hdl.handle.net/20.500.12733/3616>.
- Balacheff, N. (2022). A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(1), 770–815. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p770-815>.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2.
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Stellenbosch (SA): PME.
- González-López, M. J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría Utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. In P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277–290). Universidad de Granada. <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/apregeom/archivos2/homenaje/19Gonzalez-LopezMJ.PDF>.
- Hohenwarter, M., Kovács, Z., & Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 100, 79–84. <http://funes.uniandes.edu.co/14720/1/Hohenwarter2019Determinando.pdf>.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60–70. <https://citejournal.org/wp-content/uploads/2016/04/v9i1general1.pdf>
- Kovács, Z. (2021). Sobre um problema que não era interessante para Erdős. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 10(1), 5–18. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i1p005-018>
- Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M.P. (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What Are They? What Are They Good For?. In P.R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 17. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2.
- Kovács, Z., Recio, T., & Vélez, M.P. (2018). Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33–50. https://doi.org/10.1564/tme_v25.2.03.
- Kovács, Z., & Yu, J. H. (2020). *Towards Automated Discovery of Geometrical Theorems in GeoGebra*. ArXiv. org. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.12447>.
- Leivas, J. C. P., Lima, G. L., & Bianchini, B. L. (2023). Pensamento Geométrico. In B. L. Bianchini & G. L. Lima (Orgs.), *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem* (pp. 153–190). Livraria da Física.
- Lima, M. G., & Rocha, A. A. S. da. (2022). As tecnologias digitais no ensino de matemática. *Revista Ibero-Americana De Humanidades, Ciências E Educação*, 8(5), 729–739. <https://doi.org/10.51891/rease.v8i5.5513>.

- Lopes, É. M. C., Pereira, G. M. R., & Oliveira, G. S. (2018). Utilização das tecnologias digitais de informação e comunicação na educação matemática de jovens e adultos: motivos e possibilidades apontados pelas pesquisas. *Cadernos Da FUCAMP*, 16(28). <https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/1348>.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>.
- Morselli, F. (2006). Use of examples in conjecturing and proving: An exploratory study. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 185-192. Prague: PME.
- Nakashima, R. H. R., & Piconez, S. C. B. (2016). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK): Modelo explicativo da ação docente. *Revista Eletrônica de Educação*, 10(3), 231–250. <https://doi.org/10.14244/198271991605>.
- Pereira, T. d. L. M. (2012). *O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora]. <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1790>.
- Russo, A. M. (2023). A exploração de propriedades do triângulo no GeoGebra Discovery por alunos do ensino fundamental. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo*, 12(3), 133–161. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i3p133-161>.
- Silva, J. P. Z. (2021). *Contribuições de uma prática formativa envolvendo o software GeoGebra para professores e professoras dos anos iniciais do ensino fundamental* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alfenas]. Banco Digital de Tese e Dissertações da UNIFAL. <https://bdtd.unifal-mg.edu.br:8443/handle/tede/1861>.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>.
- Shulman, L. S. (2015). Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec | Nova série*, 4(2). <https://doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v4i2.293>.
- Souza, D. M. de, & Abar, C. A. A. P. (2023). Um estudo sobre as potencialidades da utilização do GeoGebra Discovery no contexto da Geometria Plana. *Educação Matemática Em Revista*, 28(80), 1-15. <https://doi.org/10.37001/emr.v28i80.3456>.
- Trgalová, J., Donevska-Todorova, A., & Edson, A.J. (2023). Evaluation of Digital Resources: The “How” and “What for”. In: Pepin, B., Gueudet, G., Choppin, J. (eds) *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer International Handbooks of Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_45-1.