



**Engenharia didática para a relação entre  
grandezas diretamente proporcionais e funções lineares:  
uma análise preliminar e uma análise *a priori***

**Didactic engineering for the relationship between  
directly proportional quantities and linear functions:  
a preliminary analysis and an *a priori* analysis**

**Ingénierie didactique pour la relation entre  
grandeurs directement proportionnelles et fonctions linéaires:  
une analyse préliminaire et une analyse *a priori***

**Emanuela Moura de Melo Castro**

Universidade Federal do Ceará - UFC  
emanuelammelo@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0003-0929-5098>

**José Gleison Alves da Silva**

Secretaria Municipal de Educação de Sobral  
gleison.profmat.seduc@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-3093-0239>

**Francisco Herbert Lima Vasconcelos**

Universidade Federal do Ceará – UFC  
herbert@virtual.ufc.br  
<https://orcid.org/0000-0003-4896-9024>

**Daniel Brandão Menezes**

Universidade Estadual Vale do Acaraú, UVA  
brandaomenezes@hotmail.com  
<https://orcid.org/0000-0002-5930-7969>

**Resumo**

Este artigo apresenta uma proposta para o ensino de Matemática, tendo em vista possibilitar a relação entre os conceitos de grandezas proporcionais e de funções. Nesse sentido, tem como objetivo apresentar uma situação didática, fundamentada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), que envolve os conteúdos programáticos de grandezas proporcionais e de funções. A Engenharia Didática (ED) é utilizada como metodologia de pesquisa, limitando-se neste trabalho às fases de análises preliminares e de concepções



das situações didáticas e análise *a priori*. Na fase de análises preliminares, comprovou-se, através de estudos em livros didáticos, que na abordagem do conteúdo de grandezas direta e inversamente proporcionais predomina o uso da regra de três nas resoluções de problemas, além de apresentar pouca relação com outros conteúdos da Matemática como, por exemplo, o de funções lineares. Na análise *a priori*, na concepção da situação didática, além da TSD, utilizou-se o software *Modellus* para dar suporte na visualização e na interação, através da modelagem de uma situação problema. Como perspectiva, tem-se que a aplicação da situação didática apresentada pode contribuir para a compreensão do educando, a respeito da relação entre as grandezas proporcionais e as funções lineares, pois utiliza uma metodologia de ensino diferenciada e faz uso de novas tecnologias para explorar a visualização e a interação.

**Palavras-chave:** Proporcionalidade; Funções; *Modellus*; Engenharia Didática.

#### Abstract

This article presents a proposal for the teaching of mathematics, in view of enabling the relationship between the concepts of proportional quantities and functions. In this sense, it aims to present a didactic situation, based on the theory of didactic situations (TSD), which involves the syllabus of proportional quantities and functions. Didactic Engineering (ED) is used as a research methodology, limiting in this work to the phases of preliminary analysis and conceptions of didactic situations and a priori analysis. In the phase of preliminary analysis, it was proved, through studies in textbooks, that in the approach of the content of direct and inversely proportional quantities it predominates the use of the rule of three in problem solving, as well as having little relationship with other mathematics content such as linear functions. In the a priori analysis, in the conception of the didactic situation, in addition to the TSD, the *Modellus* software was used to support the visualization and interaction, through the modeling of a problem situation. As a perspective, the application of the didactic situation presented can contribute to the understanding of the student, regarding the relationship between proportional quantities and linear functions, as it uses a differentiated teaching methodology and makes use of new technologies to explore the visualization and interaction.

**Keywords:** Proportionality; Functions; *Modellus*; Didactic Engineering.

#### Sommaire

Cet article présente une proposition pour l'enseignement des mathématiques, afin de permettre la relation entre les concepts de quantités et de fonctions proportionnelles. En ce sens, il vise à présenter une situation didactique, basée sur la théorie des situations didactiques (TSD), qui implique le programme de quantités et de fonctions proportionnelles. L'ingénierie didactique (ED) est utilisée comme méthodologie de recherche, limitant ce travail aux phases d'analyse préliminaire et de conceptions des situations et de l'analyse didactiques a priori. Dans la phase de l'analyse préliminaire, il a été prouvé, à travers des études dans des manuels, que dans l'approche du contenu des quantités directes et inversement proportionnelles, il prédomine l'utilisation de la règle de trois en résolution de problèmes, ainsi que peu de relations avec d'autres contenus mathématiques tels que les



funções lineares. Dans l'analyse a priori, dans la conception de la situation didactique, en plus du TSD, le logiciel Modellus a été utilisé pour soutenir la visualisation et l'interaction, à travers la modélisation d'une situation problème. En perspective, l'application de la situation didactique présentée peut contribuer à la compréhension de l'élève, concernant la relation entre les quantités proportionnelles et les fonctions linéaires, car elle utilise une méthodologie d'enseignement différenciée et utilise de nouvelles technologies pour explorer la visualisation et l'interaction.

**Mots clés:** Proportionnalité; Les fonctions; Modélus. Ingénierie Didactique.

## Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda explicitamente o estudo da proporcionalidade ainda nos anos iniciais do ensino fundamental, quando propõe habilidades como:

**(EF05MA12)** Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.

**(EF05MA18)** Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais. (Ministério da Educação [MEC], 2017, p. 245)

Nos anos finais do ensino fundamental, também se pode verificar que o documento propõe o desenvolvimento de diversas habilidades relacionadas à ideia de proporcionalidade, que estão distribuídas nas cinco unidades temáticas da componente curricular da Matemática. A propósito, a proporcionalidade é citada na BNCC como um conceito capaz de integrar as diferentes temáticas da Matemática (MEC, 2017).

Nesse sentido, a construção dessa proposta didática surgiu a partir da observação da pesquisadora como docente em uma escola pública da rede municipal de Fortaleza, Ceará, Brasil. Observou-se que o livro didático adotado, "Matemática - Bianchini" (Bianchini, 2018), traz os conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais apenas no 9º ano do ensino fundamental, fazendo pouca relação com o conteúdo de funções. Quando relacionados os dois conceitos, o livro busca trazer uma contextualização nas questões e elementos representativos como, por exemplo, o uso de tabelas. No entanto, por se tratar de um material impresso, os elementos como visualização, dinamismo e interação entre representações acabam não sendo favorecidas.

A comunicação do conceito de proporcionalidade como uma função pode favorecer a compreensão sobre o fator de proporcionalidade, e sobre propriedades associadas à proporcionalidade entre grandezas (Alpha & Almouloud, 2021). Além disso, ao apontar a conexão da ideia de proporcionalidade com diferentes conteúdos matemáticos, possibilita-se que a construção dos alunos entre os conceitos dê uma visão mais integradora da Matemática (Menduni-Bortoloti & Barbosa, 2018).



Com relação à visualização, Rivera (2011) aponta sua importância para a compreensão de conceitos matemáticos. Segundo o autor, o suporte visual pode conduzir o estudante a aplicar diferentes estratégias que o possibilitem chegar à generalização (Rivera, 2011). A visualização também é apontada por Neide et al. (2019), como um aporte que facilita a compreensão de fenômenos que desejam ser interpretados matematicamente, além de possibilitar ao estudante uma aprendizagem mais significativa.

Diante desse contexto, encontram-se pesquisas que indicam as tecnologias digitais como ferramentas potencializadoras da aprendizagem da Matemática, visto que podem contribuir para a interação de representações matemáticas de forma dinâmica, o que favorece a relação entre conceitos matemáticos, o pensamento reflexivo e uma aprendizagem mais significativa (Goldoni et al., 2018; Lemke et al., 2016).

Nesse sentido, o objetivo do presente artigo é apresentar uma situação didática, organizada a partir das pressuposições da Engenharia Didática, e fundamentada pela Teoria das Situações Didáticas, por meio da modelagem de uma situação problema feita no software *Modellus*.

A Situação Didática (SD) proposta foi construída para a aplicação em sala de aula, com foco no estudo para o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica no Ceará (Spaeece), avaliação externa realizada no estado do Ceará desde o ano de 1992. A SD pretende promover a visualização de um problema por meio de uma simulação, buscando também a integração entre um modelo matemático e a representação com tabelas e gráficos, associando a ideia de variação entre grandezas proporcionais ao conceito de função linear.

Em vista disso, na seção subsequente, abordar-se-á sobre a Teoria das Situações Didáticas e sobre a Engenharia Didática, principais referenciais teóricos que fundamentam a construção do presente estudo. Em seguida, evidenciam-se as potencialidades das tecnologias digitais para a aprendizagem da Matemática.

## Contextualização teórica

### Engenharia Didática

A Engenharia Didática (ED) emergiu da Didática da Matemática (DM) na França, na década de 80 (Carneiro, 2005). A ED pode ser caracterizada de duas maneiras distintas. Uma delas é como metodologia de pesquisa, que tem como base as vivências em sala de aula. A outra é como uma metodologia de ensino, cujos procedimentos são subsidiados por resultados de pesquisas realizadas (Santos & Alves, 2017).

A ED é constituída por quatro etapas distintas que estão intrinsecamente envolvidas, como mostra a Figura 1. Essas etapas são denominadas de: Análises preliminares ou Análises prévias, Concepção e Análise *a priori*, Experimentação e Análise *a posteriori* e validação.

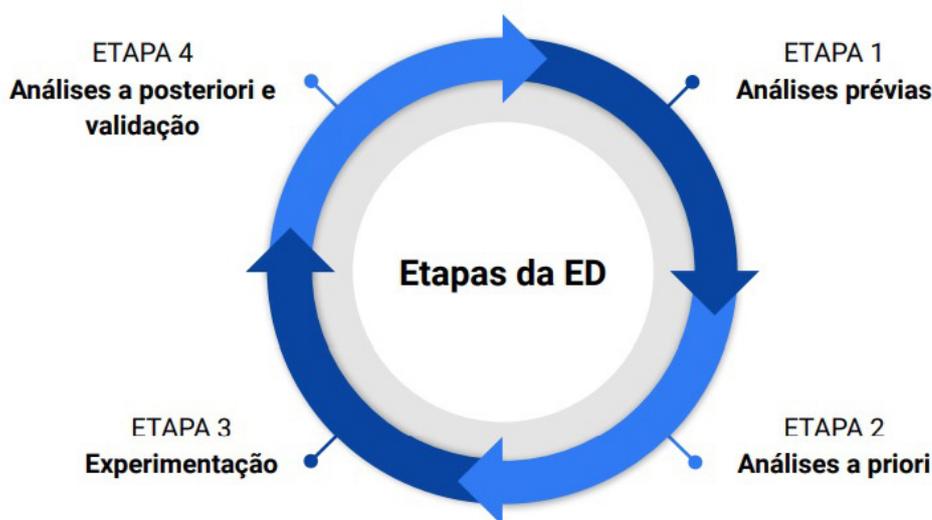


Figura 1. Etapas da Engenharia Didática.

Na etapa de análises preliminares, após definir o problema e o objeto de estudo, busca-se realizar um levantamento bibliográfico, “construindo assim o campo epistêmico-matemático por meio de definições matemáticas que pretende se explorar nas situações didáticas de ensino” (Vieira et al., 2021, p. 4). Nessa etapa, realiza-se uma análise epistemológica dos conteúdos, estuda-se sobre o ensino tradicional e seus efeitos, observam-se as concepções dos estudantes e verificam-se as dificuldades no ambiente em que se planeja desenvolver as realizações didáticas (Artigue, 1995).

Na fase de concepção e análise *a priori*, são elaboradas as situações didáticas, as quais “devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos” (Almouloud, 2007, p. 174). Nesse sentido, delimitam-se as variáveis didáticas que pretendem ser aplicadas. Artigue (1995) distingue as variáveis em dois tipos: as variáveis microdidáticas, relacionadas à organização das situações didáticas; e as variáveis macrodidáticas, quando se refere à organização global da engenharia.

Na experimentação, realiza-se a aplicação do dispositivo elaborado. Nessa fase, bem como nas outras fases, pode-se retomar as etapas anteriores, a fim de repensar uma escolha ou ajustar algum procedimento. Busca-se, assim, registrar as produções dos alunos e as situações didáticas promovidas (Almouloud & Coutinho, 2008).

Na etapa de análises *a posteriori* e validação, busca-se realizar uma análise dos dados obtidos na etapa de experimentação. Propõe-se, então, o confronto desta etapa com a primeira, análise *a priori*, validando as hipóteses levantadas na investigação (Almouloud & Coutinho, 2008; Artigue, 1995).

Na subsecção a seguir, será abordada a Teoria das Situações Didáticas, apresentada como uma metodologia de ensino para as construções didáticas.



## Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida pelo matemático francês Guy Brousseau, a fim de promover o estudo de situações que são propícias à apropriação de saberes e de interações entre o aluno, o professor e o saber provocados por um ambiente de ensino (Silva & Almouloud, 2018).

No início da década de 70, as situações didáticas eram vistas como aquelas que tinham a capacidade de ensinar sem levar em consideração o papel do professor (Brousseau, 2008). Posteriormente, definiu-se a situação didática como todo o contexto que envolve o aluno, incluindo o professor e o sistema educativo, que tem a intenção de produzir um certo conhecimento (Brousseau, 2008; Silva & Almouloud, 2018).

Nesse sentido, a TSD consiste em uma teoria que busca a categorização no processo de aprendizagem, por meio de situações didáticas, aparelhando formas de promover a evolução do aluno (Almouloud, 2007). Tem-se ainda o *milieu*, compreendido como o meio em que a situação didática é aplicada. A estruturação da TSD permite a análise das interações entre o *milieu*, o docente, o discente e o saber (Silva & Almouloud, 2018), sendo essas interações possíveis a partir das situações que envolvem o processo de ensino e aprendizagem (Silva et al., 2022).

A utilização da TSD numa intervenção didática deve promover a vivência dos quatro momentos, propostos pela teoria para analisar o processo de aprendizagem. São eles: momento de ação, formulação, validação e institucionalização (Silva & Almouloud, 2018).

Na situação de ação, coloca-se o estudante diante de um problema, proporcionando que este interaja com o *milieu* e vá em busca de estratégias para resolver o problema com o conhecimento que já possui (Oliveira, 2018). Na fase de formulação objetiva-se a troca de informações, seja com os demais estudantes ou com o professor, compartilhando de forma escrita, oral ou outra maneira as ferramentas utilizadas e as soluções encontradas (Oliveira, 2019).

A fase de validação é o momento em que o estudante irá validar a sua solução. Para isso, ele deve procurar ser claro e utilizar uma linguagem matemática que a justifique aos interlocutores que, por sua vez, poderão questionar e tirar dúvidas sobre a solução apresentada (Silva & Almouloud, 2018). Por fim, a situação de institucionalização é aquela que o professor revela suas intenções de ensino, fazendo conclusões sobre o que foi apresentado e discutido, institucionalizando o saber (Almouloud, 2007).

Na subsecção a seguir, estão apresentadas, através de pesquisas, as potencialidades das tecnologias digitais para a aprendizagem da Matemática.

## A utilização das Tecnologias Digitais para a aprendizagem da Matemática

Com a evolução da tecnologia na sociedade atual, percebe-se a busca dos profissionais da educação básica, através do desenvolvimento de atividades e pesquisas, pela inserção das Tecnologias Digitais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Essa busca também pode ser justificada pelo alinhamento das propostas pedagógicas com o que preconiza a BNCC.



Para o ensino fundamental, o documento coloca como uma das competências específicas da Matemática utilizar as tecnologias digitais “para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (MEC, 2017, p. 267).

Lima e Rocha (2022) afirmam que o uso das tecnologias digitais nas aulas de Matemática pode oferecer benefícios tanto para o professor quanto para o educando, ao possibilitar aulas mais atrativas e instigantes, que envolvem o estudante no processo de aprendizagem. Oliveira e Amancio (2022) defendem que as tecnologias digitais nas aulas de Matemática podem servir para catalisar uma mudança no modelo educacional, ao promover a aprendizagem ao invés do ensino, colocando o aprendiz no comando do processo de aprendizagem.

A pesquisa de Castro e Castro (2020) indicou que as tecnologias digitais contribuíram para a visualização e a representação dos problemas sobre proporcionalidade, e que colaboraram para a construção do significado, já que possibilitaram a vivência de situações reais relacionadas com o conceito, e que facilitaram a socialização e formalização do conteúdo.

Outras pesquisas apontam que as tecnologias digitais favorecem representações matemáticas. Associando-as a fenômenos físicos (Neide et al., 2019), ajudam a relacionar diferentes conceitos matemáticos (Stormowski et al., 2013) e possibilitam a formulação e a comprovação de hipóteses pelos estudantes (Silva et al., 2020).

Pensando nessas potencialidades, utiliza-se, neste estudo, o software *Modellus* como apoio numa situação didática que relaciona o conceito de proporcionalidade com o conceito de função.

O *Modellus* foi desenvolvido por uma equipe da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, liderada pelo professor Vítor Teodoro (Feitosa, 2018). O software *Modellus* permite a elaboração de simulações, a visualização de tabelas e gráficos, construídos a partir da inserção de um modelo matemático. Essas características tornam o software uma ferramenta que pode complementar o livro didático, trazendo dinamismo, a possibilidade de visualização diversificada de um mesmo problema, a manipulação e, a partir disso, a formulação de hipóteses e conjecturas.

## Metodologia

A metodologia adotada para o desenvolvimento deste estudo foi a Engenharia Didática (Artigue, 1995), limitando-se, no entanto, apenas às duas primeiras fases, análises prévias e concepção da situação didática e análises *a priori*.

Realizou-se um estudo acerca do ensino de proporcionalidade na Educação Básica. Nesse sentido, foram realizadas pesquisas, a fim de identificar problemas trazidos pela abordagem de ensino desse conceito matemático.

Na etapa de análises prévias, realizou-se o estudo de três livros utilizados como materiais didáticos no último ano do Ensino Fundamental, em escolas públicas brasileiras. A escolha dos livros didáticos para análise atendeu o facto da autora deste estudo tê-los utilizado em escolas, nas quais atuou como docente em turmas de 9º ano. Considerou-se que três livros seriam suficientes para a realização desta etapa.



Na etapa de concepção da situação didática e análises *a priori*, formulou-se uma situação didática para ser aplicada com estudantes, especialmente do 9º ano do Ensino Fundamental. O problema, que envolve a proporcionalidade e a noção de função linear, é baseado na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008). O software *Modellus* foi utilizado para dar ao problema uma melhor visualização e interação, esperando-se que possa contribuir para melhorar a associação desses dois conceitos matemáticos e procurando que o discente seja o construtor do seu conhecimento.

## Análises Prévias

Nesta secção, busca-se inicialmente realizar um levantamento bibliográfico acerca da proporcionalidade, conceito estudado desde os anos iniciais do ensino fundamental, conforme orienta a BNCC (MEC, 2017).

A proporcionalidade é um conceito importante para a aprendizagem em Matemática. Além de estar envolvido em muitos fenômenos químicos e físicos, o raciocínio proporcional pode ser utilizado para resolver diversos problemas cotidianos (Almeida, 2015). Contudo, quanto à abordagem desse conceito em sala de aula, algumas discussões podem ser levantadas.

Tobias (2018) diz que o ensino da proporcionalidade na Educação Básica ocorre, muitas vezes, de forma mecanizada, por meio de regras e procedimentos que não exploram o raciocínio proporcional. Sobre a apresentação dos conceitos de grandezas direta e inversamente proporcionais em livros didáticos, Silva (2015) afirma que há a predominância da técnica conhecida como regra de três, e diz:

Ainda que alguns livros tragam toda uma preparação para se chegar à resolução de problemas desse tipo, chamados de regra de três, o excesso de conteúdo a ser trabalhado faz com que muitas vezes os temas sejam tratados superficialmente, sem conexões, eliminando-se etapas essenciais a um claro entendimento da Matemática envolvida no problema (Silva, 2015, p. 9).

Em seu estudo, Soares (2016) observou que a proporcionalidade era ensinada como um assunto específico, ou seja, não se percebiam relações entre esse conceito e os demais, o que segundo a autora “limita o entendimento da proporcionalidade como conceito unificador e formador da Matemática” (Soares, 2016, p.7).

Essas problemáticas sobre o ensino de proporcionalidade são refletidas nos resultados de avaliações externas, como o Spaece, que apontam um padrão de desempenho crítico<sup>1</sup> dos estudantes do 9.º ano do Ensino Fundamental, que realizaram a avaliação no ano de 2019.

A subsecção a seguir tem como objetivo descrever, sob a perspectiva da BNCC, uma análise de três livros didáticos distribuídos pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para a apresentação e abordagem do conceito de proporcionalidade no último ano do ensino fundamental.

<sup>1</sup> “Padrão considerado básico para a etapa e a área de conhecimento avaliadas. Os estudantes que se encontram neste padrão caracterizam-se por um processo inicial de desenvolvimento de competências e habilidades correspondentes à etapa de escolaridade em que estão situados” (Ceará, 2022, p. 16).



## O conceito de proporcionalidade em livros didáticos

O conceito de proporcionalidade foi analisado em três livros didáticos, pertencentes a coleções distribuídas pelo PNLD 2020. Os livros são do 9º ano do Ensino Fundamental, e foram analisados tendo como critérios a apresentação e a abordagem do conceito de proporcionalidade. Os livros didáticos do PNLD 2020<sup>2</sup> foram distribuídos gratuitamente para estudantes de escolas públicas municipais, estaduais e federais, com base nos registros das escolhas dos profissionais da escola para serem utilizados no quadriênio 2020-2023.

Durante a realização desta análise, recorreu-se à BNCC, que orienta o currículo da Educação Básica no Brasil, a fim de verificar se os livros didáticos atendem as expectativas trazidas pelo documento sobre o conceito de proporcionalidade.

A BNCC considera a proporcionalidade como uma ideia fundamental, que relaciona diferentes campos da Matemática. No documento, a proporcionalidade ganha destaque como ideia fundamental nas temáticas de Números e Álgebra. No entanto, a base destaca que a proporcionalidade deve auxiliar no estudo de funções, da probabilidade, de áreas, dentre outros conteúdos programáticos da Matemática, que integram objetos de conhecimento das outras unidades temáticas sugeridas pelo documento: Geometria, Probabilidade e Estatística e Grandezas e Medidas (MEC, 2017).

A base define a compreensão da relação entre conceitos matemáticos como uma das competências específicas da Matemática para o ensino fundamental (MEC, 2017). Nesse sentido, a BNCC preconiza que, durante a elaboração das propostas pedagógicas, seja dada ênfase às “articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento, entre as unidades temáticas e no interior de cada uma delas” (MEC, 2017, p. 275).

A representação, segundo a BNCC, também integra o conjunto de ideias fundamentais que compõem a matemática. Ademais, o documento coloca a representação como item essencial para o letramento matemático, “definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente” (MEC, 2017, p. 266).

Diante do exposto, realizou-se a análise dos livros de modo que pudesse responder às seguintes perguntas: a) Quais são as unidades temáticas que contemplam habilidades relacionadas com o conceito de proporcionalidade? b) Quais foram as representações mais exploradas para a visualização do conceito de proporcionalidade? c) Buscou-se relacionar o estudo das grandezas direta e inversamente proporcionais com o conteúdo de funções?

O primeiro livro analisado é o da coleção “Matemática - Bianchini”, do autor Bianchini (2018).

No livro do 9.º ano do Ensino Fundamental, percebe-se que há uma diversidade de assuntos apresentados que estão relacionados com o conceito de proporcionalidade. Com exceção dos capítulos 2 e 6, todos os capítulos de alguma forma inserem a ideia da proporcionalidade, de modo que nesse livro todas as unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística) são contempladas.

<sup>2</sup> Recuperado em 17 de novembro de 2022, de <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/13410-guia-pnld-2020>.





Esse livro apresenta a definição de grandezas direta e inversamente proporcionais, contudo, no capítulo 3, onde o assunto é explorado, é possível ver a predominância da regra de três na resolução de problemas. A tabela é o principal suporte para a representação nas questões deste capítulo. A Figura 2 exibe a resolução de um problema, apresentada no terceiro capítulo do livro, que se relaciona com o assunto de grandezas inversamente proporcionais.

## Situação 2

Ao viajar de automóvel, à velocidade média de 60 km/h, Vânia leva 4 horas para fazer determinado percurso. Certo dia, ela aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h. Vamos calcular o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto.

O problema envolve duas grandezas: **velocidade**, em quilômetro por hora, e **tempo**, em hora. Indicando por  $x$  o número de horas, montamos este quadro:

Velocidade média (em km/h)	60	80
Tempo (em hora)	4	$x$

As grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**, pois, ao se aumentar a velocidade, o tempo de percurso diminui proporcionalmente. Se, por exemplo, a velocidade for duplicada, o tempo de percurso será reduzido à metade.

Assim, os produtos dos valores de cada velocidade média e dos tempos de percurso correspondentes são iguais:

$$80x = 60 \cdot 4$$

Resolvendo a equação, obtemos o valor de  $x$ :

$$\frac{80x}{80} = \frac{240}{80}$$

$$x = 3$$

Portanto, quando Vânia aumentou a velocidade média do automóvel para 80 km/h, o tempo que ela levou para percorrer o mesmo trajeto foi de 3 horas.



Figura 2. Resolução de um problema, apresentada no livro de Bianchini (2018, p. 81).

Nos demais capítulos que trabalham a proporcionalidade, o livro traz ilustrações como suporte de visualização para as questões, concretamente nos capítulos 4 e 5, que abordam o teorema de Tales e a semelhança de polígonos. Utiliza-se também a malha quadriculada, quando abordam a semelhança de figuras planas e o gráfico no plano cartesiano no conteúdo de funções.

No capítulo dedicado às funções, no entanto, pôde-se observar que se dedicou apenas uma questão, no fim da seção que tratava a função do 1º grau, para relacionar as noções de grandezas direta e inversamente proporcionais com a noção de função. Nessa questão, nenhum recurso de visualização, como tabelas, gráficos ou ilustrações, foi utilizado.



O segundo livro analisado também é do 9º ano do Ensino Fundamental e pertence à coleção “A Conquista da Matemática”, dos autores Giovanni e Castrucci (2018).

Inicialmente, procurou-se identificar as unidades temáticas que inseriram o conceito de proporcionalidade. Observou-se que no livro de Giovanni e Castrucci (2018), a ideia de proporcionalidade foi bastante explorada na unidade temática de Geometria, tendo destaque principalmente na unidade 5. Percebe-se que o objeto de conhecimento que trata das grandezas direta e inversamente proporcionais foi também explorado na unidade temática de Álgebra, ao abordar o conteúdo de funções, na unidade 9.

Quando apresenta as questões que discutem segmentos proporcionais, o livro analisado traz ilustrações para representar segmentos de retas que apresentam uma relação proporcional. Na abordagem de teoremas que utilizam o conceito de proporcionalidade, como por exemplo o Teorema de Tales e o Teorema da Bissetriz Interna de um Triângulo, é possível observar que foram utilizadas muitas figuras, o que possibilita a visualização nas suas demonstrações e na apresentação das questões que os envolvem.

O livro de Giovanni e Castrucci (2018) relaciona por meio de um exemplo, na unidade 9, o conceito de função linear com a ideia de grandezas diretamente proporcionais. Na abordagem dessa relação, o livro apresenta uma função linear e traz uma tabela que relaciona duas variáveis  $x$  e  $y$ , assim como a constante de proporcionalidade, representada pela razão  $\frac{y}{x}$ . Na explicação do que está sendo representado na tabela (ver Figura 3), observou-se um erro na apresentação da constante de proporcionalidade, onde aparece a igualdade que pode ser explicado como um erro de digitação.

## 🌀 Função linear

Em uma função afim dada por  $y = ax + b$  (com  $a \neq 0$ ), os valores  $a$  e  $b$  são os coeficientes da função. Quando  $b = 0$ , a lei da função afim é dada por  $y = ax$  (com  $a \neq 0$ ) e ela é denominada **função linear**.

Como exemplo, consideremos a função definida por  $y = 3x$ .

Nesse caso, os coeficientes são  $a = 3$  e  $b = 0$ , ou seja, a função afim é uma função linear ( $b = 0$ ).

Veja o quadro a seguir com alguns valores de  $x$  e  $y$ .

$y = 3x$		
$x$	$y$	$\frac{y}{x}$
1	3	3
2	6	3
3	9	3
4	12	3

Observando o quadro, podemos verificar que as variáveis  $x$  e  $y$  determinam grandezas que são diretamente proporcionais, já que a razão entre valores correspondentes delas é uma constante  $\left(\frac{1}{2} = 3\right)$ . Essa constante de proporcionalidade é o próprio coeficiente  $a$ .

Figura 3. Apresentação do assunto função linear no livro Giovanni e Castrucci (2018, p. 253).



Nas questões que tratam a relação entre o conceito de grandezas e funções, observou-se que a tabela foi o principal elemento de visualização utilizado. Na seção “Retomando o que aprendeu” (Giovanni & Castrucci, 2018, p.274), da unidade 9, o livro sugere uma questão que propõe ao estudante a formulação de um problema que envolva grandezas diretamente proporcionais. Nessa unidade, o livro também faz uso de gráficos no plano cartesiano, no entanto, na representação gráfica das funções percebeu-se pouca relação com o conceito de proporcionalidade entre grandezas.

Notou-se também no livro que a regra de três foi a estratégia mais explorada nas unidades temáticas que inseriram o conceito de proporcionalidade, em especial na unidade temática de Geometria, quando realiza demonstrações de teoremas e os exemplifica.

O terceiro livro analisado é do último ano do Ensino Fundamental e pertence à coleção “Matemática: Compreensão e Prática”, de Silveira (2018).

O livro insere o conceito de proporcionalidade, principalmente nas unidades temáticas de Geometria e Álgebra. Na unidade temática de Geometria, a proporcionalidade é bastante trabalhada no capítulo 3, que aborda segmentos proporcionais e semelhança. Já na unidade temática de Álgebra, a ideia de proporcionalidade é inserida ao abordar o conteúdo função afim, no capítulo 5.

No capítulo 3, quando apresentam os conceitos de segmentos proporcionais e semelhança, os autores buscam trazer elementos como figuras, malhas quadriculadas, tabelas, representação de construções com régua e compasso para possibilitar a visualização. Quando aborda o conteúdo de funções, o livro de Silveira (2018) traz relação com a ideia de grandezas direta e inversamente proporcionais, por meio de exemplos apresentados no capítulo 5.

Nesse capítulo, o livro utiliza, principalmente, tabelas e gráficos no plano cartesiano como recursos para a visualização da relação entre grandezas e da função afim. São trazidos exemplos e problemas que relacionam o conhecimento de grandezas direta e inversamente proporcionais, com a noção de função afim. No livro de Silveira (2018) não se observou na definição de função linear, assim como nos exemplos apresentados sobre esse tipo específico de função afim, a conexão com o conceito de grandezas diretamente proporcionais.

Entende-se que a análise desses três livros foi suficiente para comprovar que o conceito de proporcionalidade teve pouca exploração em alguns assuntos da Matemática, como o de funções, por exemplo, em que a relação de proporcionalidade é essencial. Além disso, pôde-se constatar que as variações entre grandezas proporcionais têm sido abordadas, principalmente, por meio da regra de três e que não há a integração entre os variados tipos de representação de uma situação que exige o raciocínio proporcional.

Em vista disso, vê-se a importância da busca por recursos pedagógicos, além do livro didático, para dar suporte à visualização, para possibilitar o dinamismo e a interação entre ferramentas, como gráficos, tabelas e simulações, o que é difícil para um livro didático por se tratar de um material impresso. É também necessário aliar o uso desses recursos a novas abordagens de ensino, mais significativas e assertivas.

Desse modo, decidiu-se utilizar o software *Modellus* como suporte na visualização e no dinamismo para uma situação didática que envolve a proporcionalidade, visando contribuir para



articulação desse conceito com o conceito de função. Além disso, utilizou-se as quatro fases da Teoria das Situações Didáticas (ação, formulação, validação e institucionalização) para estruturar a situação didática e utilizar a Engenharia Didática, nas duas primeiras etapas, para organizar o percurso metodológico desta pesquisa.

### Concepção da Situação Didática e Análise *a priori*

Utilizou-se o software *Modellus* como ferramenta de apoio para a visualização da situação didática. O software permite, a partir da inserção de um modelo matemático, a associação de simulações e representações de gráficos e de tabelas.

Tendo como suporte essas características, pensou-se numa situação didática que associasse o ensino de função e de proporcionalidade. Espera-se, com essa proposta didática, baseada nas quatro fases da TSD, uma abordagem para o contexto das avaliações externas de matemática, objetivando um ensino mais dinâmico, que proporcione aos educandos uma aprendizagem com autonomia na construção do conhecimento.

### Situação Didática (SD)

A SD visa relacionar os conhecimentos sobre grandezas diretamente proporcionais com o conteúdo de função linear, através de uma modelagem realizada no software *Modellus*.

A questão utilizada (Figura 4) na SD foi retirada do Boletim Pedagógico do Spaece, que desejava avaliar a habilidade dos estudantes de solucionar problemas que envolvessem a solução de equações do 1º grau. Segundo o documento, o item obteve apenas 18,9% de acerto pelos educandos.

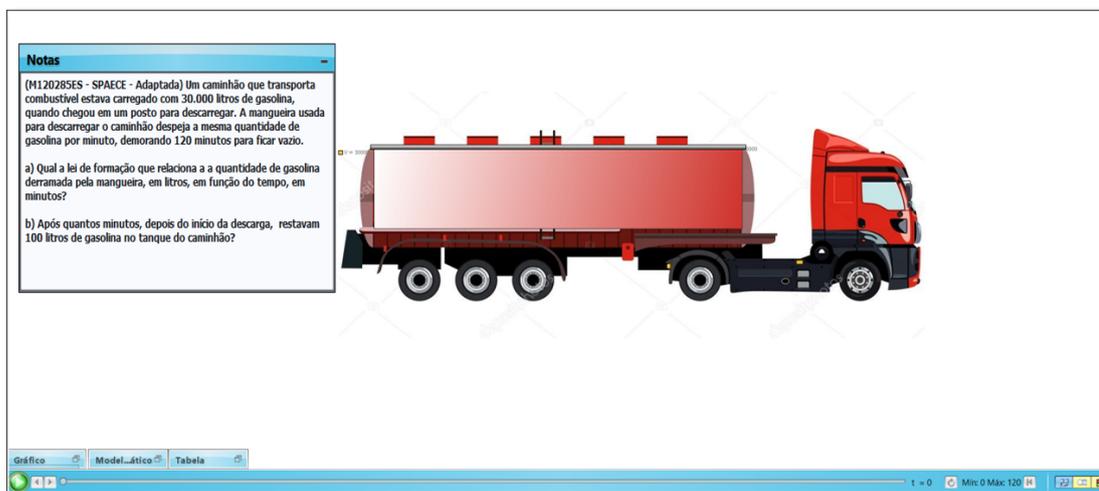
(M120285ES) Um caminhão que transporta combustível estava carregado com 30 000 litros de gasolina, quando chegou em um posto para descarregar. A mangueira usada para descarregar o caminhão despeja uma mesma quantidade de combustível por minuto. A quantidade  $y$ , em litros, de combustível que resta no caminhão  $x$  minutos após o início da descarga pode ser calculada pela equação  $y = 30\,000 - 250x$ . Após quantos minutos, depois do início da descarga, restavam 100 litros de gasolina no tanque do caminhão?

A) 119,6 minutos.  
B) 120,4 minutos.  
C) 200,0 minutos.  
D) 220,0 minutos.  
E) 297,5 minutos.

Figura 4. Questão retirada do Boletim Pedagógico 2013<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Recuperado em 24 de setembro de 2022, de <https://avaliacaoemonitoramentoceara.caeddigital.net/#!/colecoes>.

A proposta teve como objetivo, a partir da questão adaptada (Figura 5) e modelada através do software *Modellus*, dar a possibilidade de os educandos encontrarem diferentes estratégias de resolução, relacionando a noção de grandezas proporcionais com a noção de função linear.



The image shows a screenshot of the *Modellus* software interface. On the left, a window titled 'Notas' contains the following text: '(M120285ES - SPAECE - Adaptada) Um caminhão que transporta combustível estava carregado com 30.000 litros de gasolina, quando chegou em um posto para descarregar. A mangueira usada para descarregar o caminhão despeja a mesma quantidade de gasolina por minuto, demorando 120 minutos para ficar vazio. a) Qual a lei de formação que relaciona a a quantidade de gasolina derramada pela mangueira, em litros, em função do tempo, em minutos? b) Após quantos minutos, depois do início da descarga, restavam 100 litros de gasolina no tanque do caminhão?'. To the right of the text is a 3D rendering of a red tanker truck. At the bottom of the interface, there are tabs for 'Gráfico', 'Model\_Matrico', and 'Tabela', and a status bar showing 't = 0' and 'Mix: 0 Másc: 120'.

Figura 5. Questão do Spaece adaptada no *Modellus*.

Para elaborar a simulação do problema no software *Modellus*, o professor insere, a partir das informações fornecidas no problema, equações na janela Modelo Matemático (Figura 6). O docente possibilita, por meio da simulação, que o discente visualize a redução do nível de combustível no tanque do caminhão. Também, a partir das equações inseridas no software pelo professor, proporciona-se aos alunos a visualização de um gráfico e de uma tabela.

Com a observação da simulação e da tabela gerada no software, entende-se que os estudantes podem perceber no problema apresentado as grandezas que apresentam uma relação de proporcionalidade. A janela Modelo Matemático pode ser ocultada pelo professor durante a manipulação do software pelo estudante.

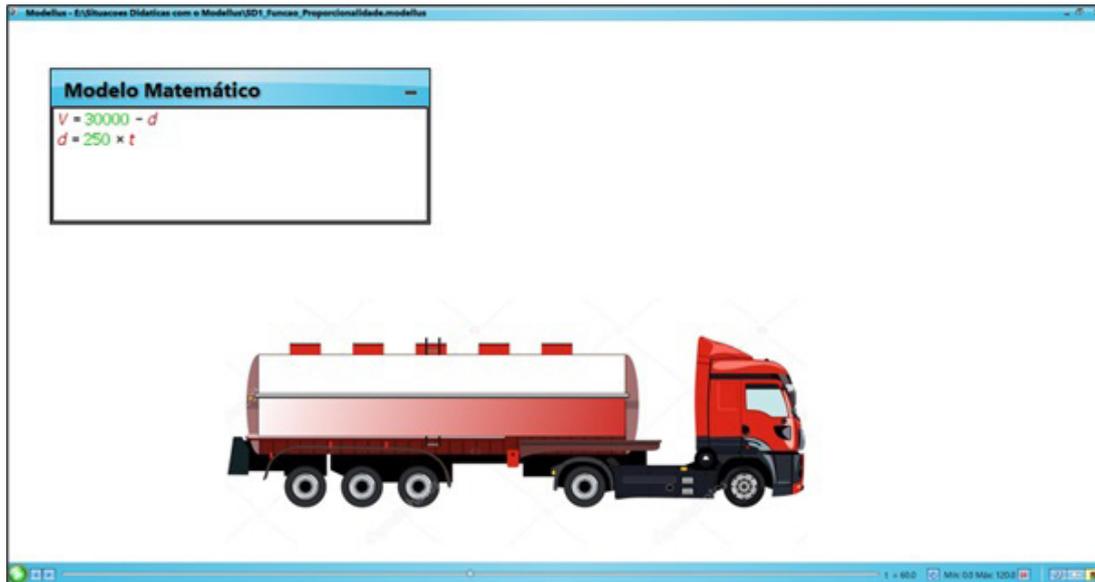


Figura 6. SD: Simulação gerada no *Modellus*.

Inicialmente, o estudante deve ler o problema e identificar informações importantes para serem utilizadas em sua resolução. Nessa etapa, definida pela TSD como ação, é importante que após compreender a questão, o estudante utilize os dados do problema para levantar hipóteses que servirão para os momentos de formulação e validação, etapas subseqüentes da TSD (Silva et al., 2022).

O professor deve estimular o aluno a observar o esvaziamento do combustível do caminhão na simulação desenvolvida no software *Modellus*. O docente também pode sugerir a observação da tabela, exibida na Figura 7, que mostra a quantidade de combustível derramado, ao fim de cada 0,5 de segundo.

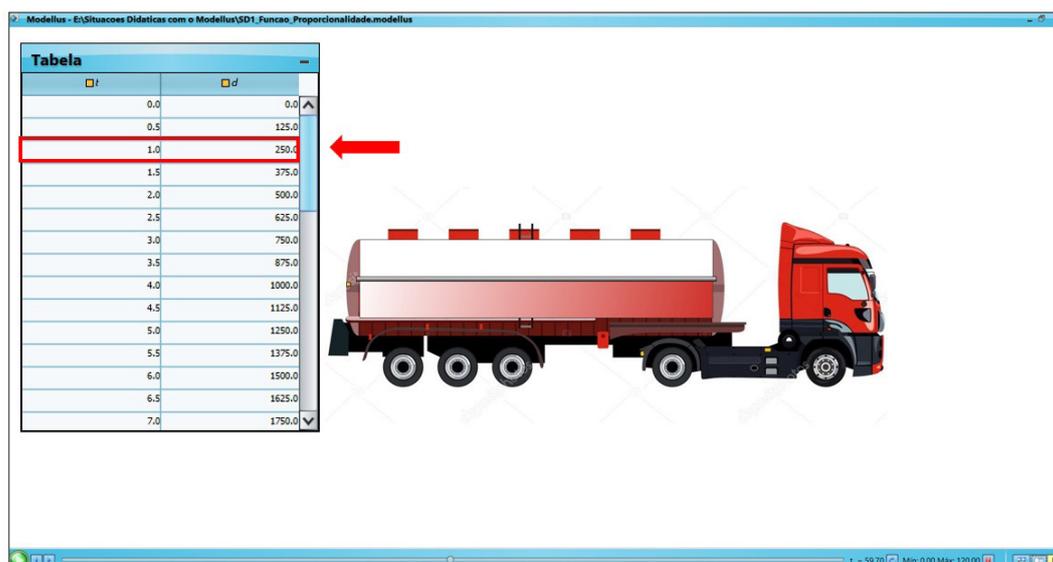


Figura 7. Simulação e Tabela do software *Modellus*.

Na etapa de formulação, “é o momento em que o aluno ou o grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que utilizou e a solução encontrada” (Almouloud, 2007, p. 38).

Depois de compreender a questão, o estudante poderá identificar as grandezas envolvidas na situação apresentada e, com a ajuda da simulação e da tabela, perceber que a quantidade de combustível despejada pela mangueira é diretamente proporcional ao tempo. Esses elementos do software poderão ajudar o aluno a compreender que a mangueira utilizada para descarregar o caminhão despeja 250 litros de combustível por minuto e a obter a relação  $d(t) = 250.t$ , que expressa a quantidade de combustível derramado em função do tempo.

Outra estratégia que pode ser utilizada pelo estudante para encontrar a vazão da mangueira é efetuar a divisão de 30.000, que consiste no volume de combustível, em litros, transportado pelo caminhão, por 120, o tempo necessário para descarregar o caminhão dado em minutos. Realizando corretamente a divisão, o estudante poderá concluir que a quantidade de combustível derramado é 250 litros por minuto e chegar à relação  $d(t) = 250.t$ , em que “d” representa a quantidade de líquido despejado, em litros, em função do tempo (t), em minutos.

A SD apresenta também, por meio do software *Modellus*, a visualização de um gráfico no plano cartesiano, que pode ser visto na Figura 8, reforçando a possibilidade de relacionar à noção de proporcionalidade entre grandezas ao conhecimento de funções lineares, explorando diferentes procedimentos, sem necessariamente apelar para a técnica conhecida como regra de três.

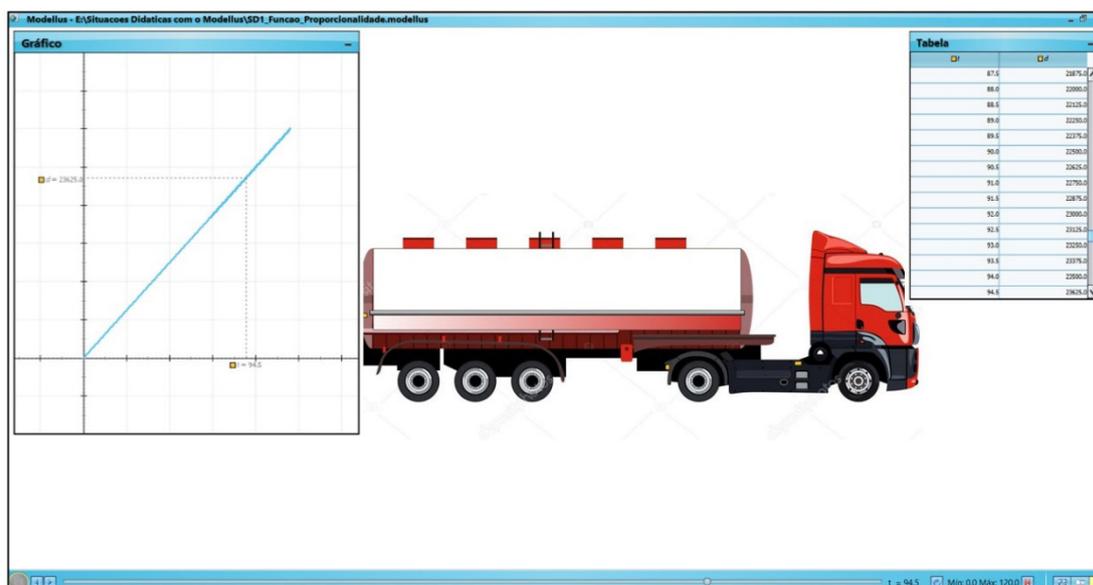


Figura 8. Gráfico gerado no *Modellus*.

A partir da observação dos elementos oferecidos pelo software, é esperado que o estudante perceba que, para o tanque estar com 100 litros de combustível, era necessário ter despejado 29.900 litros, e que a relação  $d(t) = 250.t$  expressa a quantidade de combustível derramado em função do tempo. O estudante ainda pode observar que a função obtida possui a propriedade  $d(a + b) = d(a) + d(b)$ , já que se trata de uma função linear (Lima et al., 2012). Nesse sentido, com as informações geradas na tabela e no gráfico, é possível utilizar a propriedade aditiva da função para solucionar a questão.

Os estudantes deverão defender suas soluções utilizando a linguagem matemática. Eles poderão expor as suas estratégias para a solução da questão, explicando-as também por meio das ferramentas do software *Modellus*, segundo os seus conhecimentos matemáticos, o que é uma característica da situação de validação (Oliveira, 2019).



Figura 9. Solução por meio de relações de tipo aditivo.

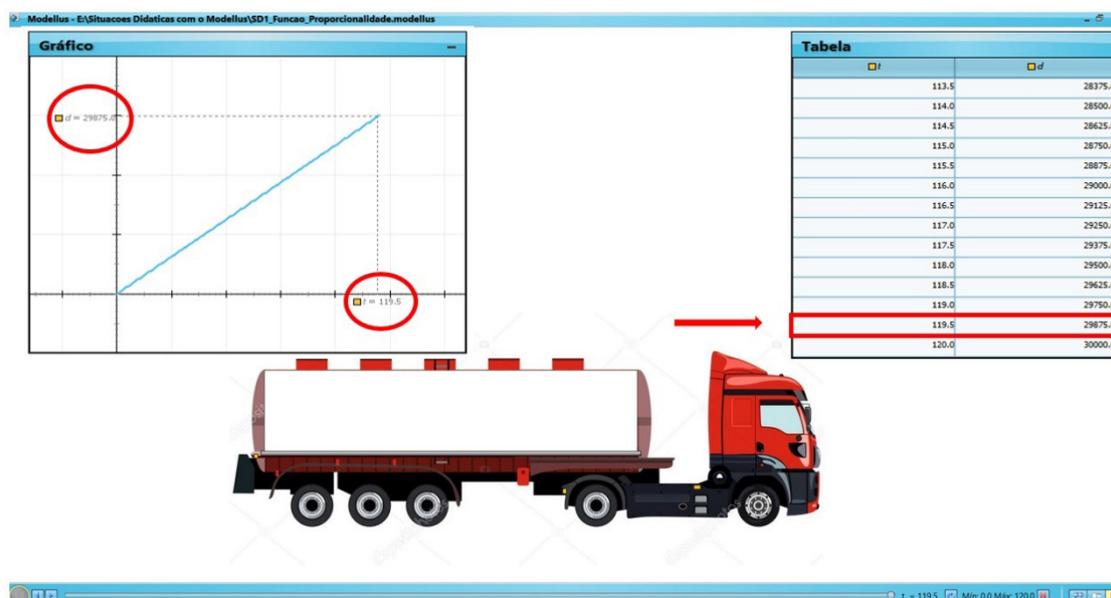


Figura 10. Propriedade aditiva da função d.

Como mostrado na Figura 9 e na Figura 10,  $d(0,5) = 125$  e  $d(119,5) = 29\ 875$ . Nesse sentido, ao compreender que a função linear, dada pela fórmula, expressa uma relação de proporcionalidade e que  $d(0,1 + 119,5) = d(0,1) + d(119,5) = 25 + 29\ 875 = 29\ 900$ , o estudante pode concluir



que passados 119,6 minutos restavam 100 litros de combustível no caminhão, inicialmente cheio com 30.000 litros.

Por fim, na situação de institucionalização, o professor retoma a condução da aula. Na ocasião, o docente pode expor suas intenções sobre a atividade desenvolvida e sintetizar o conhecimento, a fim de promovê-lo a um novo nível, como destaca Figueroa e Almouloud (2018) ao abordar sobre essa etapa da TSD.

Sendo assim, a partir do problema que envolve a relação entre função linear e a proporcionalidade e também das discussões feitas nas etapas anteriores, o professor pode explorar na situação apresentada a propriedade das proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

E justificar essa propriedade por meio da tecnologia associada à função linear crescente  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}.$$

O professor também pode apresentar a construção da simulação por meio da exibição da janela Modelo Matemático do software *Modellus*, possibilitando questionamentos e a aparição de novas situações relacionadas à função e à noção de proporcionalidade como, por exemplo, a situação de não proporcionalidade da função que descreve o volume do combustível no caminhão em relação ao tempo.

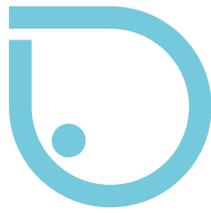
Diante da situação-problema que buscou relacionar o conceito de função linear com a noção de proporcionalidade direta, espera-se que, após a aplicação, os estudantes consigam associar ambos os conceitos.

## Considerações Finais

Este artigo buscou apresentar uma situação didática estruturada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD), para relacionar a noção de grandezas proporcionais com o assunto de função linear. Nesse sentido, o presente trabalho reuniu discussões que podem colaborar com as práticas pedagógicas dos professores de Matemática, especialmente os da Educação Básica.

A construção deste estudo foi realizada a partir dos pressupostos da Engenharia Didática (ED), em suas duas primeiras etapas. Realizou-se na primeira etapa análises preliminares, um levantamento bibliográfico sobre o ensino da proporcionalidade na educação básica e uma análise de três livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. Essa etapa da ED permitiu comprovar que a relação entre a proporcionalidade e o conteúdo de função está sendo pouco explorada, e que a regra de três é a estratégia mais frequente na resolução de questões sobre grandezas direta e inversamente proporcionais nos livros didáticos.

Na segunda etapa da ED, concepção e análises *a priori*, apresentou-se uma situação didática que utilizava como suporte para a visualização o software *Modellus*, numa tarefa adaptada



do Spacee. Entende-se que a situação didática sugerida pode contribuir para estabelecer uma relação entre os conceitos de grandezas proporcionais e função linear. Além disso, a proposta pode apresentar vantagens sobre o livro didático através do dinamismo e visualização trazidos pelo software *Modellus*, através da simulação associada às representações de gráficos e tabelas. Tendo isso em vista, considera-se que os objetivos das duas etapas da ED, análises preliminares e concepção e análise *a priori*, foram alcançados.

Observa-se, por meio das discussões trazidas neste trabalho, a possibilidade de construir situações didáticas para serem aplicadas nas aulas de Matemática, diante de uma situação-problema com o apoio das tecnologias digitais.

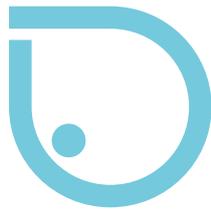
Tem-se, como perspectiva, que a aplicação dessa situação didática com estudantes pode contribuir para que haja uma aprendizagem mais significativa sobre a proporcionalidade e função, visto que utiliza uma exposição diferenciada, por meio de novas tecnologias e uma nova abordagem de ensino.

## Referências

- Almeida, R. G. (2015). *Razão e proporção para além da sala de aula* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora]. Repositório Institucional da UFJF. <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/168>
- Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR.
- Almouloud, S. A., & Coutinho, C. D. Q. e. S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, 3(1), 62-77. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62>
- Alpha, O., & Almouloud, S. A. (2021). Das proporções à proporcionalidade: o impacto crucial ou hegemonia da regra de três. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 769-809. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p769-809>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gomez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-61). Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericano.
- Bianchini, E. (2018). *Matemática Bianchini* (9ª ed.). Moderna.
- Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Ática.
- Carneiro, V. C. G. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. *Zetetike*, 13(1), 87-120. <https://doi.org/10.20396/zet.v13i23.8646981>
- Castro, J. B. de, & Castro, J. A. Filho. (2020). Projeto pensar, conectar e fazer: o uso das tecnologias digitais para a aprendizagem da proporcionalidade. *EDUCAÇÃO*, 9(2), 95-109. <https://doi.org/10.17564/2316-3828.2020v9n2p95-109>
- Feitosa, F. J. B. (2018). *O uso do software modellus no ensino de cinemática na 1ª série do Ensino Médio com a abordagem da aprendizagem significativa* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará]. Repositório Institucional UFC. <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/39443>
- Figueroa, T. P., & Almouloud, S. A. (2018). O Milieu e o Contrato Didático - Análise de uma Aula Demonstrativa do Círculo da Matemática do Brasil. *Acta Scientiae*, 20(4), 687-706. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id4620>



- Giovanni, J. R. Jr., & Castrucci, B. (2018). *A conquista da Matemática* (4ª ed.). FTD.
- Goldoni, E. J., Basniak, M. I., Paulek, C. M., Scaldelai, D.; Felipe, & N. A. (2018). *Ensino exploratório de matemática e tecnologias digitais: a elaboração da lei dos senos mediada pelo software Geogebra*. *Acta Scientiae*, 20(3), 342-358. <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta>
- Lemke, R., Siple, I. Z., & de Figueiredo, E. B. (2016). OAs para o ensino de cálculo: potencialidades de tecnologias 3D. *RENOTE*, 14(1). <https://doi.org/10.22456/1679-1916.67355>
- Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2012). *A matemática do ensino médio* (10ª ed.). SBM.
- Lima, M. G., & Rocha, A. A. S. (2022). As tecnologias digitais no ensino de matemática. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, 8(5), 729–739. <https://doi.org/10.51891/rease.v8i5.5513>
- Menduni-Bortoloti, R. D., & Barbosa, J. C. (2018). Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito. *Educação Matemática Pesquisa*, 20(1), 269-293. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p269-293>
- Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação é Base*. MEC. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>.
- Neide, I. G., Maman, A. S., Dullius, M. M., Bergmann, A. B., & Quartieri, M. T. (2019). Percepções dos professores sobre o uso do software Modellus em uma experiência de modelagem. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 36(2), 567–588. <https://doi.org/10.5007/2175-7941.2019v36n2p567>
- Oliveira, C. A. de, & Amancio, J. R. D. S. (2022). Experiências formativas potencializadas pelas tecnologias digitais nas aulas de matemática. *Revista Docência e Cibercultura*, 6(3), 165–179. <https://doi.org/10.12957/redoc.2022.63254>
- Oliveira, F. W. S. (2018). Os momentos da teoria das situações didáticas no ensino de matemática. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 4(2), 10–20. <https://doi.org/10.35819/2447-2689remat2018v4i2id2949>
- Oliveira, J. E. (2019). *Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará]. Repositório Institucional da UFC. <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/49131>
- Rivera, F. (2011). *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum: Research, Theory, Practice, and Issues*. Springer.
- Santos, A.A., & Alves, F.R. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae*, 19(3), 447-465. <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/2739/2373>
- Silva, J. G. A., Menezes, D. B., & Alves., F. R. V. (2022). Engenharia Didática para a relação entre área de figuras planas (poligonais) e o volume de sólidos geométricos (prismas): uma análise preliminar e uma análise a priori. *Indagatio Didactica*, 14(1), 79–98. <https://doi.org/10.34624/id.v14i1.29611>
- Silva, S. C., Silva, F. dos S., & Madruga, Z. E. de F. (2020). Software Modellus e Modelagem Matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática. *Revista Thema*, 16(4), 795–809. <https://doi.org/10.15536/thema.V16.2019.795-809.1232>
- Silva, C. V., & Almouloud, S. A. (2018). Uma Articulação entre o Quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae*. 20(1). 111-129. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss1id3503>
- Silva, D. M. L. (2015). *Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectivas*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos]. Repositório Institucional UFSCar. <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7199>



- Silveira, Ê. (2018). *Matemática: Compreensão e Prática* (5ª ed.). Moderna.
- Soares, M. A. D. S. (2016). *Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica*. [Tese de Doutorado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul]. Repositório Institucional da UNIJUI. <http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/4963>
- Stormowski, V., Gravina, M. A., & Lima, J. V. (2013). Tecnologia na aula de matemática: a importância do potencial semiótico. *Novas Tecnologias Na Educação*, 11(3), 1–10. <https://doi.org/10.22456/1679-1916.44439>
- Tobias, P. R. N. A. (2018). *Sala de aula invertida na educação matemática: uma experiência com alunos do 9º ano no ensino de proporcionalidade*. [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais]. Repositório da UFMG. <http://hdl.handle.net/1843/BUOS-B2ZNH5>
- Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., & Catarino, P. M. M. C. (2021). O ensino da função quadrática por meio do PheT Colorado e da Engenharia Didática. *Revista de Educação Matemática (REMat)*, 18, 1-19. <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/522/249>