Tecnologias da Informação
em Educação

GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo – TCC: o caso da regra de L´Hôpital

GeoGebra and the Transition Complex of Calculus – TCC: the case of the L´Hôpital rule

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE
Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/IFCE
Brasil
fregis@ifce.edu.br

Resumo

O presente trabalho aborda uma perspectiva de ensino para a regra de L´Hôpital. A relevância de sua discussão se evidencia, na medida em que, a referida regra possui lugar invariante, tanto na teoria da variável real, bem como na teoria da variável complexa. Por outro lado, com origem num olhar investigativo que se apoia na Engenharia Didática e na metodologia de ensino conhecida como Teoria das Situações Didáticas, o manuscrito apresenta uma ênfase nas duas etapas preliminares (análises preliminares e análise a priori). Desse modo, busca acentuar um trato didático que aponta certos elementos atinentes à visualização. Por fim, a identificação dos elementos de transição e de elementos de ruptura, no contexto da Transição Complexa do Cálculo – TCC, poderão contribuir na obtenção de maiores conhecimentos didático-metodológicos sobre a mesma, no contexto académico.

Palavras-chave: Regra de L`Hôpital; Transição Complexa do Cálculo, Engenharia Didática, Visualização.

Abstract

This paper discusses an educational perspective about the L`Hôpital rule. The relevance of their discussion become evident, in despite of their invariant place, both in the real variable functions´ theory and the complex variable functions´ theory. On the other hand, originated in an investigative perception that relies on the Didactical Engineering and the methodology known as Theory of Didactical Situations, the manuscript shows an emphasis on the two preliminary stages (preliminary and a priori analysis). In this way, seeking emphasize a didactical style that accentuates some elements related with the visualization. Finally, the identification of the transition and rupture elements in the context of Transition Complex Calculus – TCC may help in achieving a higher educational and methodological knowledge about the rule in the academic context.

Key-words: L´Hôpital rule, Complex Calculus Transition, Didactical Engineering, Visualization.

Resumée

Cet article discute d'un point de vue pédagogique sur la règle L`Hôpital. La pertinence de leur discussion deviennent évidents, en dépit de leur lieu invariant, aussi bien dans la théorie des fonctions de variables reéle et des fonction des variables complexes. D'autre part, originaire dans une perception de recherche qui repose sur l'Ingénierie Didactique et une méthodologie pour l´enseignement, connue comme la Théorie des Situations Didactiques, le manuscrit montre l'accent sur les deux étapes préliminaires (analyses préliminaires et une analyse a priori). De cette

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

façon, cherche un trat didactique que met l'accent certains éléments liés à la visualisation. Enfin, l'identification des éléments de transition et de rupture dans le contexte dans la Transition Complexe de Calcul - TCC peut aider dans la obtention des connaissances pédagogiques et méthodologique liée avec de la règle dans le contexte académique.

Mots-clés: Régle de L´Hôpital, Transition Complexe de Calcul, L´Engénierie Didactiques, Visualisation.

Introdução

Indubitavelmente, o processo matemático de passagem do estudo de funções na variável real para a variável complexa que, de modo simbólico, indicamos por $x = x + i0 \overset{transição}{\Rightarrow} z = x + iy$, pode proporcionar uma série de mudanças conceituais e formais. Todavia, num considerável intervalo de tempo na universidade, em que os estudantes são submetidos ao ensino compulsório de certos assuntos, uma mediação didática que demonstre/acentue de modo pormenorizado a natureza das mudanças conceituais e operacionais, bem como outras que, quando lidamos com funções do tipo $y = f(x)$ ou $w = f(z) = \mathrm{f(x+iy)}$, se mostra imprescindível.

No Brasil, temos registado investigações académicas que se detêm no processo de Transição Interna do Cálculo – TINC (Alves, 2011; 2012; 2014a) que, grosso modo, se referem ao periodo de estudos da teoria das funções em uma variável real, até aos conteúdos envolvendo funções de várias variáveis. Ademais, encontramos também profunda preocupação com problemas deparados pelos aprendizes na transição da variável real para a variável complexa, relatado na literatura científica do mesmo país como Transição Complexa do Cálculo – TCC (Alves, 2014b; 2014d; 2015; 2016).

Ora, tanto no caso da TINC, bem como no caso da TCC, percebemos o interesse na identificação de elementos de ordem histórica, de ordem epistemológica, de ordem didático-metodológica, que atuam no sentido de dificultar ou retardar o entendimento dos estudantes, a despeito do aprendizado/entendimento de certos conteúdos matemáticos específicos. Por outro lado, registamos também a proposição de uma mediação para o ensino e pontos de vista diferenciados, que podem incidir positivamente em ambos processos de transição, no contexto da academia.

De modo resumido, os elementos que proporcionam uma evolução satisfatória, tanto ao professor, como no caso para os estudantes, são nominados elementos de transição, enquanto que, fatores que atuam no sentido de comprometer uma evolução significativa dos estudantes, bem como dificultar a proposição de mediações de ensino (transposições didáticas) eficientes, são nominados como elementos de ruptura. E, do ponto de vista histórico e epistemológico, nas secções subsequentes, manifestamos um interesse particular pela regra de L´Hôpital.

Nesse sentido, a partir de uma adequada demarcação de nosso terreno epistemológico de consideração, evidenciaremos que tal regra constitui um elemento epistemológico de ruptura, mas, com o auxílio do *software GeoGebra*, vislumbraremos uma possibilidade para a sua mediação que nos permitirá a proposição de elementos metodológicos de transição no âmbito da TCC (Alves, 2016).

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

Ademais, na medida em que delinearmos um determinado entrave ou problema alcançamos, como previsto pelos teóricos da Didática da Matemática, o estágio preliminar e inicial de uma Engenharia Didática – ED (Douady, 2008). Assim, uma discussão e incursão investigativa apoiada nos pressupostos da ED devem nos garantir a obtenção de conhecimentos metodológico (científicos) e sistemáticos à respeito da regra de L\`Hôpital.

Sobre a noção de derivada no contexto da Transição Complexa do Cálculo - TCC

De modo invariante, deparamos nos compêndios especializados de Cálculo, um expediente que se apoia num apelo mnemônico de imagens, com o intuito de fornecer um significado geométrico para a noção da derivada de uma função, num ponto. Ora, de modo *standard*, conhecemos a seguinte notaçao $f'(\mathrm{x}_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ que, na condição de existência do limite, pode ser agregado, ainda, ao significado de valor numérico da declive de uma reta, descrita por $(y - y_0) = f'(\mathrm{x}_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$. Por outro lado quando lidamos com funções na variável complexa, não somos mais autorizados na discussão do mesmo modelo explicativo, de cunho gráfico-geométrico, como conhecido, no ambito da variável real. Com efeito, mudanças drásticas, no contexto que indicamos há pouco são acentuadas, sumariamente, por Lins Neto (1996, p. 59):

> *"Geometricamente, esta transformação linear corresponde a primeiramente gira o vetor w de um ângulo θ, em torno da origem, e em seguida multiplicar o resultdo por $\rho > 0$. Por esta razão, podemos dizer que $Df(z_0)$ corresponde à composta de uma rotação com uma homotetia."*

O excerto anterior expressa outra possível interpretação (lógico-formal) da derivada de uma função. Outrossim, o comentário anterior diz respeito a uma perspectiva moderna e estrutural (Choquet, 1963) para a noção de derivada na variável complexa. Por outro lado, não podemos prescindir de um entendimento da evolução histórica (Bottazzini & Gray, 2013) e gênese sobre a noção de derivada, tanto na variável real, como no contexto da teoria das funções na variável complexa.

Nesse sentido, Stahl (1999, p. 159) recorda que o procedimento de identificação de máximos e mínimos, usado por P. Fermat, apresentava muita semelhança ao que hoje efetuamos na moderna diferenciação atual. E, "um método semelhante foi empregado por Fermat, em 1637, com o propósito da construção de tangentes relativamente a determinadas curvas dadas [...]. Decartes desenvolveu técnicas semelhantes na mesma época". Pouco mais adiante, Stahl comenta que tanto a equação $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, bem como $\Delta y = f'(x)\Delta x$, admitem uma profusão de aplicações, embora baseadas em pressupostos relativamente dúbios ou pouco precisos. Nesse sentido, vemos a figura 1, que transmite a ideia do Teorema do Valor Médio, fato que proporcionou o acréscimo de rigor ao conceito de derivação.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

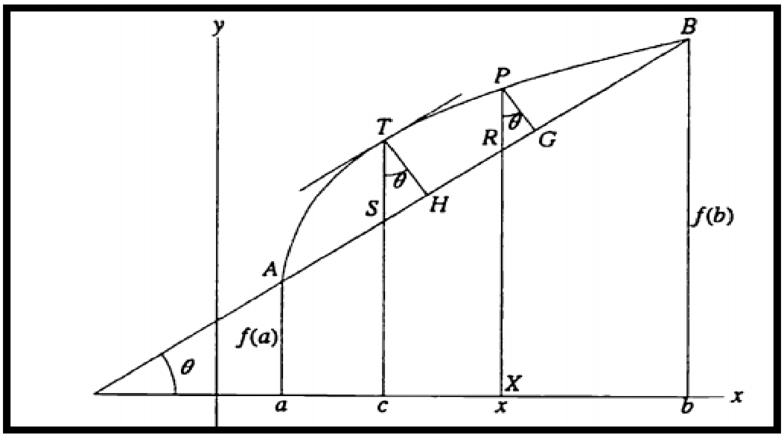

Figura 1. Stahl (1999, p. 179) comenta que o Teorema do Valor intermediário constituiu tentativa de introdução de rigor matemático.

Stahl (1999, p. 179 – 180) comenta que "o Teorema do Valor Médio proporciona um caminho formal para uma aproximação largamente usada no Cálculo. Nomeadamente, a equação $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong f'(x)$". O autor acentua seu papel no sentido de proporcionar o rigor ensejado por vários matemáticos para determinadas afirmações intuitivas, produzidas e empregadas sem ulteriores justificativas. Por outro lado, podemos consultar uma abordagem hodierna, relativa à noção de derivabilidade. Nesse sentido, Lima (2010, p. 261) retrata um esclarecimento formal, ao comentar que

> *A expressão* $f'(a)\cdot h$*, que fornece uma boa aproximação para o acréscimo* $f(a+h)-f(a)$ *quando* h *é pequeno, é chamada a diferencial de* f *no ponto a. Observe que a diferencial é uma função de* h *(e do ponto a). Escreve-se, às vezes,* $df(a) = f'(\mathrm{a})\cdot \mathrm{h}$.

Agora, com origem nas considerações que perspectivam o momento do nascedouro das ideias do Cálculo, com um apelo eminetemente intuitivo, passando por um momento da sistematização das teorias das funções na variável real e, evoluindo, em seu último estágio, para a teoria das funções na variável complexa, de que maneira adquirimos um entendimento satisfatório sobre o significado da seguinte notação $f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$? Para enriquecer nossa discussão, recorremos ao pensamento diferenciado de Needham (2000), no sentido de comparar/diferenciar o caso da derivada na variável real com a derivada no caso da variável complexa.

Resumidamente, quando apontamos ao apelo mnemônico (geométrico) expresso por Needham (2000, p. 195), relativamente ao símbolo $df(a) = f'(\mathrm{a})\cdot \mathrm{h}$, vemos que, para cada vetor dx, fazemos corresponder um outro vetor, que denotaremos por $df = f'\cdot dx$, segundo o sistema notacional

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

empregado na figura 2 por Needham (2000).

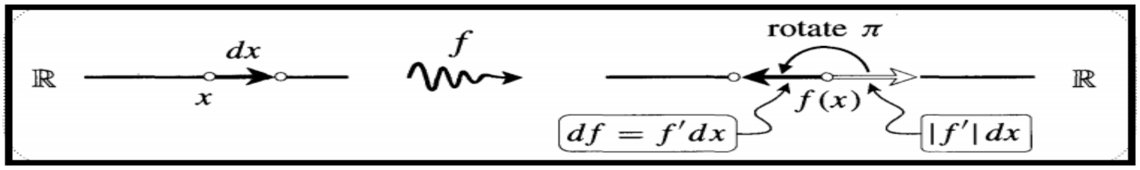

Figura 2. Needham (2000, p. 195) sugere a interpretação geométrica e visualização para a noção de derivada de uma função na variável real

Agora, estamos em condições aceitáveis para um melhor entendimento do pensamento de Lins Neto (1996, p. 59), com o contraponto atual estabelecido por Needham (2000, p. 195). De modo prosaico, a transformação linear correspondente a derivada, no caso real, ao tomar um vetor dx, gira-o de um ângulo 0^{o} ou 180^{o} e, em seguida, multiplica-o pelo vetor $f\,'$, cujo comprimento é dado/determinado por $|\,f\,'|$. Assim, podemos interpretar $df(x_0) = f\,'(x_0)\cdot dx$ de modo semelhante ao caso, complexo, apesar de que, o primeiro consiste em um caso realmente particular!

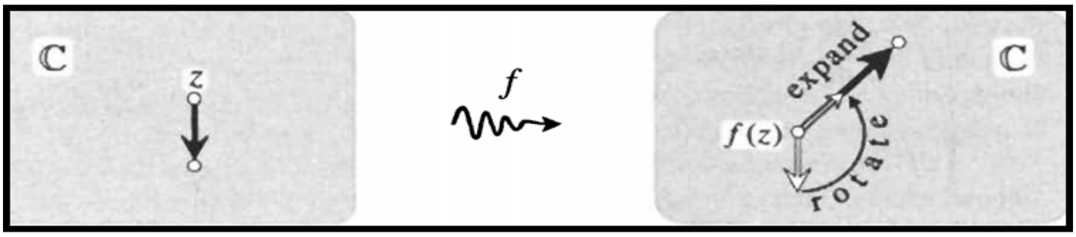

Figura 3. Needham (2000, p. 195) sugere a interpretação geométrica e visualização para a noção de derivada de uma função na variável complexa

Com efeito, com origem nas figuras 2, 3 e 4, Needham explica, que no caso da variável complexa, deparamos uma operação mais geral entre vetores ou, números complexos, que envolvem aumentar e rotacionar. Nesse sentido, Needham (2000, p. 196) assinala que "para obtermos o efeito correto, o comprimento $|\,f\,'(z)|$ deve ser o fator de magnificação (homotetia), e o argumento de $f\,'(z) = f\,'(x+iy)$ deve ser o ângulo de rotação". Desse modo, em consonância com o estilo ortodoxo de Lins Neto (1996, p. 59), que indicamos nos parágrafos anteriores, confrontaremos com um expediente que busca promover o papel da visualização para o entendimento heurísitico (Krantz, 1990) da noção de derivada, no contexto das funções da variável complexa (ver quadro resumido da transição na figura 4).

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

$$f'(x)\cdot \rightarrow \;=\; \longrightarrow \quad \overset{\textit{TRANSIÇÃO}}{\Rightarrow} \quad f'(z)\cdot \downarrow \;=\; \nearrow$$

Figura 4. Quadro resumido comparativo que envolve a Transição Complexa do Cálculo – TCC, no caso da derivada

Para concluir a secção atual, desde que nosso interesse maior gira em torno da regra de L´Hôpital, a partir das considerações passadas, nossa discussão ficaria comprometida na condição em que desconsiderássemos, *de per si*, a noção derivada de uma função requerida para seu uso. Com efeito, sob conhecidas premissas consistentes, podemos escrever

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{f(x_0)=0}{\underset{g(x_0)=0}{=}} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{x-x_0\neq 0}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.$$

Por outro lado, por intermédio de uma simples substituição notocional, vemos ainda, no caso da variável complexa, que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} \overset{f(z_0)=0}{\underset{g(z_0)=0}{=}} \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)} \overset{z-z_0\neq 0}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Não obstante, com o auxílio de uma análise cautelosa, asseguramos que algumas exigências ou propriedades, num contexto de tarefas propostas aos estudantes, envolvendo o uso da regra de L´Hôpital, se mostram semelhantes, ao passo que, outras propriedades (ou regras operacionais), necessárias para seu entendimento satisfatório, no caso da variável complexa, se apresentam

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

radicalmente modificadas/alteradas. Isso posto, tendo em vista uma discussão que proporcione o acréscimo de conhecimentos didático-metodológicos sobre tal regra, na secção subsequente, abordaremos alguns elementos que consideramos essenciais, respeitando os limites impostos por um artigo académico. Sugerimos, assim, ao leitor consultar alguns pormenores e detalhes sobre a Engenharia Didática em extensa literatura divulgada no Brasil, bem como no Exterior (Artigue, 1984; 1990; 1995; Brousseau, 1998; Doady, 1995a; 1995b; Laborde, 1997).

Engenharia Didática - ED

Douady (1993, p. 3) assinala que "todo o trabalho de construção, análise e previsão, repousa sobre um questionamento didático". Ora, na secção anterior, produzimos tal questionamento. E, antes de prosseguirmos, cabe assinalar que não temos a pretensão aqui em responder (confirmar ou refutar) um questionamento didático particular, como assim ponderão os autores Almouloud & Coutinho (2008, p. 64), por intermédio de uma via empirica, a qualquer eventual questão de ordem investigativa. Entretanto, formulamos o seguinte questionamento: como descrever situações de ensino, relacionadas com a regra de L´Hôpital, de maneira que a visualização ocupe função privilegiada, tendo como enfase seu ensino?

Como assinalamos na introdução desse escrito, do ponto de vista do *design* de investigação adotado, assumimos a sistemática prevista pela Engenharia Didática. Oriundo de uma vasta tradição acadêmica (Margolinas, 2005), sabemos que a concepção de pesquisa em Engenharia Didática compara a forma de trabalho didático do professor com a maneira de trabalho do engenheiro que, para realizar projetos, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio (Artigue, 1995, p. 243; Douady, 1995b).

Ademais, do ponto de vista do seu surgimento, evolução e constituição como vertente de estudos científicos, sabemos que nos seus primórdios, o descontentamento diante de um sistema de ensino condicionado pelos cânones apregoados pela corrente Bourbaki (Margolinas & Drijveers, 2015; Margolinas, 2005; 2015; Rogalski, 1990) estimulou uma aglutinação de estudiosos, com forte preocupação com o binômio ensino – aprendizagem. Dessa forma, num intervalo de duas décadas (anos 70 e 80), deparamos uma intensa produção de trabalhos (Douady, 1995a; 1995b; Robinet, 1984), balizados por determinados quadros e perspectivas teóricas que culminaram o alcance de um status de metodologia de pesquisa, com um amadurecimento inquestionável na década de 90 (Brousseau, 1986a; 1986b; 2004).

E, no que concerne aos momentos ou fases da investigação, distinguimos: as análises preliminares, análises *a priori*, a etapa da experimentação e introdução ao movimento de todo o aparato metodológico construído, *validação* e análises *a posteriori* (Arslan, 2005). Por outro lado, restringir-nos-emos aos primeiros dois momentos previstos por Artigue (1995), qual sejam, as análises preliminares e análise *a priori*.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

Análises preliminares

Na secção anterior, identificamos um problema de ensino relacionado com a intenção didática de uma mediação para regra de L´Hôpital. Com base e amparo da sistemática indicada pela ED, formularemos uma hipótese, que detém a possibilidade de ser investigada, eventualmente, de modo empírico, a saber: A tecnologia proporciona a mobilização de um conhecimento que extrapola os limites formais do modelo matemático envolvido na aplicação da regra de L`Hospita.

Por outro lado, dois elementos devem ser evidenciados na presente etapa, de acordo com Almouloud (2007, p. 172), a saber: (i) estudo da organização matemática e o ensino atual; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. No que concerne ao item (i), se mostra característico em uma ED, sua análise matemático-epistemológica o que, envolve uma apreciação da forma de sua abordagem nos compêndios especializados (Cartin, 1995; Cecília & Bernadez, 2008; Conway, 1978; Krantz, 1990; 2007; 2008; Lebl, 2011; Lins Neto, 1996), bem como estudos sobre seu ensino (Breda; Trocado & Santos, 2013; Braden, 1985; Chavez, 2014; Krantz, 1990). Nesse sentido, levando em consideração as hipóteses necessárias, obtivemos que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Tal quociente, permite ao solucionador de problemas, se livrar de formas indeterminadas, tais como: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0, 0\cdot(\pm\infty)$. Ademais, do ponto de vista geométrico, como comentamos no início, o quociente $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ representa a taxa entre duas declives de retas tangentes, aos gráficos respectivos das funções $f(x)$ e $g(x)$, no ponto $x = x_0$ (Little; Teo & Brunt, 2015, p. 288)

Por outro lado, quando ensejamos lidar com a passagem para a variável complexa, costumamos lidar com $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$. Isso posto, que significado geométrico poderemos fazer aderir ao ultimo quociente indicado por $\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$, uma vez que, pelo que vimos, o processo de derivação, nesse caso, envolve uma generalização (Lins Neto, 1996, p. 59) do processo na variável real?

Ressalvamos, ainda que, em consonância com o sistema notacional empregado, temos a possibilidade de acentuar um significado geométrico relacionado com a regra de L´Hôpital. De fato, quando temos a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, a sua matriz

Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

jacobiana será $J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{x}(x,y) & \frac{\partial u}{y}(x,y)\\ \frac{\partial v}{x}(x,y) & \frac{\partial v}{y}(x,y)\end{pmatrix}$. No caso de $f(z)=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$, teremos $J(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}\therefore J(\rho\cos(\theta),\rho\,\mathrm{sen}(\theta))=\begin{pmatrix}2\rho\cos(\theta) & -2\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\\ 2\rho\,\mathrm{sen}(\theta) & 2\rho\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Ora, poderemos, pois, escrever: $J=\underbrace{2\rho}_{HOMOTETIA}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta)\\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}}_{ROTAÇÃO}$.

Entretanto, a exploração matricial se mostra evidenciada por poucos autores (Soares, 2014).

Agora, estamos em condições de estabelecer um pensamento comparativo, no que concerne aos seguintes quocientes: (a) $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$; (b) $\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\frac{f'(x_0+iy_0)}{g'(x_0+iy_0)}$. Como vimos, ambos possuem uma função fundamental no papel de determinar o valor correspondente, quando fazemos uso da regra de L`Hôpital. Assim, quando nos atemos ao item (a), podemos interpretá-lo como o quociente entre duas taxas de variação, correspondentes às funções f e g, na variável real. Ou ainda, como uma operação de divisão entre os vetores $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$, no espaço unidimensional IR.

Por outro lado, no caso do item (b), podemos concebê-lo como um quociente entre dois vetores, desde que $g'(z_0)\neq 0+i0$. Admite ainda a interpretaçao sugerida por Needham (2000, p. 198), do tipo $\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}=\left|\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\right|\cdot e^{i\left(\arg\left[\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\right]\right)}=(\mathrm{hom}\,otetia)\cdot e^{i(rotação)}$.

Para concluir, acentuamos o ponto de vista de Needham (2000, p. 194), segundo o qual, a passagem do trato das funções na variável real para a variável complexa pode proporcionar uma serie de entraves e/ou dificuldades, quando o mesmo observar que:

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

"No cálculo real ordinário, nós temos um potente meio de visualização da derivada f' de uma função f definida de IR para IR, nomeadamente, como a declive de uma reta sobre o gráfico de $y = f(x)$. Infelizmente, devido a nossa falta de imaginação relativamente à quarta dimensão, nós não podemos desenhar o gráfico de uma função na variável complexa e, assim, não podemos generalizar esta concepção particular de derivada por intermédio de um caminho óbvio"

Agora, antes de passarmos para a secção subsequente, acentuamos que a diversidade de perspectivas, como algumas que acabamos de apontar, podem produzir modificações e alterações da função do professor (Brousseau, 1988; 1986).

Análise *a priori*

Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação-problema envolve "a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínio de saber." (Almouloud, 2007, p. 174). Vale observar que, no campo de saberes referenciados por Almouloud (2007), é possível, tendo em vista o nível elementar da Matemática, considerar situações "menos matematizadas". Entretanto, no nosso caso, o modelo matemático condiciona, fortemente, todas as estratégias, ações e decisões dos aprendizes. Essa variável didática é prevista, de modo geral, por Brousseau (1986, p. 412).

Por isso, as variáveis micro-didáticas que apontaremos (responsáveis por uma análise local na experimentação), são correlatas ao que Brousseau (1986) nominada de situação-didática. Além disso, nas situações que buscamos apresentar, desejamos que "elas permitam adaptações dos alunos, na medida em que tomam decisões e as modificam" (Brousseau, 1986, p. 440). Isso posto, na primeira situação, abordamos o caso de limite na variável real.

Situação problema I: Decidir a existência do seguinte limite $\lim\limits_{x \to ?} \dfrac{\ln(1 + sen(x)^2)}{2x^2}$.

Comentários: Diferentemente dos compêndios de Cálculo, a construção dinâmica abaixo na figura 5, constitui marco inicial para a discussão e debate entre os alunos. Em sua tese, Brousseau (1986b, p. 297) lembra que a acepção moderna de ensino, busca exigir do professor a provocação de mudanças e alterações desejáveis no estudante. Ademais, diante da situação, o aluno deve aceitar a demanda da tarefa colocada pelo professor (devolução). Nesse contexto, uma situação didática envolve um processo investigativo, com a presença e coordenação do professor. Desse modo, nas fases previstas pela Teoria das Situações Didáticas (situação de ação, situação de formulação, situação de validação e institucionalização), temos interesse apenas nas situações didáticas.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

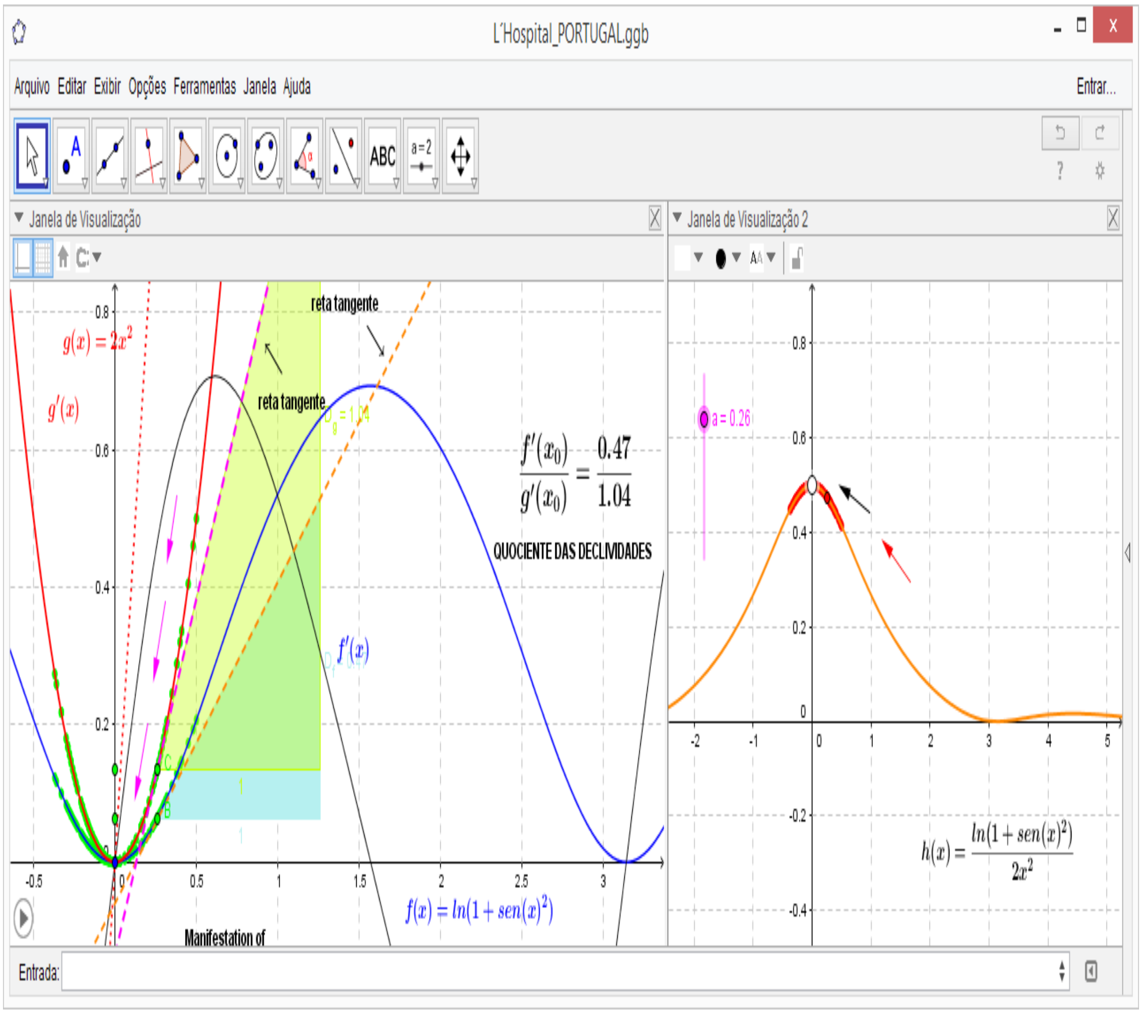

Figura 5. Com o GeoGebra proporcionamos a promoção de conjecturas na dialética da ação, momento previsto pela TSD (elaboração do autor)

Situação de ação. Quando restringimos nossa mediação ao quadro analitico, o limite indicado por

$$\lim_{x\to ?}\frac{\ln(1+sen(x)^2)}{2x^2}$$

pode ser avaliado, diante da aplicação imediada da regra de L´Hôpital. Todavia, tendo em vista que efetuamos a substituição do ponto por uma interrogação (“?”), relativamente ao qual, faz sentido o emprego da formulação, transferimos ao aprendiz a responsabilidade (a devolução do problema), para a sua escolha. Esperamos que, com a exploração da construção

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

que exibimos na figura 5, os alunos possam acompanhar o comportamento numérico das imagens das funções $f(x)=\ln(1+sen(x)^2)$ e $g(x)=2x^2$, no sentido de identificar a manifestação da indeterminação do tipo $0/0$ e, com o Geogebra, podem comparar os valores numéricos assumidos por cada função e prever o comportamento do quociente.

Situação de formulação. Reparemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+sen(x)^2)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+sen(x)^2}\left(2sen(x)\cos(x)\right)}{4x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(sen(x)\cos(x)\right)}{2x\left(1+sen(x)^2\right)}\to\dfrac{sen(0)\cos(0)}{0(1+0)}=\dfrac{0}{0}$. A manipulação anterior revela que a forma indeterminada persiste. Tal comportamento pode ser apreciado, mais uma vez, com o auxílio da figura 5, na medida em que os estudantes devem perceber que as imagens dos gráficos das funções $sen(x)\cos(x)$ e $2x\left(1+sen(x)^2\right)$ continuam tendendo a zero (inspeção de valores numéricos com o *software*). Dai, o quadro geométrico e numérico autorizará/estimulará a aplicação da regra de l´Hôpital, pela 2.ª vez. Nesse caso, veremos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\cos(x)\cos(x)-\text{sen}(x)\,\text{sen}(x)\right)}{2\left(1+sen(x)^2\right)+2x(2\cos(x))}\to\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}$.

Nas figuras 5 e 6, ao lado direito, visualizamos o gráfico da função das funções $h(x)=\dfrac{\ln(1+sen(x)^2)}{2x^2}$ e $\dfrac{\left(\cos(x)\cos(x)-\text{sen}(x)\,\text{sen}(x)\right)}{2\left(1+sen(x)^2\right)+2x(2\cos(x))}$, vislumbramos o comportamento dos limites, na medida em que $x\to 0^+$, vemos que $y\to\dfrac{1}{2}$. Reparemos que o facto da função $h(x)=\dfrac{\ln(1+sen(x)^2)}{2x^2}$ não possuir definição, p/ $x=0$, faz com que identifiquemos um "buraco" (fig, 5) aonde a função não está definida, diferentemente da figura 6.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

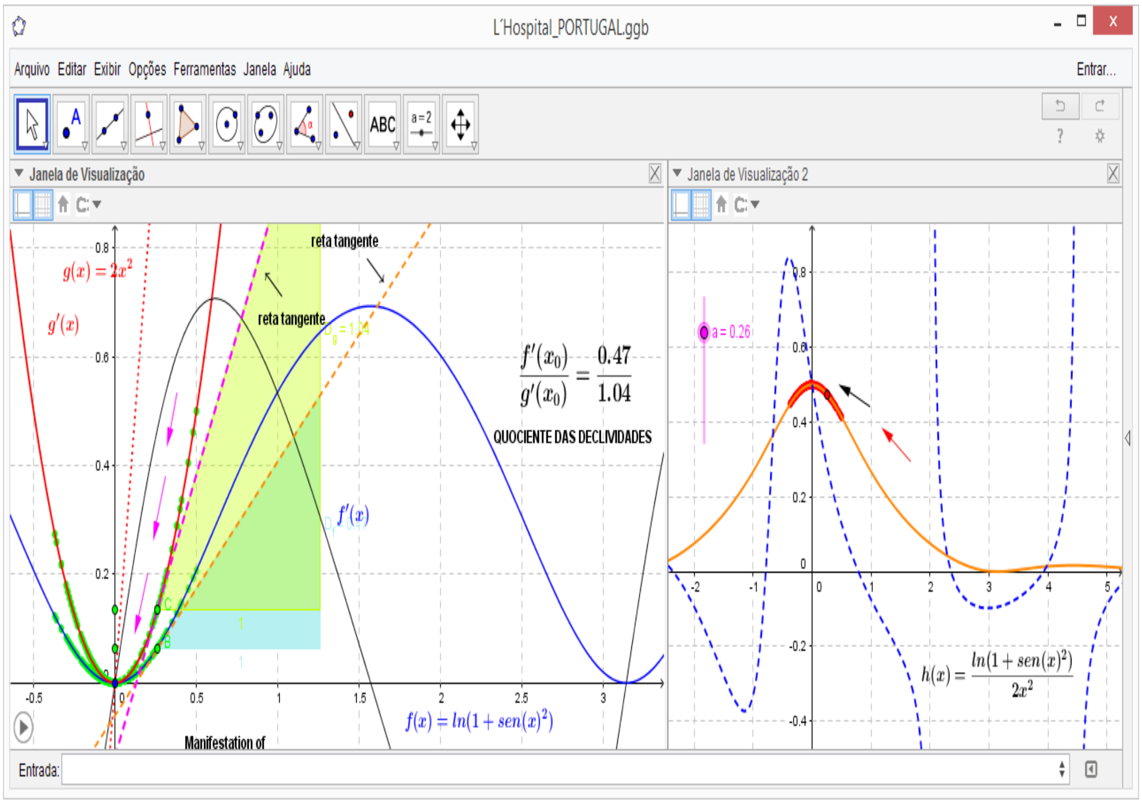

Figura 6. Com o GeoGebra proporcionamos a promoção de conjecturas na dialética da ação, momento previsto pela TSD (elaboração do autor)

Situação de validação. Nessa fase, num contexto do "debate da certeza das asserções" (Almouloud, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas, a fim de obter a certeza (validade) das relações estabelecidas, devem ser confrontados. Os alunos devem reconhecer as propriedades formais das funções que exigiram um tratamento analítico na situação dialética anterior, mormente, àquelas envolvendo a continuidade e a diferenciabilidade das mesmas.

Situação de institucionalização. Almouloud (2007, p. 40) esclarece que "uma vez construído e validado, o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio da classe embora não tenha ainda o estatuto de saber social". Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao património cultural da classe, o seguinte teorema deverá ser enunciado e, em adequação ao público de interesse (alunos de licenciatura ou bacharelato), pode ser demonstrado.

Teorema: Sejam as funções $f, g : (a,b) \to IR$ diferenciáveis, com $-\infty \le a \le b \le +\infty$

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

. Sendo $g'(\mathrm{x}) \neq 0, \forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$. Então, supondo que ocorrem (i) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ ou (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$. E se temos ainda que: (iii) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(\mathrm{x})} = L \in (-\infty,+\infty)$, Então, temos ainda que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(\mathrm{x})} = L \in (-\infty,+\infty)$.

Situação problema II: Decidir sobre a existência do seguinte limite $\lim_{x\to 3i} f(\mathrm{z}) = \lim_{x\to 3i} \frac{z^2 - 2iz + 3}{z^2 + (1-3i)z - 3i}$, com arrimo na construção da figura 7.

Situação de ação. Quando levamos em consideração uma mediação que tende a enfatizar o caráter algorítmico-procedural envolvido na determinação do limite anterior, teremos apenas que $\lim_{x\to 3i} \frac{z^2 - 2iz + 3}{z^2 + (1-3i)z - 3i} = \lim_{x\to 3i} \frac{2z - 2i}{2z + (1-3i)} = \frac{4i}{1+3i} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$. Isto e, obtivemos que $\lim_{x\to 3i} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{x\to 3i} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{x\to 3i} \frac{f'(\mathrm{x}+\mathrm{iy})}{g'(\mathrm{x}+\mathrm{iy})} = \frac{f'(0+3\mathrm{i})}{g'(0+3\mathrm{i})} = \frac{4i}{1+3i}$.

Reparemos que no caso de $\lim_{x\to 3i} \frac{z^2 - 2iz + 3}{z^2 + (1-3i)z - 3i} = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}i$, uma interpretação geralmente desconsiderada, diz respeito ao apelo/indicação vetorial. Por outro lado, com a figura 7, ao lado esquerdo, vemos um ponto móvel ou vetor $\vec{z}$ que fazemos aproximar ao ponto $0 + i3$, que constitui um centro de um disco, com raio unitário, sobre o eixo imaginário.

Ademais, com recurso num *software* de computação algébrico, como o CAS Maple, podemos verificar a seguinte decomposição $\frac{z^2 - 2iz + 3}{z^2 + (1-3i)z - 3i} = u(x,y) + iv(x,y)$, cujas partes real e imaginárias são indicadas por $u(x,y) = \frac{(x^2 - y^2 + 2y + 3)(x^2 - y^2 + x + 3y)}{((x^2 - y^2 + x + 3y)^2 + (2xy - 3x + y - 3)^2)} + \frac{(2xy - 2x)(2xy - 3x + y - 3)}{((x^2 - y^2 + x + 3y)^2 + (2xy - 3x + y - 3)^2)}$

e, a parte imaginária, que indicamos por $v(x,y) = \frac{(2xy - 2x)(x^2 - y^2 + x + 3y)}{((x^2 - y^2 + x + 3y)^2 + (2xy - 3x + y - 3)^2)} -$

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

$$\frac{(x^2-y^2+2y+3)\cdot(2xy-3x+y-3)}{((x^2-y^2+x+3y)^2+(2xy-3x+y-3)^2)}.$$

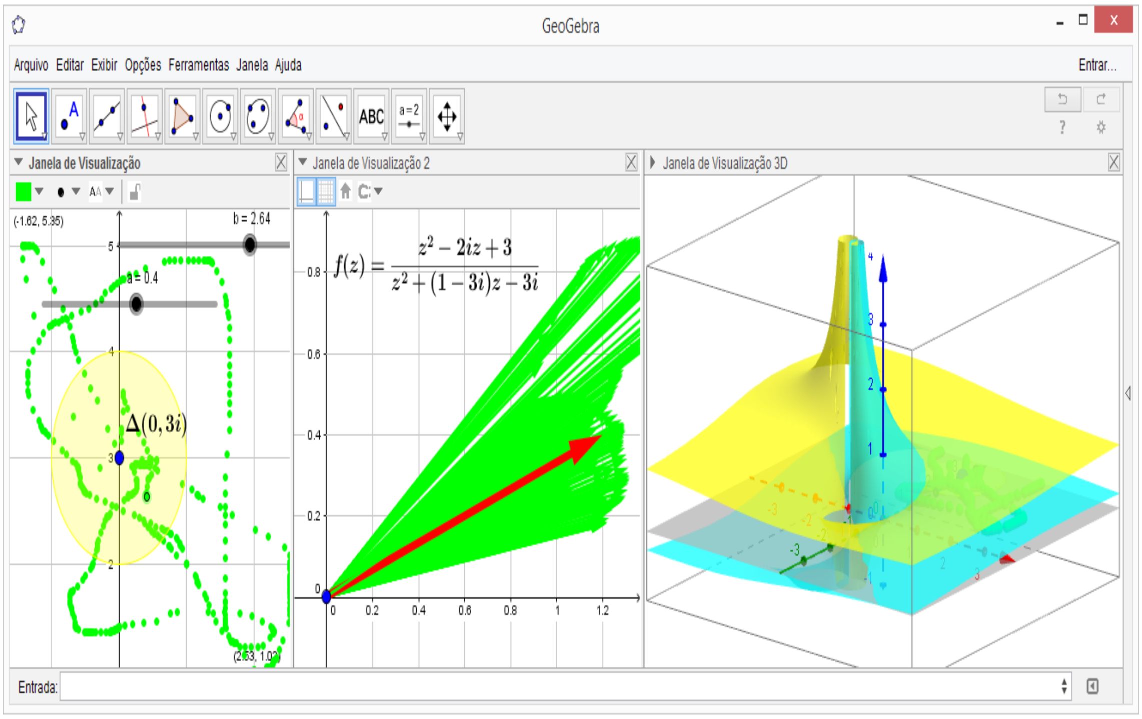

Figura 7. Com o GeoGebra descrevemos a interpretação gráfico-geométrica de funções na variável complexa e a visualizaçao de "picos" correlacionados com singularidades

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

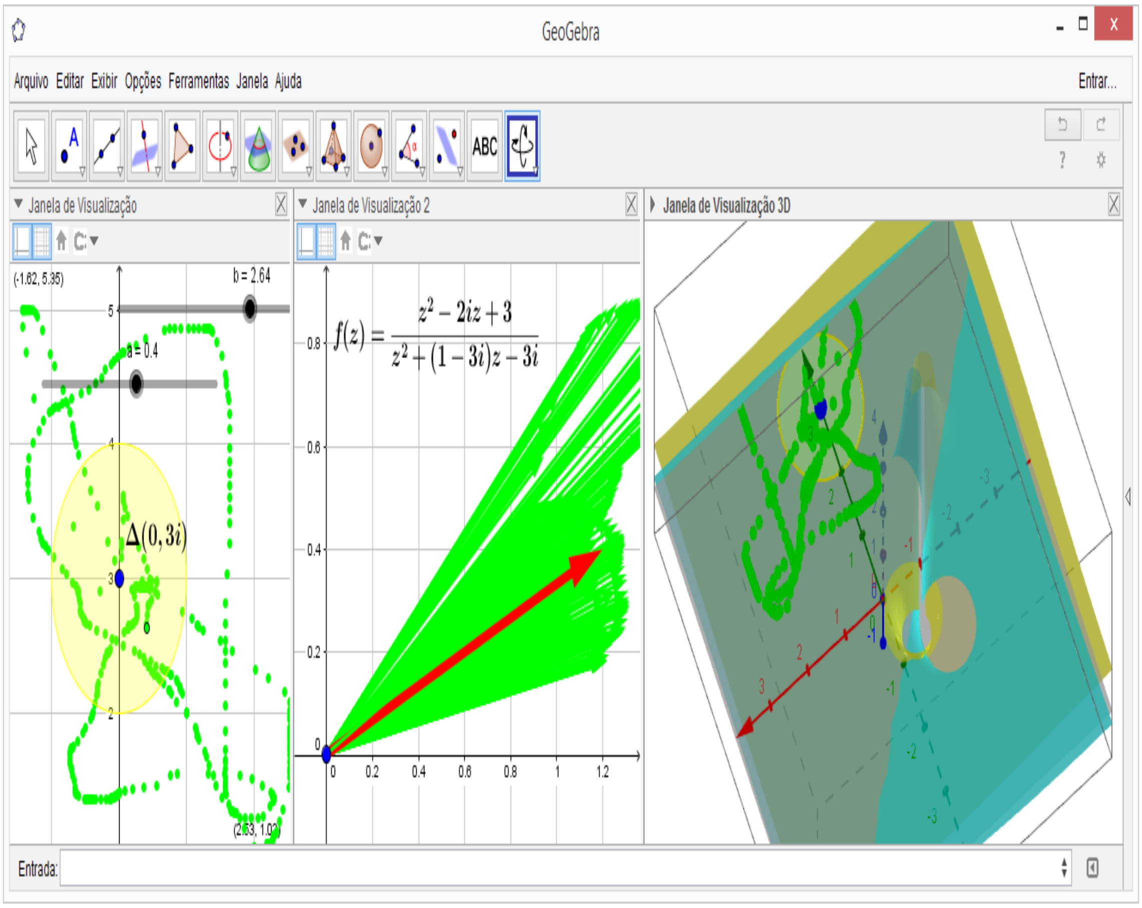

Figura 8. Com o GeoGebra descrevemos a interpretação vetorial e a compreensão do comportamento do limite. Os alunos devem manipular o vetor (na cor vermelha)

Agora, nas figuras 7 e 8, ao lado direito, na janela 3D (ao lado direito), visualizamos/identificamos a presença de "vulcões", "montanhas" ou "picos". Isso indica o comportamento da função $f(z)$, nas vizinhanças do ponto $z=3i$ ou numa vizinhança perfurada do ponto.

Situação de formulação. Desde que, elegemos a visualização como um componente estimulador para um entendimento tácito e intuito do estudante, seguindo as considerações de Needham (2000, p. 192 – 193), podemos considerar a seguinte matriz jacobiana

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{x}(x,y) & \frac{\partial u}{y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{x}(x,y) & \frac{\partial v}{x}(x,y) \end{pmatrix},$$

facto que, caso desconsideremos a tecnologia, pode ser mostrar uma tarefa quase impraticável imposta, também, ao professor (figura 9).

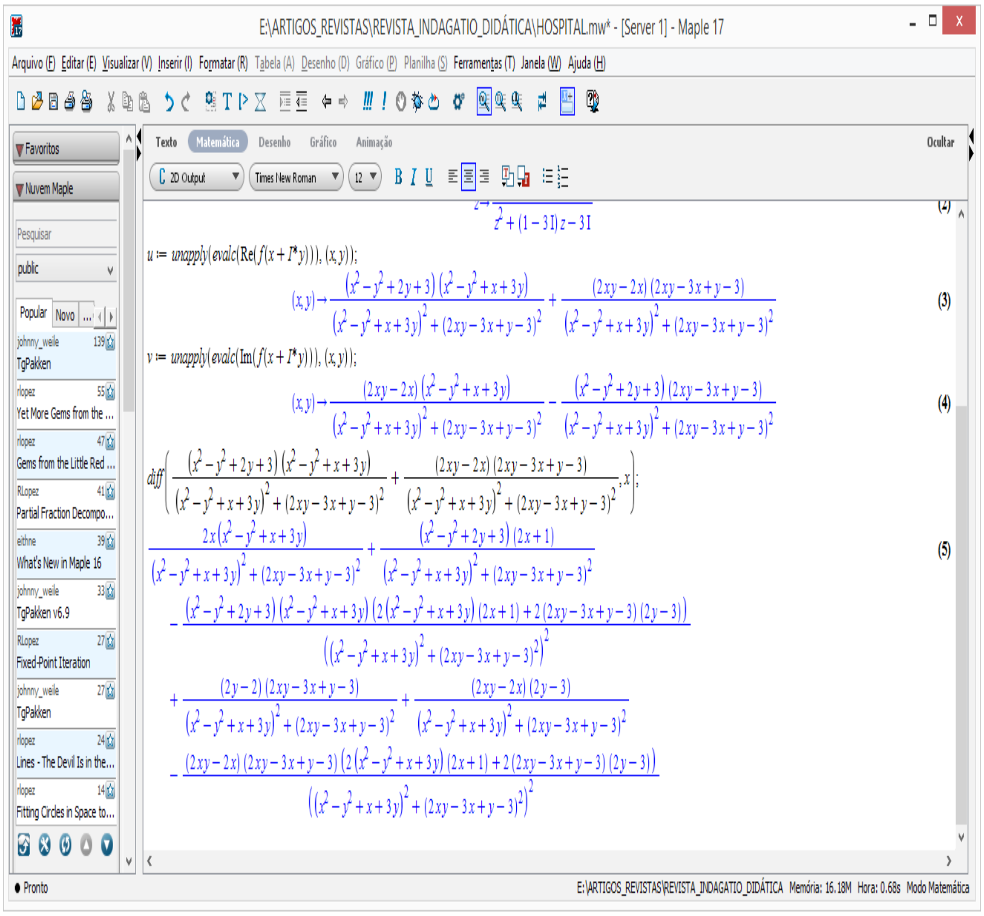

Figura 9. Com o CAS Maple podemos descrever a matriz jacobiana associada a uma grande classe de funções na variável complexa

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

Paraconcluiromomentodeformulação.Podemosacentuarque $f(z)=z^2-2iz+3 \therefore f'(z)=2z-2i$ e, no ponto tomado, escrevemos ainda $f'(3i)=4i=|4i|\cdot e^{i\arg(4i)}$ e, pelo mesmo motivo, vemos ainda $g(z)=z^2+(1-3i)z-3i \therefore g'(z)=2z+(1-3i)z$. Dessa forma, obtivemos $g'(3i)=|1+3i|e^{i\arg(1+3i)}=\sqrt{10}\cdot e^{i\arg(1+3i)}$. E, segundo a formulação prevista por teorema, determinaremos $\frac{f'(3i)}{g'(3i)}=\frac{4\cdot e^{i\arg(4i)}}{\sqrt{10}\cdot e^{i\arg(1+3i)}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\cdot e^{i[\arg(4i)-\arg(1+3i)]}$. Tal igualdade informa aos estudantes que o resultado final, de aplicação da regra, produz um outro vetor, de norma $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ e argumento descrito por $e^{i[\arg(4i)-\arg(1+3i)]}$.

Situação de validação. Enunciaremos o seguinte teorema. Cabe ao professor fazer aderir o mesmo *status* de relevância do teorema enunciado, no caso da variável complexa. Cabe registrar que as modificações notacionais são extremamente económicas e encobrem/escondem uma profusão de modificações.

Teorema: Sejam as funções na variável complexa $f(z), g(z)$ deriváveis no ponto z_0. De modo que se tenha $f(z_0)=g(z_0)=0$, com $g'(z_0)\neq 0+i0$. Então, teremos que $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$. As linhas gerais que validam o que prevê o atual enunciado foi discutido na secção anterior. Ademais, podemos observar que $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Situação de institucionalização. Para concluir, os dados coligidos em ambas as situações didáticas devem proporcionar uma perspectiva que enfatiza o entendimento, por parte do aluno, das relações preservadas, das propriedades válidas no contexto da variável real e inválidas no contexto da variável complexa, bem como, propriedades invariantes no contexto da Transição Complexa do Cálculo.

Por fim, apresentamos um quadro sistemático dos elementos que podem atuar no sentido de promover, fortalecer e estimular um consistente processo de transição dos estudos académicos, quando ocorre a mudança da teoria das funções da variável real para a variável complexa. E, por outro lado, podem ocorrer e/ou se manifestar elementos que fortalecem, impulsionam e facilitam a correspondente transição no estudo da teoria das funções em uma variável real para a variável

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

complexa.

A partir da literatura, nominamos o primeiro grupo de elementos como elementos de ruptura. Enquanto que, o segundo bloco ou grupo é nominado como elementos de transição. Outros exemplos são discutidos em Alves (2013; 2014b; 2014d; 2016a; 2016b).

Elementos de ruptura	**Em relação ao limite**	**Significado do quociente**	**Forma Indeterminada - visualização**	**Comportamento do gráfico da função**
Regra de L`Hôpital na variável real	Aproximação $x \to a$ unidimensional no espaço vetorial IR, $x \to a^-$ ou $x \to a^+$.	$f'(x_0) / g'(x_0)$ o quociente de duas taxas de variação.	As formas $\frac{0^\pm}{0^\pm}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ podem ser visualizadas no plano IR^2.	Existência de alguns "buracos" ou "interrupções no gráfico no plano IR^2. (ver figuras 5 e 6)
Regra de L`Hôpital na variável complexa	Aproximação $x \to a$ no plano □ complexo e não designamos mais uma orientação.	$f'(z_0) / g'(z_0)$ o quociente entre dois vetores	As formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ podem ser visualizadas no plano IR^3.	Existência de alguns "crateras" ou "interrupções no gráfico no espaço IR^3. (ver figuras 7 e 8)
Elementos de transição	**O sistema simbólico notacional**	**Resultado operacional da regra**	**Teorema e hipóteses**	**Comportamento do gráfico da função**
Regra de L`Hôpital na variável real	Argumentações, demonstração e sistema notacional envolvendo a variável real 'x'. Poucas alterações.	Permite se livrar de formas indeterminadas que incorrem em limites na variável real.	O conjunto de hipóteses e resultados previstos pela tese são semelhantes	Existência de alguns "buracos" ou "interrupções no gráfico no plano. (ver figuras 5 e 6)
Regra de L`Hôpital na variável complexa	Argumentações, demonstração e sistema notacional envolvendo a variável real 'x'. Poucas alterações.	Permite se livrar de formas indeterminadas que incorrem em limites na var. complexa	O conjunto de hipóteses e resultados previstos pela tese são semelhantes	Existência de alguns "crateras" ou "interrupções no gráfico no espaço. (ver figuras 7 e 8)

Fonte: Elaboração do autor.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

Conclusões

No Brasil, de modo geral, os estudantes enfrentam, aproximadamente, dois anos ou mais de formação académica compulsória, envolvendo o acúmulo de conhecimento da teoria das funções na variável real e, em seguida, o estudo da teoria das funções na variável complexa. O que constatamos, a partir do relato de alguns dos parcos estudos na área (Bloch, 2006; Bridoux, 2012; Chavez, 2014; Danenhower, 2000), diz respeito ao problema e dificuldades enfrentadas pelos mesmos, num percurso académico que demanda/exige alguns anos de dedicação intensa.

Por outro lado, tendo em vista a exploração da tecnologia atual, exemplificamos situações de aplicação envolvendo o GeoGebra e o CAS Maple. Assim, temos a oportunidade de promover/oportunizar, na condição de uma perspectiva de ensino diferenciada (Artigue, 2013), um cenário de visualização e de aprendizagem capaz de mobilizar um raciocínio inicial do aprendiz que extrapola as inferências lógicas e argumentos formais previstos/designados pelo teorema envolvendo a regra de L´Hôpital, quer seja no caso da variável real, como também no caso da variável complexa.

Antes de concluir, vale assinalar que, a despeito uma apreciação rápida em alguns livros especializados sobre Análise Complexa, podemos verificar que, uma pequena parte dos autores dedica uma posição relativamente privilegiada para a regra de L´Hôpital. Todavia, defendemos que sua ênfase e lugar garantido, no que concerne ao contexto da TCC, pode assumir uma função de elemento de transição (ver tabela 1). Ao passo que a sua ausência ou desconsideração não acentua uma possibilidade de readaptação dos conhecimentos adquiridos pelos estudantes no contexto da teoria das funções na variável real para a variável complexa. Seu caráter de oblívio total, por exemplo, pode ser ainda detectado no caso do estudo das funções em várias variáveis (Alves, 2011), o que se apresenta como algo preocupante.

Na figura abaixo, indicamos de modo resumido, o contexto de surgimento da referida regra, no estudo ao decurso de determinadas disciplinas académicas. No caso da teoria das funções em uma variável real, por exemplo, a justificativa maior do seu emprego reside na possibilidade de permitir que os estudantes se livrem das formas indeterminadas (ver tabela 1). Não obstante, no estudo da teoria das funções em várias variáveis, a noção de formas indeterminadas desaparece, sem nenhuma justificativa maior, por parte dos autores de livros e, na última etapa, a regra de L´Hôpital ressurge, de modo inequívoco, com a função de permitir que os estudanfes se livrem de certas formas indeferminadas cuja natureza não se assemelha mais ao caso real (Needham, 2000), o que exige habilidades específicas por parte dos estudantes.

$$\begin{cases} y = f(x) \\ \text{L'Hospital} \end{cases} \overset{\text{TRANSIÇÃO}}{\Rightarrow} \begin{cases} z = f(x,y) \text{ ou } w=f(x,y,z) \\ \text{Não existe L'Hospital} \end{cases} \overset{\text{TRANSIÇÃO}}{\Rightarrow} \begin{cases} w = f(z) \\ \text{L'Hospital} \end{cases}$$

Figura 8. Quadro sistemático envolvendo a transição da variável real até a variável complexa e a presença da referida regra (elaboração do autor)

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

E, por fim, o uso no âmbito da investigação, da metodologia de pesquisa nomeada Engenharia Didática – ED, numa perspectativa de complementaridade (Arslan & Laborde, 2003; Bloch, 2006; Bridoux, 2012) envolvendo a Teoria das Situações Didática – TSD, poderá afetar os fenómenos de mediação e transposição didática (Chevallard, 1991) dos conteúdos de Análise Complexa e, de modo particular, numa mediação envolvendo a regra de L`Hôpital. Dessa forma, todo o aparato conceitual previsto e apresentado aqui, inserido nas suas fases iniciais, detém o potencial de uma verificação e experimentação empírica, em sala de aula, que entretanto, envolve objetivos de investigação (Artigue, 1984; 1990; 2003) a serem cumpridos num percurso razoavelmente demorado, no âmbito do TCC.

Referências

Almouloud, Ag Saddo. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Almouloud, Ag Saddo. & Coutinho, Cileda, Q. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 3(6), 62 – 77.

Alves, Francisco. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis* (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará – UFC, Brasil.

Alves, Francisco. R. V. (2012). INSIGHT: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. *Revista VYDIA Educação, 32(2)*, 149 – 148.

Alves, Francisco. R. V. (2013). Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of GeoGebra and the CAS Maple. *Acta Didactica Naposcencia. 6(4)*.

Alves, Francisco. R. V. (2014a). Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 7(3)*, 148 – 168.

Alves, Francisco. R. V. (2014b). Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – CT^2M . EM TEIA: *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 5(2)*, 1 – 9.

Alves, Francisco. R. V. (2014c). Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 3(2)*.

Alves, Francisco. R. V. (2014d). Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania. 4(1)*, 1 – 10.

Alves, Francisco. R. V. (2015). Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. *Revista Sinergia - IFSP, 16(1)*, 65 – 76.

Alves, Francisco. R. V. (2016a). Engenharia Didática: Implicações para a pesquisa no âmbito do ensino em Análise Complexa (AC). *Revista Ciência & Natura, 38(2)*, 698 – 715.

Alves, Francisco. R. V. (2016b). Transição Complexa do Cálculo (TCC): Engenharia Didática para as noções de sequências, séries e séries de potências. *Educação Matemática em Revista – RS. 1(17)*, 1 – 26.

Alves, Francisco. R. V. & Borges Neto, H. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa, 13(3)*, 598 – 625.

Alves, Francisco. R. V; Borges Neto, H. & Alves Dias, M. (2012). Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, 5(1)*.

Arslan, S. & Laborde, C. (2003). Un outil favorisant l'interaction entre cadres: CABRI Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. Lagrange J.B. & al. (eds). *Recherche Didactiques de Mathematiques*. Jun 2003, Reims, France, 1 – 10.

Arslan, S. (2005). *L´approche qualitative des équations differentielles en classe terminal´s: est-elle viable? Quels sont les enjeux et les consequences?* (these en didactiques de mathématiques). Grenoble: Université Josephe Fourier, Grenoble, França.

Artigue, M. (1984). Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques.. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques, 8(1)*, 1 – 38.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques, 10(2)*, 241 – 286.

Artigue, M. Michèle. (1995). Ingénierie didactique. BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris: Délachaux et Niestle, 243-263.

Artigue, M. (2003). Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de La Asociación Venezolana, 10(2)*, 117-134.

Artigue, M. (2009). Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (eds). NORMA08, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark, 7 – 16.

Artigue, M. (2012). L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 3(3)*, 1 – 18.

Artigue, M. (2013). L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 4(1)*, 1 – 15.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la Theorie des Situations a la didactique des Mathematiques dans l´enseignement secondaire et superieure*. (habilitation de recherché). Aquitaine: IUFM. Grenoble, França.

Bottazzini, U. (1986). *The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.

Bottazzini, U. & Gray, Jeremy. (2013). *Hidden Harmony - Geometric Fantasies: the rise of Complex Functions Theory*, New York: Springer.

Braden, Bart. (1985). Picturing Functions of a Complex Variable. *The College Mathematics Journal, 16(1)*, 63-72.

Breda, Ana.; Trocado, A. & Santos, José. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagation Didactica*, *5(1)*, 61 – 83.

Bridoux, S. (2012). *Enseignement des premieres notions de topologie à L´Université*. (thése de doctorat). Paris: Paris VII, França.

Brousseau, G. (1986a). Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33 – 115.

Brousseau, G. (1986b). *Théorisation des phénomènes d´enseignement des Mathématiques* (these de doctorat). Bourdeaux: Université Bourdeaux I, França.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q*. Montréal., 1988, 14-24.

Brousseau, G. (1994). *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage, 5 – 66.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.) (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160.

Brousseau, G. L´Émergence d'une science de la Didactique des Mathématiques. *Repères IREM, 55(1)*, 19-34, 2004.

Brum, Wanderley, P. & Schuhmacher, E. A (2013). Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matematica, 6(2)*, 60 – 84.

Cartin, Henri. (1995). *Théorie elementaires des fonctions analytiques d´une ou plusieurs variables*. Paris: Hermann editeurs des scinces et des arts.

Cecília, S. F. & Bernadez, N. C. (2008). *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM.

Chavez, E. (2014). *Teaching Complex Numbers in High School*. (dissertation in Natural Sciences). Louisiana: Louisiana State University. EUA.

Chevallard. Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition.

Choquet, G. (1963). *What is Modern Mathematics?* England: Educational Explorers Limited.

Cecília, S. F. & Bernadez, N. C. (2008). *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM.

Conway, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable*. Second Edition. New York: Springer Verlag.

Danenhower, P. (2000). *Teaching and Learning Complex Analysis in at two British Columbia Universities*. (doctoral thesis). Montreal: Simon Fraser University. Canadá.

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

Douady, Régine. (1995a). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7.

Douady, Régine. (1995b). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 61 – 97.

Douady, Régine. (2008). Géométrie, graphiques, fonctions au collège. Revista Electrónica de investigación en educación e ciencias, *1(1)*, 1-7.

Gray, Jeremy. (2015). *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, New York: Springer.

Krantz, S. G. (1990). *Complex Analysis: the geometric view*. New York: American Mathematical Society.

Krantz, S. G. (2009). *A guide to real variables*. Washington: Washington University.

Krantz, S. G. (2008). *A guide to complex variables*. Washington: Washington University.

Krantz, S. G. (2007). *Complex Variables: a phisical approach with applications and Matlab tutorials*. London: Chapman and Hall/CRC.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, *10(1)*, 97 – 112.

Lebl, Jiri. (2011). *Introduction to Real Analysis*. San Francisco: Springer.

Ledermann, Walter. (1960). *Complex Number*. The Free Press.

Lima, Elon. L. (2010). *Curso de Análise*, v. 1, Rio de Janeiro: SBM.

Lins Neto, Alcides. (1996). *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM.

Little, Charles, H. C.; Teo, Kee, L. & Brunt, Bruce, V. (2015). Real analysis via sequences and series. New York: Springer.

Margolinas, C. & Drijveers, P. (2015). Didactical engineering in France: an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, 47*(1)*, 893–903.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, *27(3)*, 343-360.

Needham, T. (2000). *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Polya, G. & Latta, (1974). G. *Complex Variables*. Nova York: John Willey and Sons.

Robinet, Jacqueline. L Histoire de la convergence uniforme, *Les Cahiers Blancs*. 9*(1)*, 1 – 20, 1984.

Rogalski, Marc. (1990). Enseigner des Méthodes des Mathematiques. *Recherche em Didactiques des Mathématiques, 1(1)*, 1 – 10.

Taschner, Rudolf, (2005). The Continuum: a constructive approach to basic concepts and real

Indagatio Didactica, vol. 8(2), julho 2016 ISSN: 1647-3582

analysis. Viena: Vieweg & Sohn Verlag.

Soares, M. G. (2014). *Cálculo em uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: SBM.

Stahl, Saul. (1999). *Real Analysis: an historical approach*. New York: John Willey and Sons.