Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Estudo da série de Laurent com recurso ao Geogebra: contributo da Engenharia Didática

Laurent series' study with the GeoGebra´s help: contribution of Didactical Engineering

Monique Rafaela Monteiro Marinho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – PGCECM/IFCE

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
Coordenador do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – PGCECM/IFCE

Resumo:

O presente trabalho apresenta os resultados parciais coligidos numa investigação ao nível de mestrado acadêmico em ensino de Ciências e Matemática, desenvolvida no Brasil. Balizado pelos pressupostos da Engenharia Didática - ED e da Teoria das Situações Didáticas – TSD, o trabalho apresenta os dados produzidos por um grupo de três alunos, no contexto do ensino e da aprendizagem da noção de série de Laurent, num curso de licenciatura em Matemática. No Brasil, os estudos acadêmicos envolvendo a teoria das funções na variável complexa indicam obstáculos originados desta teoria e, assim, nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização, o escrito evidencia os conhecimentos mobilizados pelos estudantes, na medida em que, a visualização é assumida como fator catalisador de aprendizagens. Por fim, apresenta os dados produzidos a partir da sua interação com o modelo matemático formal das representações dinâmicas e não estáticas de uma série de Laurent produzida com o auxílio do *software GeoGebra*.

Palavras-chave: Engenharia Didática, Serie de Potências, Série de Laurent, Ensino, Visualização.

Abstract:

This paper presents the partial results collected in an investigation in academic Master's level Education in Science and Mathematics, developed in Brazil. Supported by the assumptions of Didactical Engineering - ED and the Theory of Didactical Situations - TSD, the paper presents the data produced by a group of three students in the context of teaching and learning of the concept of Laurent series in a degree course in Mathematics. In Brazil, academic studies involving theory of functions of the complex variable indicating some obstacles originated in this theory and, therefore, phases of action, formulation, validation and institutionalization, the article evidences the knowledge mobilized by students in that, the preview it is assumed the visualization as an catalyst factor of learning. Finally, it presents data generated from the interaction with the formal mathematical model of dynamic and not static representations of a Laurent´s series produced with the aid of GeoGebra software.

Keywords: Didactical Engineering, Power Series, Laurent´s Series, Teaching, Visualization.

Tecnologias da Informação em Educação

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Resumée:

Cet article présente les résultats partiels recueillis d'une enquête dans le niveau de l'éducation de la maîtrise universitaire en Sciences et en Mathématiques, développé au Brésil. Porté par les hypothèses de l´Ingénierie Didactique - ED et de la Théorie des Situations Didactiques - TSD, le document présente les données produites par un groupe de trois étudiants dans le cadre de l'enseignement et l'apprentissage de la notion de série Laurent dans un cours en Mathématiques. Au Brésil, les études universitaires portant sur la théorie fonctions la variable complexe indiquant quelques obstacles dans cette théorie et, par conséquent, les phases d'action, la formulation, la validation et l'institutionnalisation abordées indiquent connaissances mobilisées par les étudiants en ce que la visualisation est supposé comme un facteur catalyseur de l'apprentissage. Enfin, il présente des données générées par l'interaction avec le modèle mathématique formel des représentations dynamiques et non statique d'une série de Laurent réalisée à l'aide d'un logiciel Geogebra.

Mots-clés: Ingenierie Didactique, Enseignement, Visualisation.

Introdução

Indubitavelmente, o processo matemático de passagem, envolvendo o estudo de funções na variável real para a variável complexa, pode proporcionar uma série de mudanças conceituais, alterações formais e a exigência de habilidades complexas. Não obstante, no Brasil ainda registramos a escassez de trabalhos investigativos empíricos que visem proporcionar a indicação e a proposição de conhecimentos didático-metodológicos sobre o ensino acadêmico para determinadas teorias matemáticas e, dentre elas, a teoria das funções na variável complexa não pode ser desconsiderada ou negligenciada.

Dessa forma, a respeito da existência de uma profusão de trabalhos dedicados ao ensino do Cálculo e da Análise Real no Brasil e no Exterior observamos, num outro contexto, que a teoria das funções na variável complexa ainda não tem recebido a atenção e a dedicação correspondente por parte dos especialistas. Sendo assim, nas secções subsequentes, como resultado parcial de um estudo desenvolvido ao nível de mestrado, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, no Brasil, abordaremos os elementos essenciais de uma Engenharia Didática – ED, com o tema de estudo específico e particular, nominado por série de Laurent.

E, seguindo a tradição da vertente francófona da Didática da Matemática – DM, adotamos a perspectiva de uma mediação afetada pela Teoria das Situações Didáticas – TSD, em caráter de complementaridade (Bessot, 2009; Perrin-Glorian, 2009), a fim de descrever, conceber, estruturar e aplicar situações didáticas sobre o referido assunto, com ênfase na visualização como fator impulsionador de aprendizagem, assumindo como interesse o entendimento intuitivo de propriedades matemáticas essenciais, cujo significado extrapola um quadro de representação formalista. Para tanto, o *software GeoGebra* foi empregado, com o escopo da adoção de uma mediação afetada/modificada, e proporcionou a descrição, na fase de experimentação da ED, das fases dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização previstas pelas TSD.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Vale assinalar a tradição científica desenvolvida, também, no Brasil, envolvendo a adoção de ambas as teorias, isto é, estudos apoiados nos quadros da ED, como metodologia de pesquisa e na TSD, como metodologia de ensino, para referendar a proposição de investigações no âmbito do ensino e da aprendizagem (Almouloud & Silva, 2012; Almouloud & Silva Coutinho, 2008; Margolinas & Drijvers, 2015).

Por fim, os elementos de ordem teórica e empírica que discutiremos, devem concorrer para o entendimento e a compreensão dos fenómemos de ordem didática e metodológica no contexto da Transição Complexa do Cálculo – TCC (Alves, 2016). Logo em seguida, demarcaremos os elementos primordiais para o nosso estudo, ao passo que recorremos aos elementos da vertente conhecida como Didática da Matemática e, por consequência, apresentamos alguns aspectos de nossa proposta de ED.

Didática da Matemática, a Engenharia Didática e o ensino acadêmico

O *design* de investigação conhecido como Engenharia Didática (Douady, 1995a; 1995b) permitiu, dentre outros aspectos, a obtenção de dados científicos visando o aperfeiçoamento do ensino e da aprendizagem de determinado conteúdo ou objeto matemático e adquiriu destaque em meados dos anos 80, com um distinguido período de efervescência entre as décadas de 80 e 90. Com o intento de uma correta demarcação do nosso campo epistêmico de interesse, cabe o entendimento de que esta metodologia de pesquisa, empregada no Brasil e no Exterior (Artigue, 2009; 2012; 2013; Arslan, 2005; Brum & Schuhmacher, 2013; Bridoux, 2012) em vários trabalhos, nos variados níveis de ensino, adquiriu o *status* de teoria no âmbito da Didática da Matemática, pertencente à corrente francesa, envolvendo a mobilização de uma plêiade de estudiosos interessados no aperfeiçoamento dos conhecimentos didáticos sobre o saber matemático, culminando com "trabalhos cumulativos na área" (Margolinas, 1999, p. 10).

Nesse sentido, cabe observar que "a didática não consiste em fornecer um modelo para o ensino, mas produzir um campo de conhecimentos e de questões que permitem colocar em prova qualquer situação de ensino e que permita corrigi-la e melhorá-la [...]" (Brousseau, 1989, p. 16). Com arrimo nas reflexões de Brousseau, constatamos alguns dos interesses da Didática da Matemática. Por outro lado, vemos que, em seu estágio embrionário, a mobilização científica de estudiosos começou ainda nos anos 60, "diante de uma crise social muito forte em torno da Matemática" (Douady, 1995a, p. 3), ainda com forte influência do estilo Bourbaki (Choquet, 1963; Gray, 2015).

Todavia, como todo o processo de organização envolvendo grupos humanos em torno de um determinado saber, sua visibilidade maior ocorreu nos anos 80, mais precisamente a partir de 1977, como indicado por Douady (1995a, p. 4). Brousseau (1994, p. 52) explica tal processo produtivo quando menciona:

> *"A didática da matemática nasceu do interesse mobilizado nos anos 60 relativamente aos meios de melhorar o ensino de Matemática, e do orgulho de encontrar seus meios em estudos científicos apropriados. Como campo científico, ela deve acolher toda sorte de declarações*

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

e prescrições originadas de um enorme campo de disciplinas com a qual possui uma fronteira quase fractal".

Por isso, podemos depreender que a Didática da Matemática possui um terreno epistêmico intimamente condicionado pelo saber matemático. E, por intermédio de um movimento dialético, característico de sua evolução e sistematização, divisamos um *corpus* teórico que parte da Matemática, adquire uma robustez científica e tem capacidade de voltar a se aderir, mais uma vez, à Matemática e, todavia, "não garante uma perspectiva similar aplicacionista em outros campos de saberes científicos" (Margolinas, 2004, p. 4). Com efeito, "a Didática da Matemática se insere num quadro das ciências cognitivas como as ciências de condições específicas na difusão dos conhecimentos matemáticos utilizados no funcionamento das instituições humanas" (Brousseau, 1994, p. 53).

Com atenção semelhante, ainda mais ampla, vemos que Artigue (1990) coloca também em destaque as preocupações epistemológicas conduzidas e apreciadas por vários especialistas, que culminaram por influenciar uma sistemática de investigação, tendo como foco a experimentação de mediações didáticas planejadas e sistematicamente estruturadas.

Dessa forma, sob um apelo metafórico que acentua o planejamento de um engenheiro, que busca planejar, descrever, sistematizar e antever possíveis contratempos num projeto de engenharia, registramos a evolução da Engenharia Didática – ED (Artigue, 2009; 2012. Douady, 1995a; 1995b) como perspectiva que permite a descrição de um percurso e atuação bem mais globalizantes, tendo em vista que, o olhar fundamental da TSD se mostra direcionado aos fenômenos diretamente ou indiretamente extraídos da sala de aula, das relações entre sujeitos, professor e saber ou, melhor dizendo, sobre um "conjunto de situações de ensino primário" (Bloch, 2006, p. 17). Douady (2008, p. 2) proporciona um esclarecimento das características mais abrangentes da ED quando acentua:

"A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula, isto é, a construção, realização, observação e análise de sessões de ensino."

Isso posto, teremos capacidade de determinar o papel da ED, como aporte metodológico de investigação e a TSD como teoria fundante na estruturação, na concepção e planejamento de uma mediação didática intencional. Laborde (1997, p. 99), por exemplo, acentua que "as duas primeiras teorias desenvolvidas na França em Didática da Matemática giraram em torno do binômio situação-sujeito". A autora assinala que seus fundamentos foram declarados nos trabalhos de Brousseau (1986, 1998).

E, do ponto de vista da constituição de uma área científica de investigação, envolvendo as teorias anteriores, bem como outras vertentes de atuação, Laborde (1997, p. 104) indica três grandes categorias de interesse no âmbito dos estudos produzidos na área, sobretudo, no final dos anos 80 para o início dos anos 90, a saber: a dimensão epistemológica, a dimensão cognitiva e a dimensão didática.

A primeira dimensão adquiriu proeminência natural, tendo em vista a vigilância do professor-pesquisador no que concerne aos conteúdos matemáticos de uma sequência de ensino e de que

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

modo poderá atuar/modificar/aperfeiçoar sua transmissão. Os pressupostos de uma ED se mostram intimamente vinculados com um quadro de referências metodológicas e possibilitam a predição/descrição, replicação e a modelização de fenômenos didáticos-metodológicos (Artigue, 1984, p. 6). Nesse sentido, Artigue (1996, p. 265) comenta:

> *"A Engenharia Didática coloca problemas de natureza nova, pois, de um lado, a realização experimental supõe, ela mesma, uma espécie de transmissão em direção aos aprendizes, que devem ser os atores e, por outro lado, como quadro de metodologias externas, não podemos importar facilmente o 'sentido' de reprodução de outros campos científicos específicos".*

Assim, diante das concepções expressas no excerto anterior, buscaremos demarcar a dimensão epistêmica de interesse, relativamenfe à qual conceberemos uma mediação de um conhecimento científico específico e situado.

Transição Complexa do Cálculo - TCC

Na presente seção assinalaremos a dimensão epistemológica do saber matemático envolvido. Ora, como assim prevê Laborde (1997, p. 104), seu entendimento nos servirá como fator de possíveis predições/previsões dos obstáculos epistemológicos e entraves eventuais. Desse modo, deparámos com alguns trabalhos (Alves, 2015; 2014a; 2014b; 2014c; Braden, 1985; Danenhower, 2000; Wegert, 2012) que asseveram que a mudança da variável real para a variável complexa, isto é, a transição indicada por $x = x + i0 \Rightarrow z = x + iy$ proporciona uma série de mudanças, novas demandas de habilidades, exige ainda a readaptação de antigas concepções, bem como, o abandono de outras concepções ou hábitos adquiridos nas etapas de estudo compulsório no locus acadêmico.

Assim, diante da literatura consultada, assinaremos os seguintes elementos vinculados ao nosso campo epistêmico de atenção:

- As características e propriedades topológicas no âmbito da teoria das funções na variável complexa causam modificações e impõem a generalização de várias noções e conceitos, quando comparadas com a teoria das funções na variável real (Bottazzini & Gray, 2013);

- Algumas noções (teoremas) e propriedades matemáticas estudadas no contexto da teoria das funções na variável complexa não possuem uma correspondência anterior, quando nos atemos ao caso da teoria das funções em uma variável real;

- Diante da mudança dimensional, vários objetos conceituais da teoria das funções na variável complexa não são passíveis de representação gráfico-geométrica (Polya & Latta, 1974);

- Diante da mudança dimensional ($2D \Rightarrow 3D \Rightarrow 2D$), vários objetos conceituais da teoria das funções na variável complexa podem ser representados, tão somente, com o amparo computacional (Krantz, 1990; 2007; Needeham, 2000).

Dessa forma, os elementos resumidamente indicados há pouco, juntamente com o relato de algumas investigações que se detiveram no estudo de noções elementares no contexto da

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

variável complexa, se relacionam com o termo cunhado por Alves (2016), que leva em conta que tais alterações devem suscitar novas barreiras, tanto para o ensino, como para a aprendizagem.

Ademais, os elementos assinalados anteriormente podem ser compreendidos, na medida em que Wergert (2012, p. 1) declara:

> *"Representações gráficas de funções pertencem ao rol de instrumentos poderosos em Matemática e suas aplicações. Enquanto que gráficos de funções escalares podem ser retratados facilmente no plano, o gráfico de funções complexas em uma variável é uma superfície num espaço quadridimenssional. Desde que nossa imaginação é treinada em três dimensões, muitos de nós possuem dificuldades em enxergar tal objeto".*

Ora, de modo inequívoco, o autor indica características intrínsecas do sistema representacional da teoria das funções na variável complexa que proporciona entraves ao entendimento tácito e à visualização. Outro obstáculo se mostra comentado por Shokranian (2011, p. 143) quando assinala que:

> *"Na teoria das funções reais, originalmente, a integração foi usada para calcular a área de uma figura geométrica ou o volume de um sólido. Diferentemente, na variável complexa, a teoria da integração é uma ferramenta para estudar funções analíticas, tais como os Teoremas de Cauchy e outros que mostraremos. Por outro lado, uma das aplicações fundamentais das integrais das funções complexas é também o cálculo das integrais definidas de uma variável real [...]"*

O excerto anterior proporciona o entendimento da evolução sistemática de uma teoria matemática e, naturalmente, acréscimo de seu caráter abstracionista, fator que pode desempenhar um papel antagônico ao pensamento intuitivo, heurístico e provisório. Assim, os processos e fenômemos, relacionados com o ensino e a aprendizagem, num período de estudos compulsórios que, no Brasil, podem durar dois anos ou mais, envolvendo o estudo da teoria das funções em uma variável real, em seguida, a teoria das funções em várias variáveis e, por fim, o estudo na variável complexa, foi nominado por Transição Complexa do Cálculo – TCC (Alves, 2014a; 2014b; 2014c; 2014d; 2015; 2016a; 2016b; 2016c; 2016d).

Antes, contudo, de deflagrarmos a secção envolvendo as análises preliminares do presente estudo, apontaremos alguns traços fundamentais vinculados aos pressupostos assumidos da metodologia de ensino que afetou todas as escollhas e o desenvolvimento da mediação, bem como das relações e significados emergentes da relação do trinômio professor – saber matemático – estudantes. Dessa forma, assinalaremos alguns aspectos da Teoria das Situações Didáticas – TSD.

Teoria das Situações Didáticas

En passant, mencionamos na seção introdutória uma tradição registrada da vertente da Didática da Matemática, envolvendo o uso, em caráter de complementaridade, de um repertório variado de teorias e modelos científicos, tendo como o escopo um entendimento sistemático dos fenômenos de ensino e da aprendizagem. Neste âmbito de estudos teóricos, acentuamos o acúmulo de

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

conhecimentos científicos originados a partir do uso da ED e da TSD (Artigue, 1984; Brousseau, 1988a; 1988b; 1994; Brousseau & Cristol, 2000; Margolinas, 2004; Robert, 1983; 1986; Robinet, 1992; Vergnaud, 1981).

Brousseau (1986, p. 144) menciona que o Matemático não comunica seus resultados sob a forma que ele os encontra; ele os organiza, "ele os fornece uma forma mais geral possível, ele desenvolve uma didática prática que consiste em colocar o saber sobre forma comunicável, descontextualizada, despersonalizada e destemporalizada". Entretanto, no âmbito do ensino, deparamos um caráter antagonista (Margolinas, 1995, p. 343) ao fato indicado no excerto anterior. Com efeito, na frente do ensino, registramos um trabalho no sentido inverso, posto que o professor deverá recontextualizar e repersonalizar o saber científico, isto é, realizar uma transposição didática (Chevallard, 1991).

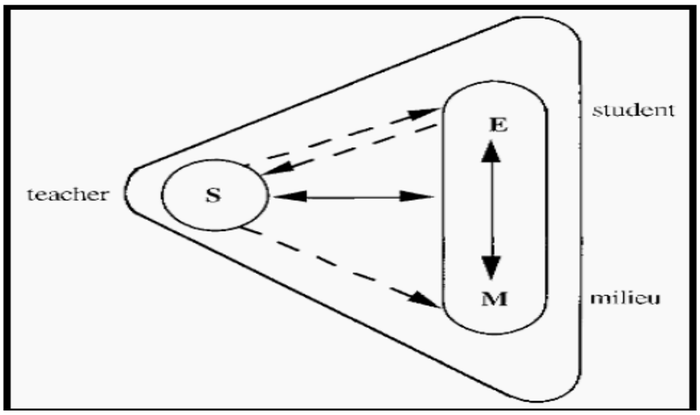

Figura 1. Brousseau (2002, p. 106) indica os elementos principais em torno do ensino e aprendizagem em Matemática

O movimento dialético anterior concorreu como inspiração para a formulação da Teoria das Situações Didáticas – TSD, tendo em vista um pensamento sistemático, crítico e reflexivo que permita compreendermos um amplo repertório de fenômenos relacionados com o ensino de Matemática. Na figura 1, divisamos uma iconografia recorrente nos escritos de Brousseau, na medida em que apresenta os pressupostos da TSD. Dessa forma, com origem nas fenômenos e elementos produzidos a partir da interação acima, Brousseau distingue/diferencia determinados momentos característicos da ação investigativa dos estudantes, instigada e orientada pelo professor.

> *"Desde que o aluno não vislumbra uma possibilidade de prever a solução e, assim, imagina um meio para tal previsão, o professor não consegue fazê-lo compreender que o mesmo propôs um problema, aonde, existe algo para compreender e aprender. A situação, pois, se apresenta como uma situação de ação, na qual a estratégia de base é a resposta ao acaso" (Brousseau, 1988b, p. 327).*

No trecho anterior divisamos uma ação preliminar de um grupo de estudantes que assumem a responsabilidade de resolução de um problema. Logo em seguida, no segundo momento, poderemos identificar que:

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

> *"[...]o estudante encontra casos intermédiários, aonde a convicção não se mostra evidenciada; mas, aonde todas as respostas não se mostram igualmente plausíveis. Eles entram, então, numa nova posição (do sujeito cognitivo), mais reflexivos do que a situação precedente, desde que suas respostas podem ser objeto, de sua parte, de uma apreciação do cálculo ou do raciocínio. A formulação de questões varia, todavia, preserva sempre as características de um diálogo corrente [...] (Brousseau, 1988b, p. 329).*

Assim, num segundo momento, os instrumentos conceituais mobilizados pelo grupo ou pelo estudante se mostram relativamente visíveis, comunicáveis. A partir daí, caso seja verificado a efetivação de uma estratégia, ainda assim, Brousseau menciona que "o estudante não antecipa os significados dos êxitos; o fato de ter realizado um raciocínio e de buscar uma solução não prova que o raciocínio é bom, mesmo que se mostre efetivamente correto. (Brosseau, 1988b, p. 329).

Por fim, no momento que aproxima a finalização da atividade de investigação ou resolução de uma tarefa, o autor acentua:

> *"Nesse momento, o professor declara que se trata: para que cada um aprenda a responder e estar seguro de sua resposta ou do saber que não consegue ficar seguro; para a classe determinar, sem que seja o que o professor ensina, e indica o método que pode ser aplicado; que cada uma aprenda reiterando as tentativas, aproveitando as ideias dos outros e se forem adequadas [...]" (Brousseau, 1988b, p. 330).*

Os pequenos fragmentos anteriores demarcam momentos distintos da ação dos estudantes num contexto de resolução de problemas. Dessa forma, para as relações do estudante (ou dos estudantes) com essa diversidade de possibilidade de utilização do saber matemático e abordagem do professor, Brousseau desenvolveu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem em Matemática, a saber: (i) Situação de ação: um determinado contexto de aprendizagem é uma situação de ação quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações tácitas e imediatas, que resultam na produção de um conhecimento específico, primariamente de natureza operacional; (ii) Situação de formulação: o aluno já dispõe de alguns modelos científicos mobilizados ou esquemas teóricos definidos, todavia, a verdade ou justificativa dos significados mobilizados não se evidencia; (iii) Situação de validação: o aluno emprega mecanismos explícitos de prova e demonstração, o caráter da verdade e eliminação de possíveis incoerências e incongruências dos argumentos empregados se mostra evidente; (iv) Situação de institucionalização: momentos que visam o caráter de universalidade, impessoalidade e incorporação do conhecimento discutido pelo grupo. O saber deve adquirir o status de constituidor do patrimônio de saberes matemáticos incorporado por cada aluno e imprescindível para o progresso científico.

Para concluir, recordamos que Brousseau fornece a indicação de elementos essenciais à *práxis* do professor, ao mencionar que é necessário "poder comparar, não apenas os resultados, mas também as condições nas quais eles foram obtidos e de modo que tais condições sejam reprodutíveis." (Brousseau, 1986, p. 3). Outrossim, o pesquisador esclarece a possibilidade de "reprodução" ou replicação no ensino de Matemática, quando acrescenta ainda que:

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

> *"Esta reprodutibilidade implica uma descrição, não ingênua, de todas as condições observadas, mas seletivas e que repousam sobre uma escolha pertinentes às variações possíveis de efeitos reconhecidos. A reprodutibilidade repousa, então, na compreensão dos fenômenos fundamentais, isto é, do tecido de relações atestadas, constituindo a teoria e permitindo se escolher as condições de ensino, de explicar seus efeitos e de prevê-los". (Brousseau, 1986, p. 3).*

Desse modo, a partir da perspectiva de Brousseau e o amparo científico proporcionado pela ED, aliada à metodologia de ensino TSD, defendemos que a descrição das situações é passível de aplicação, previsão e predição, numa eventual experimentação (LABORDE, 1997, p. 100). Enfim, as características anteriores deverão balizar e afetar nossa perspectiva de análise dos significados produzidos pelos estudantes no contexto do ensino de Análise Complexa, apoiada pela exploração de um software. Assim, apresentamos uma síntese das ações da fase inicial de nossa ED.

Análises preliminares

De modo sistemático, conforme Artigue (1995a, p. 249-250), nesta etapa consideramos: uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino (indicado na seção anterior); análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; exame das conceções e conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados) e seus efeitos. Todos estes elementos têm em consideração os objetivos desta investigação já apontados.

Cabe acentuarmos que, tendo em vista os limites de nossa discussão e pelo fato de que o trabalho atual representa os dados parciais de uma pesquisa ao nível de mestrado (Marinho, 2016) desenvolvida no Brasil, os dados correspondentes ao estudo e apreciação de livros didáticos e compêndios especializados não será objeto de apresentação nos parágrafos subsequentes.

Vale observar que a nossa análise epistemológica ficou restrita ao exame da abordagem do Teorema de Laurent, em alguns compêndios (Cecília & Bernárdez, 2015; Soares, 2014; Lins Neto, 2012) adotados no Brasil. Dessa forma, enunciaremos o teorema que fornece a validez das inferências empregadas ao longo do trabalho.

Teorema: Seja $f: A(z_0;\rho_1;\rho_2) \to C$ uma função analítica, onde

$0 \le \rho_1 < \rho_2 \le +\infty$. Então, existem séries de potências $S_1(w) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j w^j$ e $S_2(w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j w^j$,

com raios de convergência $r_1 \ge \dfrac{1}{\rho_1}, r_2 \ge \rho_2$, respectivamente, tais que

$f(z) = S_1\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right) + S_2(z - z_0)$, para todo $z \in A(z_0;\rho_1;\rho_2)$. Por outras palavras,

a função f é representada numa região anelar $\gamma_r(\theta)$, do plano complexo, pela série

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

de Laurent: $f(z)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(z-z_0)^j$, onde o termo $a_j=b_{-j},j<0$ e para todo inteiro

$j\in Z$, temos $a_j=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{j+1}}$, com $\gamma_r(\theta)=z_0+re^{i\theta},\rho_1<r<\rho_2$. (Lins Neto, 2012, p. 212).

Comentários: No Brasil, o enunciado que indicamos acima foi extraído do livro Lins Neto (2012) que, de modo padrão, é empregado no contexto do bacharelado em Matemática. Assim, determinados aspectos ultrapassam o interesse de um curso de licenciatura em Matemática, ambiente de nossa investigação. Assim, dando prosseguimento, apresentaremos apenas alguns argumentos que permitem sua verificação.

Demonstração: De modo geral, o enunciado anterior pode ser verificado na origem,

isto é, $z_0=0$ e tomar a região anelar $z\in A(0;\rho_1;\rho_2)$. Por intermédio de determinadas

propriedades das integrais de Cauchy, Lins Neto (2012, p, 212) comenta que as

integrais do tipo $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{j+1}}$, que definem os coeficientes $a_j=b_{-j},j<0$, não

dependem das características da região anelar, ou seja, do raio considerado em

$\rho_1<r<\rho_2$. Dois elementos atuam como pré-requisitos e não serão detalhados aqui e

que dizem respeito aos fatos: (i) Para todo inteiro $j\in Z$, a forma diferenciável

$\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{j+1}}$ é fechada na região $A(0;\rho_1;\rho_2)$ e, por fim, (ii) Dois círculos contidos na

região $A(0;\rho_1;\rho_2)$, com centro na origem, são livremente homotópicos na mesma.

A demonstração do teorema anterior, consoante o livro ou o autor, pode apresentar um expediente e emprego de argumentos mais complexos ou, diferentemente, menos elaborados. Em todo caso, a discussão de sua demonstração não será objeto de atenção ao decurso da pesquisa.

Almouloud (2007, p. 172) aponta de modo mais pragmático as seguintes etapas da ED: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. Cabe observar que o item (i) foi constituído de uma apreciação dos livros envolvendo a abordagem do teorema 1. Assim, afetados pela perspectiva de Douady (1985), podemos avaliar e constatar que

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

os autores buscam envidar esforços no sentido de proporcionar um trato analítico procedural e a correspondente interpretação geométrica do assunto.

Isso posto, de modo resumido, depreendemos que o trato analítico-procedural se evidencia como o hegemônico, em detrimento de uma interpretação geométrica das propriedades relacionadas com o teorema. Ou melhor dizendo, no contexto acadêmico no Brasil (e no Exterior) (Artigue, 2003), identificamos um ritual de ensino que torna o processo de algoritmização e emprego de um sistema simbólico intrincado para a resolução de tarefas, em detrimento do seu significado gráfico-geométrico. Por conseguinte, envidaremos esforços no sentido de confrontar os elementos de ordem formal, originados no modelo previsto pelo teorema de Laurent, com os dados originados a partir da visualização e percepção de propriedades qualitativas em torno das situações propostas aos estudantes.

Ademais, como acentuamos nossa fundamentação balizada pela TSD, nas fases iniciais da experimentação (ação, formulação e validação), acentuamos a descrição de significados mobilizados não formais e, por fim, na fase de institucionalização, a ação do professor-pesquisador determinou a formalização final e o confronto dos dados com o modelo matemático e o modelo computacional.

Para concluir, recordamos que Almouloud (2007, p. 173) menciona que os dados coligidos a partir das duas etapas de análises (i) e ii) anteriores auxiliam na definição das questões de pesquisa e da formulação das hipóteses. Assim, diante dos questionamentos anteriores e do objetivo, elencamos as seguintes hipóteses de trabalho: (a) a visualização pode proporcionar alternativas para a abordagem de certos assuntos em AC (de modo particular, para o teorema de Laurent) e evitar um trato eminentemente analítico; (b) a tecnologia permite a produção e mobilização de conhecimentos intuitivos.

Por outro lado, cabe advertir que "o aluno não buscará realizar uma representação a mais complexa possível. Ao contrário, aplica um princípio de economia [...]" (Houdebine, 1991, p. 7). Assim, cabe ao professor, estimular a produção e mobilização de representações adequadas e adiar o princípio da economia para as fases previstas da TSD. Nesse caso, o software permitirá uma descrição diferenciada da abordagem de conteúdos relacionados com o Teorema de Laurent.

Análises *a priori*

De modo *standard*, e como mencionamos e indicamos nas seções anteriores, o componente do estudo epistemológico desempenha papel visceral logo nas etapas iniciais de uma incursão investigativa com amparo na ED. Salientamos que a ED é uma metodologia de pesquisa, e sendo assim, torna-se indispensável o uso de teorias que sirvam para fundamentar nossa investigação e para a leitura/interpretação dos dados possivelmente produzidos pelos estudantes e pelas interações do trinômio alunos – professor – conhecimento matemático.

Ademais, na análise *a priori*, temos o interesse em determinar o controle do "comportamento dos alunos e seu sentido" (Artigue, 1995, p. 258). Vale recordar que Artigue (2008, p. 12-13) descreve as mudanças atuais e a evolução da ED. Dessa forma, a autora evidencia a contribuição e a influência

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

de outras teorias empregadas de modo conjunto com a ED e, em nosso caso, a TSD, o que permitirá um *design* didático privilegiado de apreciação, concepção, descrição e predição das ações dos estudantes reveladas na exploração de uma situação proposta na secção subsequente.

Experimentação e concepção das situações

Assumimos posição concorde com Brousseau (1989, p. 15) quando acentua que "a aprendizagem é uma modificação do conhecimento e que o próprio aluno deve produzi-lo e que o professor deve provocar e seguir um certo raciocínio. Para fazer funcionar um conhecimento apropriado dos alunos, o professor busca uma situação apropriada". Desse modo, tendo em vista responder às questões de investigação e validar ou refutar as hipóteses anteriores, elaboraremos, analisaremos e anteveremos determinados entraves atinentes a um conjunto de duas situações problema e, desse modo, seguimos o itinerário preceituado por Almouloud (2007, p. 174).

Almouloud (2007, p. 174) nos auxilia ao indicar elementos que não podem se mostrar negligenciados e, assim, ao assumirmos uma posição concorde com Almouloud, sublinhamos: o problema envolve vários domínios de conhecimentos (álgebra, geometria e domínio numérico); os conhecimentos dos alunos relativamente ao Cálculo em uma variável real e várias variáveis devem funcionar como pré-requisitos.

Situação problema I: Decidir o comportamento de convergência/divergência da série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cos(nz)$. Ademais, no caso de sua convergência, indicar uma função

analítica $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que poderá ser definida a partir da mesma.

O objetivo desta situação é levar o aluno a contar com a convergência dessa série de potências, e segundo o teorema de Laurent perceber que podemos determinar uma função analítica, em seguida descrevendo suas partes constituintes, ou seja, parte real e imaginária dessa função. Perceber a existência de uma região anelar ou não, e em que podemos contar com a convergência da respectiva série de potência, cuja resolução se dará por Laurent.

Comentários: Espera-se que os alunos conheçam a seguinte formulação

$\cos(nz) = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} = \frac{e^{inz}}{2} + \frac{1}{2e^{inz}}$ e, assim, devem efetuar a decomposição

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\cos(nz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(\frac{e^{inz}}{2} + \frac{1}{2e^{inz}})$. Por outro lado, o comportamento da referida

expressão poderá ser relacionado com o comportamento da série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Situação de ação. Assumimos como pressuposto de que "a constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]" (Brousseau, 1998, p. 117). Assim, de modo preliminar, os alunos demonstram uma ação em situação, na condição de que a situação problema manifeste um sentido e desperte o interesse dos mesmos. Ademais, as representações gráfico-geométricas devem estimular a atividade argumentativa.

O apelo preliminar deverá ser apoiado nas construções dinâmicas que exibimos nas figuras 2 e 3. Com efeito, visualizamos uma faixa (em 2D), na cor amarela. Outrossim, existe um ponto complexo móvel (na cor verde, fig. 1). Por outro lado, ao lado esquerdo, proporcionamos ao estudante, uma apreciação do comportamento numérico da sequência de números reais $x_n = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ e da série correspondente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Assim, ao lado esquerdo, nas figuras 2 e 3, constatamos que o comportamento das contribuições numéricas de $x_n = \frac{1}{2^n}$, para $1 \leq n \leq 20$ tende a decrescer e, no infinito, seu comportamento tende, "aparentemente" a zerar.

Ademais, quando os estudantes considerarem a série de números reais $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, poderão relacioná-la com a série inicial $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nz)$.

Por outro lado, quando realizarem uma exploração do respectivo comportamento, na fronteira (ver figura 2) abaixo ou distante da faixa amarela (em 2D), devem perceber que o vetor resultante (na cor rosa) das reduzidas particulares tomadas nesta construção, tende a aumentar, desordenadamente. Tal comportamento qualitativo deve estimular seu entendimento quando há divergência da correspondente série de potências. (fig. 2)

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

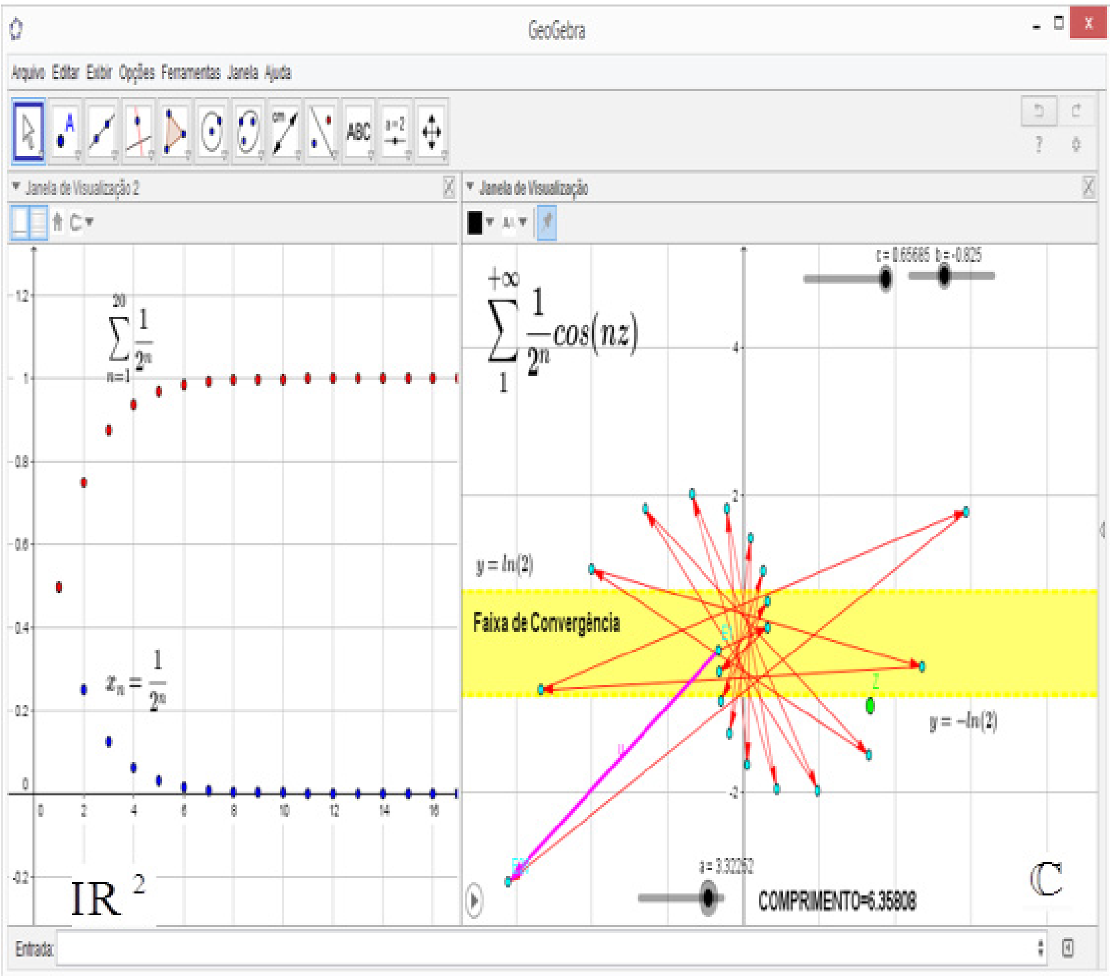

Figura 2. Visualização da região de convergência da série de potências que relaciona variável real e complexa. (elaboração dos autores).

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

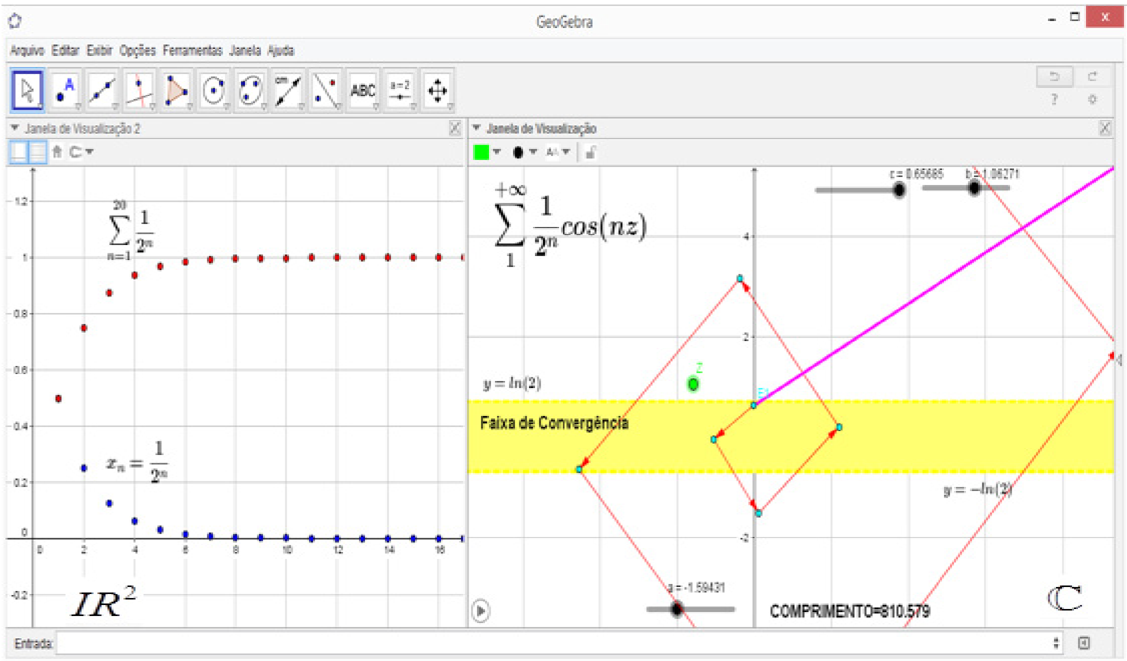

Figura 3. Visualização da região de divergência da série de potências que relaciona variável real e complexa. (elaboração dos autores).

Situação de formulação: Segundo Almouloud (2007, p. 38), uma das características dessa fase reside em "criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas".

Reparemos, assim, que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{e^{inz}}{2}+\frac{1}{2e^{inz}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}e^{inz} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}e^{-inz}$.

Assim, poderão escrever ainda que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(nz) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n$.

A partir dessa constatação, deverão efetuar uma análise individual do comportamento de

cada série de potências. Ora, no tocante ao procedimento de análise da expressão

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right)^n$, quando comparada ao comportamento da série geométrica, devem identificar a condição $\left|\frac{e^{iz}}{2}\right| < 1 \leftrightarrow \frac{\left|e^{i(x+iy)}\right|}{2} < 1 \therefore e^{-y} = \left|e^{-y+ix}\right| < 2$.

Ou seja, determinam a região do plano complexo $e^{-y} < 2 \leftrightarrow y > -\ln(2)$. E, pelo mesmo motivo,

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

no caso da parcela $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right)^n$, os estudantes deverão encontrar que $\left|\frac{e^{-iz}}{2}\right|<1$ e, decorrerá ainda que $e^y < 2 \leftrightarrow y < \ln(2)$.

Situação de validação: Almouloud (2007, p. 39) explica que "é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo de situação) ao julgamento de um interlocutor". Nesse caso, os alunos devem comparar o que indica o Teorema 1 sua vinculação e correlação com a situação problema apresentada. Nesse caso, o grupo de estudantes foi submetido ao ensino formal do Teorema 1 e, dessa forma, devem verificar que a região de convergência não se trata de um anel de convergência, como previsto pelo teorema de Laurent. Dessa forma, prevemos a ocorrência de um debate científico da turma em torno do entendimento dinâmico do processo de convergência/divergência, com arrimo do *software GeoGebra*, bem como o confrontamento dos dados obtidos na situação problema, com o comportamento matemático predito pelo teorema de Laurent.

Situação de institucionalização: Brousseau (1986, p. 342) comenta que "a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]". Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos que determinaram sua aparição.

Por outro lado, a mediação do professor será determinante no sentido de elevar o status de um conhecimento científico fruto de um debate e um processo comparativo e depurativo de informações extraídas no âmbito do modelo computacional e do *corpus* teorico fundante de cada situação. Por outro lado, em nossos trabalhos, temos indicados que os elementos essenciais que devem constituir os saberes científicos a serem incorporados pelo grupo de alunos ao patrimônio coletivo e individual do grupo, admitem raízes no modelo matemático formal, bem como nas propriedades dinâmicas produzidas pelo sistema computacional que se contrapõe ao caráter invariante das teorias formais (ALVES, 2016).

Análise dos dados

Assumimos posição concorde com Brousseau (1989, p. 15) quando acentua que "a aprendizagem é uma modificação do conhecimento e que o próprio aluno deve produzi-lo e que o professor deve provocar e seguir um certo raciocínio. Para fazer funcionar um conhecimento apropriado dos alunos, o professor buscou a exploração da situação I, na fase de ação, a fim de estimular a mobilização de conhecimentos preliminares. Cabe registrar que, nas atividades discutidas ao longo da disciplina nominada introdução à variável complexa, os estudantes entraram em contato apenas com situações que se enquadravam nas condições do Teorema 1. Na figura abaixo registramos os momentos iniciais da ação dos estudantes.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Figura 4. Os alunos 1 e 2 recebem a tarefa do professor (devolução) no sentido de investigar a situação problema I e buscam mobilizar os primeiros conhecimentos atinentes à tarefa demandada (situaçao de ação).

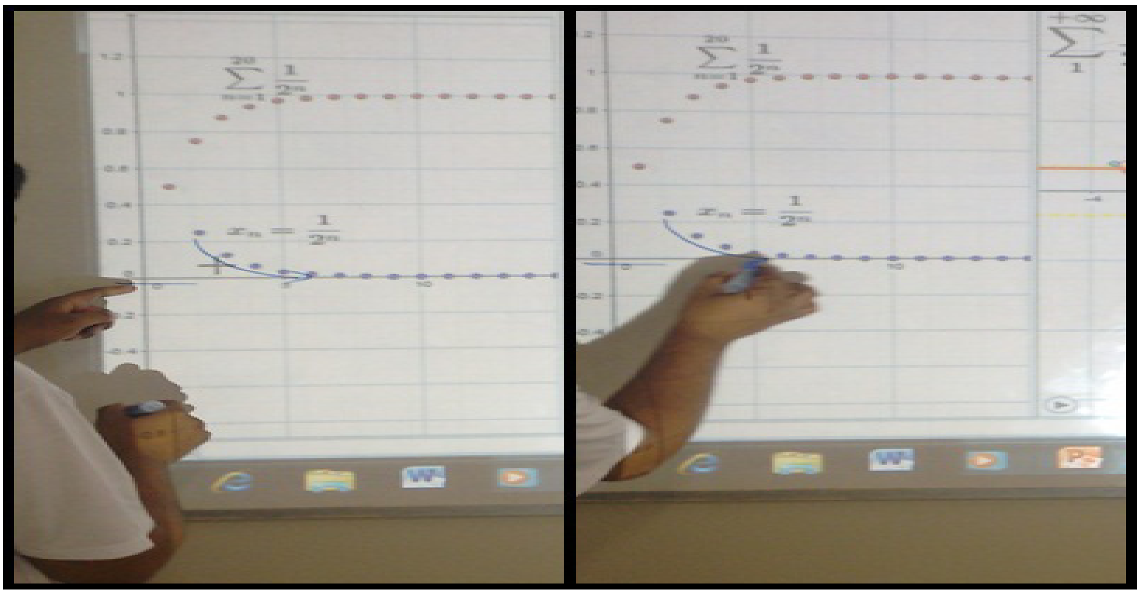

Figura 5. Na fase de ação, os estudantes recorreram aos gráficos gerados pelo GeoGebra e, assim manifestaram concepções dinâmicas sobre o processo de convergência no plano e as representações 2D

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Observe na imagem acima, o contato do aluno 1 com a representação gráfica de uma sequência numérica em 2D. O objetivo consiste em o aluno fazer algumas relações com a série de números reais, na qual envolve a situação trabalhada. Percebam que o estudante, inicialmente, observou o comportamento que a série assumia (lado esquerdo), no momento de seu decrescimento, em seguida para uma melhor representação do processo que está ocorrendo. Ele tentou descrever manualmente, como podemos ver ao lado direito. A seguir trazemos alguns trechos do áudio envolvendo a discussão entre o aluno 1 e o pesquisador.

> *Pesquisadora: Você consegue descrever o que está acontecendo? Quero que você olhe somente para o comportamento da série numérica...*
>
> *Aluno 1: Ah eu estou vendo que ela está decrescendo...*
>
> *Pesquisadora: E isso lhe dar alguma ideia? Tipo algum teorema que possa explicar o fenômeno que está ocorrendo?*
>
> *Aluno 1: Uhum, bem eu vejo que quando essa série estiver no infinito ela praticamente tenderá a zero...*
>
> *Pesquisadora: Isso é uma informação de dúvida, ou você tem uma justificativa convincente para mostrar a veracidade de tal fato?*
>
> *Aluno 1: Uhum, deixe eu ver se consigo me expressar melhor fazendo alguns rabiscos...*

A partir dos dados acima, constatamos: O software GeoGebra estimulou a atividade produtora de conjecturas e argumentações tácitas do aluno 1; A representação gráfico-geométrica permitiu um entendimento dinâmico e não estático da noção de convergência; os elementos são característicos de uma fase de ação do estudante e, o modelo computacional evitou um emprego imediato e precipitado de um conjunto de simbologias particulares ou uma fórmula que permita resolver a tarefa de pronto. Por fim, a busca pela certeza de ilações produzidas envolveu o tratamento de um sistema simbólico notacional particular, como divisamos na última frase do aluno 1, logo acima. Na figura 5, visualizamos uma discussão do grupo, com a participação maior dos alunos 1 e 3. Reparemos que, buscamos explorar o entendimento da noção de convergência para sequências e séries de números reais, tendo em vista a necessidade de passagem, logo mais adiante, para a variável complexa.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

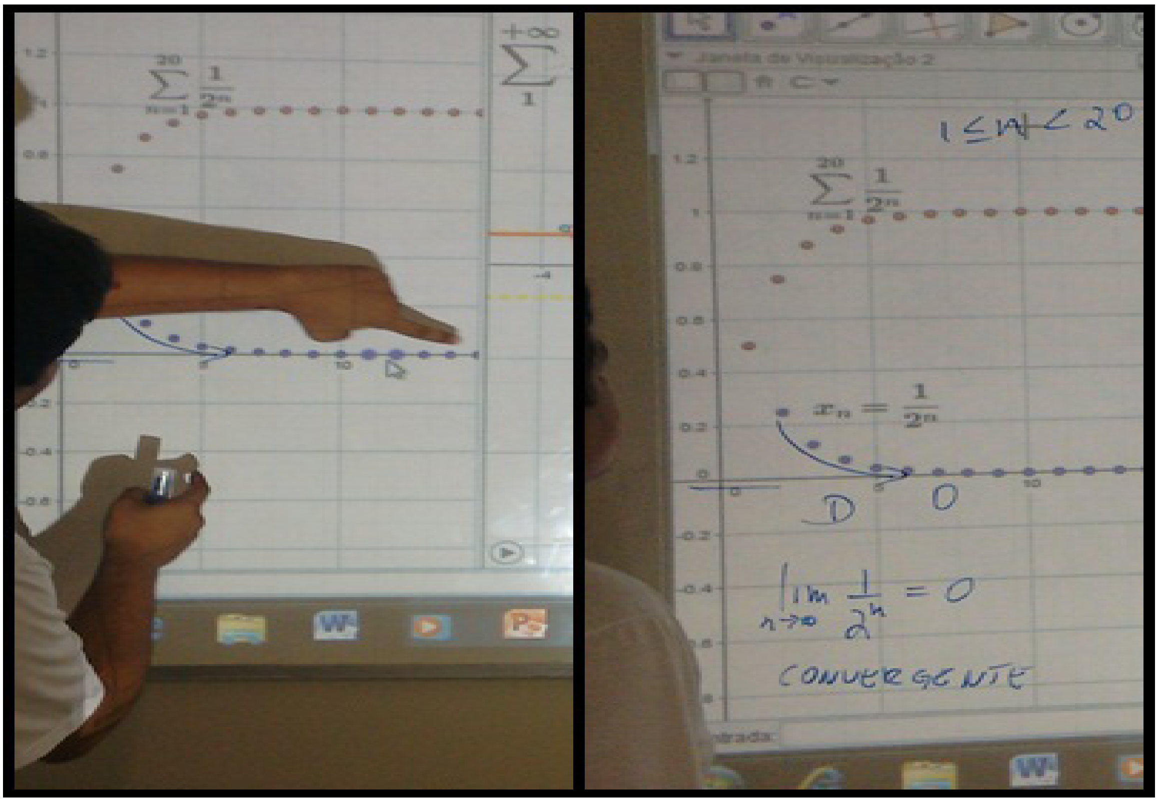

Figura 6. Na fase de ação, o aluno 1 desenvolveu uma atividade de exploração das representações 2D e o entendimento da noção de convergência/divergência.

A seguir transcreveremos o diálogo que caracterizou o momento registrado nas imagens exibidas na figura 6. Ainda na situação de ação, deparamos a exploração preliminar da situação proposta com arrimo indispensável das representações produzidas pelo software. Cabe observar que o aluno 2 teve total liberdade de manipular a construção sugerida pelo professor-pesquisador.

Pesquisador: Então, qual a explicação formal você caracteriza esse momento?

Aluno 1: Ah... professora, agora é fácil ver... Veja o percurso da minha mão, qual o comportamento ela está tomando? Claro né, ela está decrescendo, isso já sabíamos, mas por outro lado vejo que se ela decresce logo no infinito seu comportamento é zero, logo professora eu afirmo que ela converge...

Pesquisador: Como assim converge? Qual explicação você me dá?

Aluno 1: É simples, estudemos um teorema que diz se a série é convergente, logo seu termo geral tende a zero, vamos calcular o limite para verificar que estou certo?

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Pesquisador: Você é capaz de descrever o comportamento dessa sequência numérica?

Aluno 2: Uhum, bem... Eu vejo que quando os valores aumentam a sequência está decrescendo, isso quando chegar ao infinito vai pra zero, eu acho, não tenho certeza, mas a descrição gráfica, está dizendo isso, ou não?...

Pesquisador: Então, você não sabe argumentar formalmente tal processo?

Aluno 2: Pois bem professora, infelizmente eu vejo, mas não me recordo a nada formal que possa auxiliar em tal solução...

Ora, com origem nos trechos da entrevista anterior, assinalaremos os seguintes elementos que podem ser apreciados diretamente nos dados: Os alunos manifestaram uma interpretação dinâmica e não estática das representações relacionadas com a noção de sequências e séries; com o *software GeoGebra*, os alunos correlacionam dados gráfico-geométricos com os dados numéricos originados, ainda, com o software; os alunos não empregaram, de modo precipitado, um sistema notacional simbólico para a solução do problema; os estudantes manifestaram um conhecimento tácito da resolução, todavia, manifestam deficiência na memorização das fórmulas e argumentos mais teóricos.

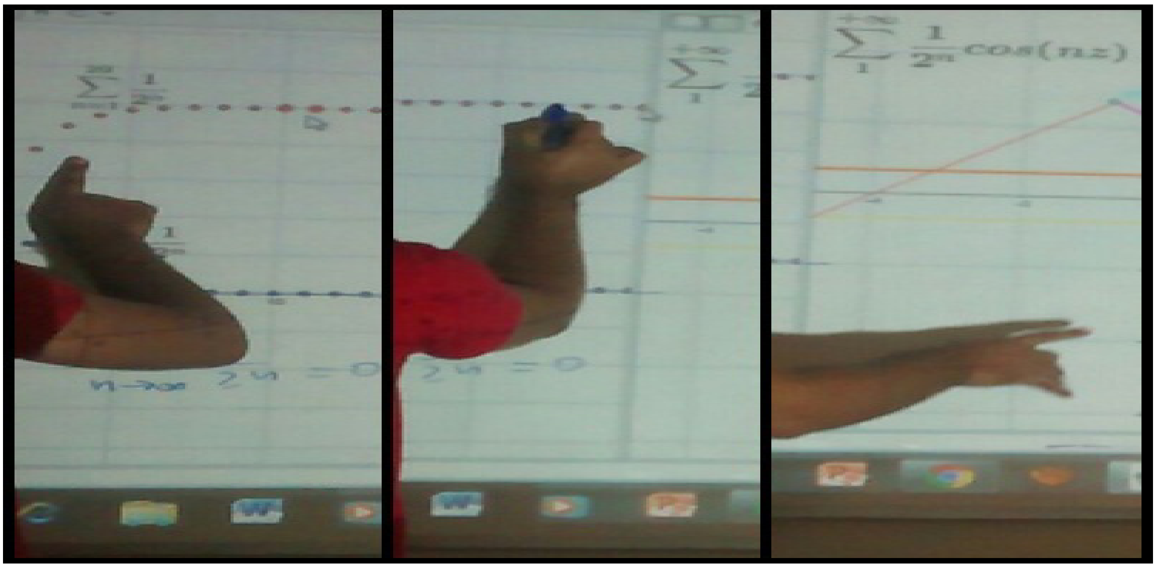

Figura 7. Na fase de ação, o aluno 2 desenvolveu uma atividade de exploração das representações 2D e o entendimento da noção de convergência/divergência no contexto de séries de números reais.

Logo em seguida, na figura 7, divisamos a estratégia implementada pelo aluno 1, afim de discriminar a região de convergência da série de potências proposta na situação problema. Assim, na fase de formulação, com origem nos dados produzidos na fase anterior, o aluno desenvolveu uma análise pormenorizada, a fim de determinar, de decidir ou não sobre o comportamento de convergência ou divergência da série de potências em questão.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

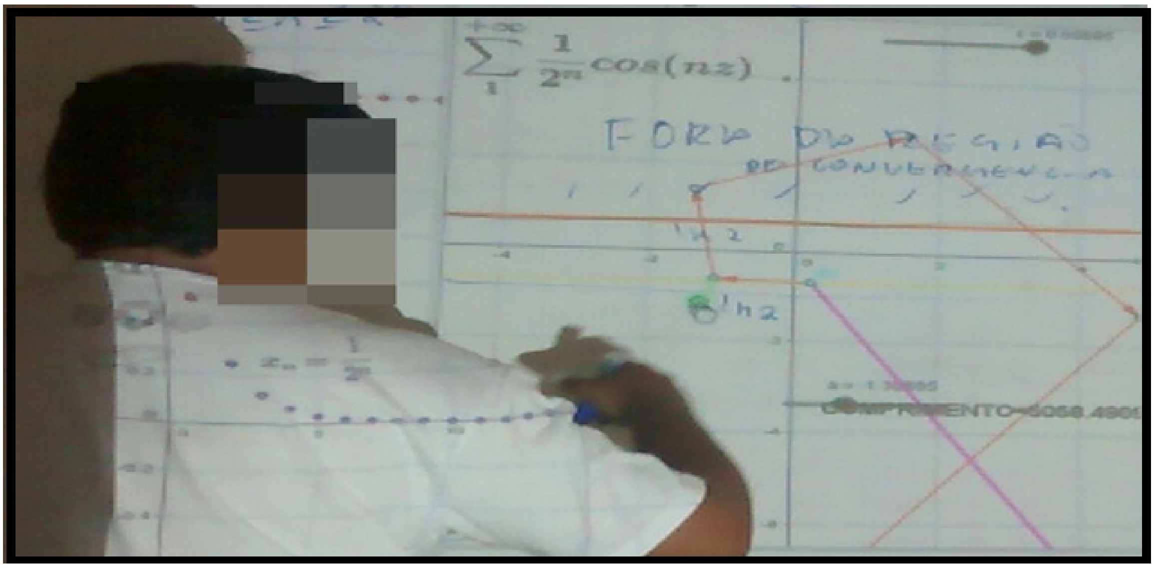

Figura 8. Na fase de formulação, o aluno 1 buscou determinar a região de convergência no plano complexo.

Apresentamos um trecho da entrevista envolvendo as argumentações do aluno 1, na medida em que começa a analisar as representações para a variável complexa.

> *Pesquisadora: Agora vejamos o inspecionamento desse ponto móvel, cujo nosso objetivo agora será encontrar uma única região onde a série correspondente converge. Como você descreve esse momento?*
>
> *Aluno 1: Uhum, bem professora analisando o comportamento desse ponto, vejo que nesse momento há indícios de divergência...*
>
> *Pesquisadora: Mas por quê?*
>
> *Aluno 1: Há é simples, basta olharmos o tamanho do vetor na cor rosa, ele está totalmente descontrolado, logo sugiro sua divergência...*

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Figura 9. Na fase de formulação, o aluno 1 buscou determinar a região de convergência com o auxílio de representações 3D.

Apresentamos um trecho da entrevista envolvendo as argumentações do aluno 1, na medida em que começa a analisar as representações para a variável complexa.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Figura 10. O aluno 1, na fase de formulação, recorreu aos elementos de ordem gráfico-geométrica, produzidos pelo *software GeoGebra*, a fim de compreender o processo dinâmico de convergência e divergência de uma série de potências na variável complexa

Logo abaixo temos alguns questionamentos e dúvidas manifestados pelo aluno 1, seguido de uma atividade argumentativa estimulada/impulsionada pelo software.

Aluno 1: Agora, estou com dúvida...

Pesquisador: Qual?

Aluno 1: Vejo perfeitamente através do GeoGebra, que a convergência se dá nessa região aqui oh, mas por lado, não tenho o anel de Laurent...Uhum alguma coisa está errada, ou nessa

Tecnologias da Informação
em Educação

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

questão tem alguma armadilha... Só não consigo especificar de modo formal por que não obtive o anel...

Pesquisador:

Aluno 3: Olhe, nessas regiões aqui o vetor resultante assume um comportamento bem descontrolado, sugiro sua divergência, mas por outro lado vejo que no centro do plano complexo o vetor tende a se acumular, tornando-se bem pequeno nesse local, logo afirmo que seu processo de convergência se dará exatamente aqui nesse local.

Na sequência, divisamos a ação do aluno 3 na ocasião em que analisou e comparou, de modo concomitante, as representações 2D e 3D, originadas nas representações do GeoGebra. Reparemos que, na ocasião, na fase de formulação da TSD, o aluno 3 buscou determinar, de modo intuitivo e tácito, o comportamento da região de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(nz)$.

O mesmo, como podemos observar no trecho da entrevista, comparou a região e percebeu não se tratar de um anel de convergência, como prediz o Teorema.

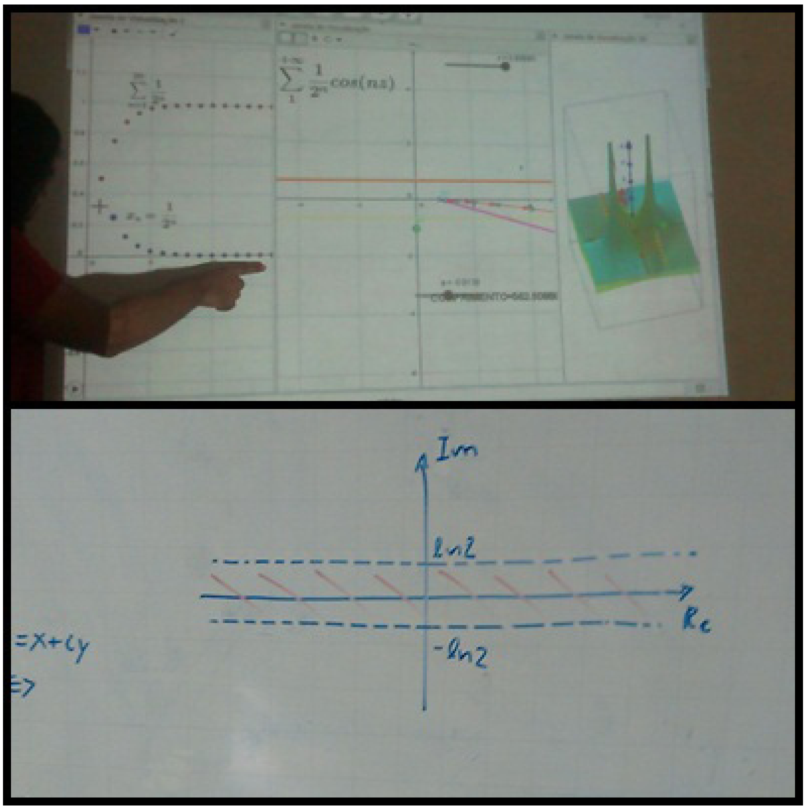

Figura 11. Com o amparo do *software GeoGebra*, na fase de formulação, o aluno 2 buscou descrever e sugeriu um desenho que indicaria a região de convergência de uma série.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

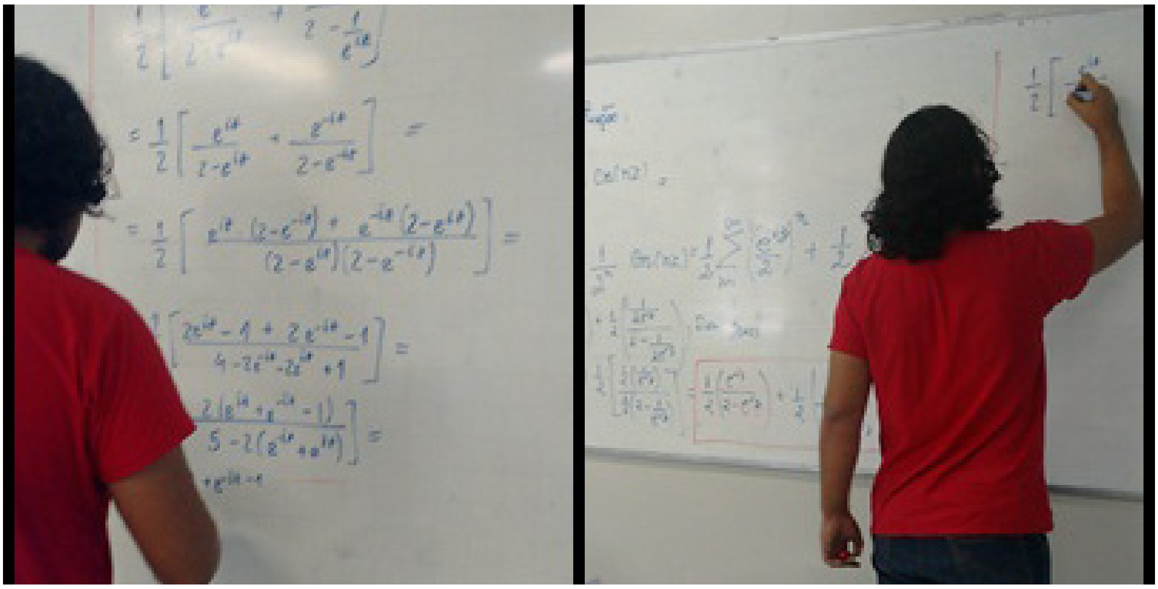

Figura 12. Na fase de formulação e validação, o aluno 3 empregou um conjunto de inferências lógicas a fim de confrontar/confirmar as propriedades destacadas nas fases anteriores da TSD (ação/formulação).

Agora, na fase de validação, o aluno 3 retornou ao modelo computacional a fim de comparar os dados produzidos nas fases de ação e formulação, com a validação e a busca de certeza das ilações produzidas anteriormente. Percebemos tal fato na fase de institucionalização, com o retorno da ação direta do professor-pesquisador.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

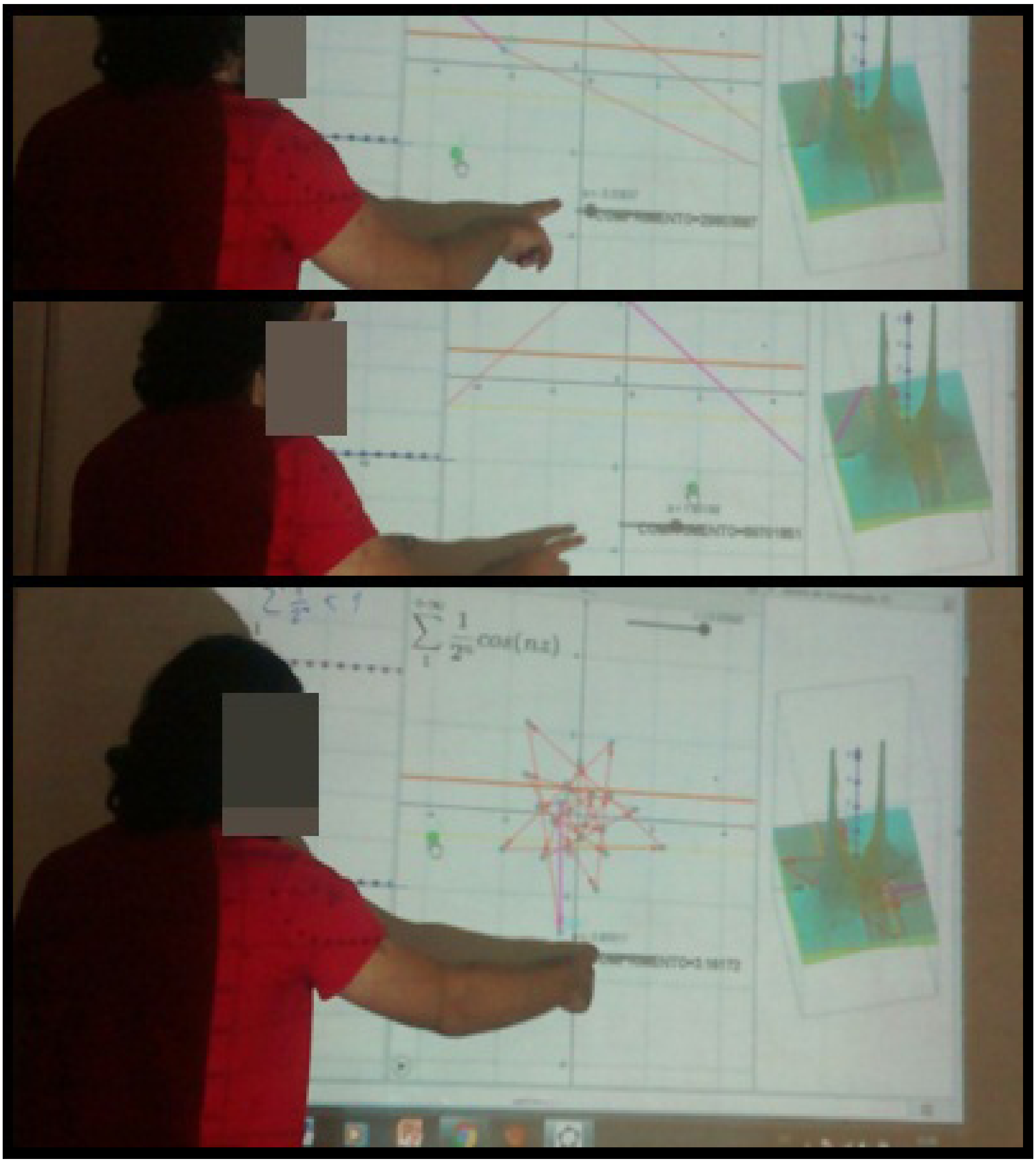

Figura 13. Na fase de validação, o aluno 3 retornou ao modelo computacional a fim de confrontar/comparar os dados a partir da interação do modelo matemático formal com o modelo gráfico-geométrico produzido pelo *software GeoGebra*

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Na fase de validação, o aluno 2 desenvolveu uma série de argumentações formais e previstas pela teoria, com o expediente de questionar as perguntas do professor-pesquisador, com o interesse de confrontar os dados produzidos nas fases de ação/formulação. Na figura 13, ao lado esquerdo, divisamos uma série de ilações formais previstas e referendadas pela teoria formal subjacente.

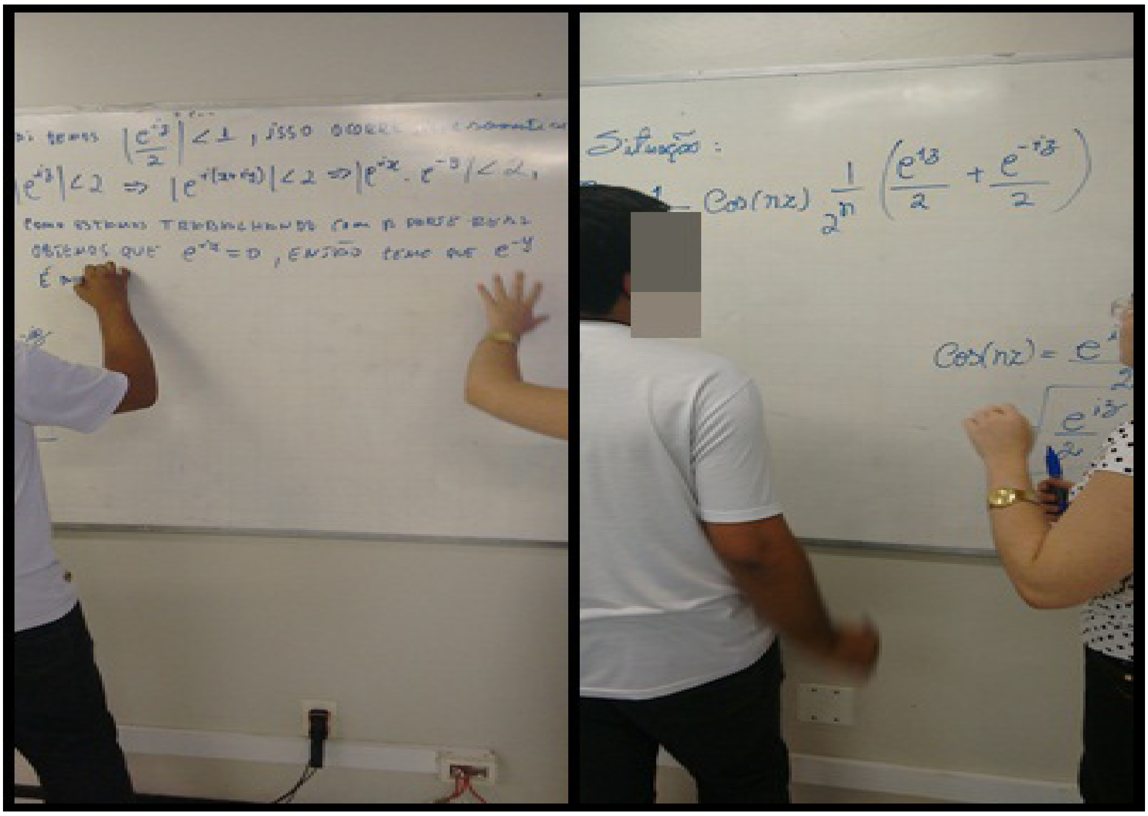

Figura 14. O aluno 2 buscou determinar os elementos formais e estruturantes tendo em vista validar as conjecturas produzidas na seção anterior.

Validação da Engenharia

Almouloud (2007, p. 177) adverte que a análise *a posteriori* não se constitui como uma crônica da classe, todavia, uma análise feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos assumido, das hipóteses de trabalho, de investigação e da problemática da pesquisa. Nossa proposta de ED proporcionou antevermos determinados aspectos, de acordo com os pressupostos que elegemos nas seções anteriores. Outrossim, seguindo os pressupostos da TSD, o confronto final dos dados e ilações formais produzidos pelos estudantes, tendo em vista o trinômio assumido como referência (ver figura 1), com os dados extraídos e apoiados pela visualização, possibilitada pelo software.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Dessa forma, assinalamos que nossas duas hipóteses de investigação foram confirmadas, posto que, os dados produzidos pelos estudantes, com origem nas interações com o *software GeoGebra*, relevam um entendimento tácito e dinâmico dos conceitos de convergência/divergência, tanto no caso das sequências de números reais, como no caso da série de potências na variável complexa. E, o tratamento logico-formal, previsto pelo teorema 1, não se mostrou precipitado na atividade, uma vez que, na mediação clássica do mesmo conhecimento, desconsiderando a tecnologia, apenas o emprego das formulações do teorema é previsto.

Outrossim, a mediação balizada pelo uso da tecnologia evita ou retarda o papel hegemônico do trato analítico-procedural, característico de um ensino acadêmico que costuma evidenciar os elementos formais e estruturantes da teoria das funções na variável complexa.

Conclusões

No Brasil, de modo geral, os estudantes enfrentam, aproximadamente, dois anos ou mais de formação acadêmica compulsória, envolvendo o acumulo de conhecimento da teoria das funções na variável real e, em seguida, o estudo da teoria das funções na variável complexa. O que constatamos, a partir do relato de alguns dos parcos estudos na área (Bloch, 2006; Bridoux, 2012; Chavez, 2014; Danennhower, 2000; Rogalski, 1990), diz respeito aos problemas e dificuldades enfrentadas pelos mesmos, num percurso acadêmico que demanda/exige alguns anos de dedicação intensa.

E, diante disso, a possibilidade da produção de conhecimentos didáticos-metodológicos acerca da mediação de conhecimentos matemáticos ou assuntos específicos, por intermédio de uma teoria sistemática que permita conceber, descrever, estruturar e implementar uma mediação didática que explore um expediente de controle das relações produzidas entre conhecimento – estudantes – professor, se mostra imprescindível diante de um ensino acadêmico detentor de vários anacronismos e obsolescências.

Dessa forma, a descrição das fases dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização, em sua etapa de experimentação, no âmbito de uma proposta de ED, desenvolvida com um grupo de (três) alunos, em um curso de licenciatura em Matemática no Brasil, proporcionou a obtenção de dados distinguidos, por intermédio de uma mediação nitidamente afetada pelo modelo computacional. Dessa forma, com um interesse declarado pelas propriedades de séries de potências e, de modo particular, da série de Laurent, e do teorema correspondente, assinalamos os seguintes elementos:

- O uso do *software Geogebra* permitiu a exploração dinâmica de representações e modificações 2D e 3D, com enfase na noção de convergência/divergência de série de potências.

- Os estudantes manifestaram uma atividade argumentativa, intuitiva e tácita que concorre para o acúmulo e mobilização de saberes que antecedem/retardam, de modo irremediável, a aplicação precipitada de um sistema notacional sincopado e cifrado que não garante o entendimento e apreensão do significado intuitivo das propriedades exploradas na situação proposta.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

- Os estudantes manifestaram concepções dinâmicas e não estáticas sobre propriedades relacionadas com o desenvolvimento de série de potências.

- A fase da institucionalização da TSD envolveu a incorporação, ao patrimônio particular de um grupo de estudantes, de elementos originados na teoria formal estruturante, bem como, elementos impulsionados e significados pelo ambiente computacional, em contraponto do ensino tradicional que evidencia apenas a teoria formal e estrutural.

- Distinguidamente do ensino restrito ao modelo canônico formal, a visualização possuiu um papel catalisador e impulsionador de aprendizagens iniciais e intuitivas, estimulando a produção de conjecturas ao decurso das fases da TSD.

Finalmente, tendo em vista que o objetivo de uma análise *a posteriori* é "relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e, também, a regularidade dos fenômenos didáticos identificados" (Almouloud, 2007, p. 177). Com origem nos dados apresentados e na sistemática de análise desenvolvida até aqui, propugnamos que os elementos apontados detêm o potencial de replicação e apresentam fenômenos didáticos de regularidade, na condição em que a mediação proposta se mostre afetada pelo uso da tecnologia e, de modo particular, pelo emprego do *software GeoGebra* no âmbito acadêmico.

Referências

Almouloud, Ag Saddo. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

Almouloud, Ag Saddo; Silva, Maria. J. F. Engenharia Didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 22 – 52, 2012.

Almouloud, Ag Saddo; Silva Coutinho, C. Q. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(6), 22 – 52, 2008.

Alves, Francisco. R. V. INSIGHT: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. *Revista VYDIA Educação*, 32(2), 149 – 148, 2012.

Alves, Francisco. R. V. Viewing the roots of polynomial functions in complex variable: the use of GeoGebra and the CAS Maple. *Acta Didactica Naposcencia*. 6(4), 2013.

Alves, Francisco. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 7(3), 148 – 168, 2014a.

Alves, Francisco. R. V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – CT^2M . *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 5(2), 1 – 9, 2014b.

Alves, Francisco. R. V. Aplicações no Ensino de Variável Complexa: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 3(2), 2014c.

Alves, Francisco. R. V. Visualizing the behavior of infinite series and complex power series with the GeoGebra. *GeoGebra International Journal of Romania*. 4(1), 1 – 10, 2014d.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Alves, Francisco. R. V. Visualização de Teoremas em Análise Complexa: exemplos no contexto da Transição Complexa do Cálculo TCC. *Revista Sinergia - IFSP*, 16(1), 65 – 76, 2015.

Alves, Francisco. R. V. Transição Complexa do Cálculo – TCC: engenharia didática para as noções de sequências, séries e série de potências. *Educação Matemática em Revista – RS*. 17(1), 83 – 97, 2016a.

Alves, Francisco. R. V. The winning number: an heuristic approach with the GeoGebra´s help. *Acta Didactica Naposcencia*, 9(2), 1 – 12, 2016b.

Alves, Francisco. R. V. GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo (TCC): o caso da regra de L`Hôspital. *Revista Indagatio Didactica*, Minho, 8(2), Julho, 95 – 117, 2016c.

Alves, Francisco. R. V. Engenharia Didática: implicações para o ensino no âmbito da Análise Complexa (AC). *Revista Ciência e Natura*, 38(2), 694 – 715, 2016d.

Artigue, M. Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques.. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques*, 8(1), 1 – 38, 1984.

Artigue, M. Épistémologie et Didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, v. 10, nº 2, 241 – 286, 1990.

Artigue, M. Michèle. Ingénierie didactique. BRUN, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris: Délachaux et Niestle, 243-263, 1995.

Artigue, M. Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? *Boletín de La Asociación Venezolana*, v. X, nº 2, 117-134, 2003.

Artigue, M. Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (eds). NORMA08, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark, 7 – 16, 2009.

Artigue, M. L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 3(3), 1 – 18, 2012.

Artigue, M. L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. *EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(1), 1 – 15, 2013.

Bessot, A. L´ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. in Margolinas et all.(org.): *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1(1), 29-56, 2009

Bloch, I. *Quelques apports de la Theorie des Situations a la didactique des Mathematiques dans l´enseignement secondaire et superieure*. (habilitation de recherché). Aquitaine: IUFM, 2006.

Bottazzini, U. *The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag, 1986.

Bottazzini, U. & Gray, Jeremy. *Hidden Harmony - Geometric Fantasies: the rise of Complex Functions Theory*, New York: Springer, 2013.

Braden, Bart. Picturing Functions of a Complex Variable. *The College Mathematics Journal*, 16(1), 63-72, 1985.

Breda, Ana.; Trocado, A. & Santos, José. O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagation Didactica*, v. 5, nº 1, 61 – 83, 2013.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Bridoux, S. *Enseignement des premieres notions de topologie à L´Université*. (thése de doctorat). Paris: Paris VII, 2012.

Brousseau, G. *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage, 5 – 66, 1994.

Brousseau, G. Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q*. Montréal, 14-24, 1988a.

Brousseau, G. Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309 – 337, 1988b.

Brousseau, G. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33 – 115, 1986.

Brousseau, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.) (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage, 115 – 160, 1998.

Brousseau, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York: Klumer Academic Publishers, 2002.

Brousseau, Guy. & Cristol, Gilles. Les études doctorales de didactique des mathématiques à l'université. *Gazette des mathématiciens*, 85(1), 55-60, 2000.

Brum, Wanderley, P. & Schuhmacher, E. A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matematica*, 6(2), 60 – 84, 2013.

Cecília, S. F. & Bernadez, N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

Chavez, E. Teaching Complex Numbers in High School. (dissertation in Natural Sciences). Louisiana: Louisiana State University. 66f, 2014.

Chevallard. Y. La Transposition Didactique. Paris: La Pensée Sauvage Édition. 1991.

Choquet, G. *What is Modern Mathematics?* England: Educational Explorers Limited, 1963.

Cecília, S. F. & Bernadez, N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

Conway, J. B. *Functions of One Complex Variable*. Second Edition. New York: Springer Verlag, 1978.

Danenhower, P. *Teaching and Learning Complex Analysis in at two British Columbia Universities*. (doctoral thesis). Canadá: Simon Fraser University. 308f, 2000.

Douady, Régine. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez, P. (org.) *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 1 – 7, 1995a.

Douady, Régine. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. Gomez, P. (org.) Ingenieria Didactica en Educación Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, 61 – 97, 1995b.

Douady, Régine. Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Revista Electrónica de investigación en educación e ciencias*. nº 1, 1-7, 2008.

Gray, Jeremy. The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century, New York: Springer, 2015.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Krantz, S. G. *Complex Analysis: the geometric view*. New York: American Mathematical Society, 1990.

Krantz, S. G. *Complex Variables: a phisical approach with applications and Matlab tutorials*. London: Chapman and Hall/CRC, 2007.

Laborde, C. Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, 10(1), 97 – 112, 1997.

Lins Neto, Alcides. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

Margolinas, C. Dévolution et intitutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôles du maître. Comiti, C.; Bessot, M. P. *Didactiques des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, 342 – 347, 1995.

Margolinas, C. *Points de vues de l´élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques* (Habilitation de recherche). Provence: Université de Provence. 2004, 160f.

Marinho, Monique, R. *Categorias intitutivas no ensino de Análise Complexa: o caso da série de Laurent*. Dissertação de Mestrado acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, IFCE, 2016.

Margolinas, C. & Drijvers, P. Didactical Engineering in France ; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*. 47(6), 893 – 903, 2015.

Needham, T. *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Polya, G. & Latta, G. *Complex Variables*. Nova York: John Willey and Sons, 1974.

Perrin-Glorian, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et all.(org.): *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1(1), 57-78, 2009.

Robert, A. Ingénierie didactiques sur les suites après le baccalaureat. *Le Cahiers Blancs. 4* (1), 1-25. 1983.

Robert, A. Didactique dans l´enseignement supérieur: une démarche. *Le Cahiers Blancs. 28* (1), 1-41, 1986.

Robinet, J. Le pouquoi et le comment d´une ingénierie (la convergence uniforme). *Le Cahiers Rouges. 12* (1), 1-26, 1992.

Rogalski, M. Enseigner des Méthodes des Mathematiques. *Recherche em Didactiques des Mathématiques*, 1(1), 1 – 10, 1990.

Soares, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

Shokranian, Salahoddin. *Uma introdução à Variável Complexa*, Sao Paulo: Editora Moderna, 2011.

Vergnaud, G. Quelques orientation théoriques eet methodoloiques des recherches française en Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 2(2), 215 – 231, 1981.

Wergert, Elias. *Visual Complex Functions:* an introduction with the phase portrait. New York: Birkhäuser, 2012.