Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Pensamento Algébrico e Diagramático: Uma experiência de ensino com alunos do 10.º ano

Sara Vaz
Universidade de Lisboa
sara_vaz@live.com.pt

Lúcia Suharman
Universidade de Aveiro
lysuharman@ua.pt

Teresa Neto
Universidade de Aveiro
teresaneto@ua.pt

Resumo:

Neste artigo, apresentamos uma análise de resoluções de alunos do 10.º ano de escolaridade do Ensino Secundário em Portugal, tendo como foco os objetos e processos usados na resolução de tarefas, envolvendo o pensamento algébrico (PA) e diagramático. O estudo adotou uma metodologia qualitativa de natureza exploratória-descritiva.

A análise referida teve lugar num estudo realizado na Universidade de Aveiro, no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário.

Os resultados mostram que os níveis de PA mais trabalhados são o 1 e o 2 e que não é usual os alunos recorrerem ao pensamento diagramático (PD) para responderem às tarefas pedidas.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Pensamento diagramático, Ensino Secundário.

Resumen:

En este artículo, presentamos un análisis de resolución de estudiante al grado 10 de educación secundaria en Portugal, se centra en los objetos y procesos utilizados en la solución de las tareas que implican el pensamiento algebraico y esquemática. El estudio adoptó una metodología cualitativa de tipo exploratorio-descriptivo.

El análisis se llevó a cabo en un estudio realizado en la Universidad de Aveiro, en el marco del Maestro de Enseñanza Práctica supervisada en enseñanza de las matemáticas en el 3er Ciclo de Educación Básica y Media.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Los resultados muestran que los niveles de pensamiento algebraico están más trabajadas 1 y 2 y que no es habitual estudiantes recurren al pensamiento de diagrama para responder a las tareas solicitadas.

Palabras-clave: Pensamiento algebraico, Pensamiento diagramático, Enseñanza secundaria

Abstract:

In this article, we present an analysis of resolutions from students of the 10th grade of secondary education in Portugal, focusing on the objects and procedures used in solving tasks involving algebraic and diagrammatic thinking. The study adopted a qualitative methodology of exploratory-descriptive.

The analysis took place in a study conducted at the University of Aveiro, under "Prática de Ensino Supervisionada" as part of the 3rd Cycle of Basic Schooling and Secondary Schooling Masters Degree.

The results show that algebraic thinking levels more worked are 1 and 2 and is not usual students resort to diagrammatic thinking to respond to the requested tasks.

Keywords: Algebraic thinking, Diagrammatic thinking, High school

Introdução

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007) refere que os programas de ensino devem habilitar os alunos para compreenderem padrões, relações e funções e para usarem corretamente símbolos algébricos na representação e análise de situações e estruturas matemáticas.

Por este motivo, os professores devem criar situações que levem os alunos a desenvolver o seu PA. Assim, são de valorizar tarefas para generalizar situações, estudar padrões e relações numéricas (Godino, J. D., Fernandez, T., Lacasta, E., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Contreras, Á., Áke, L., Dias, C., Oliveras, L., e Lasa, A., 2015a).

No desenvolvimento dessas tarefas, é usual os professores usarem diagramas para facilitar a sua compreensão. Aos processos visuais chama-se objetos ostensivos e são normalmente mais concretos e percetíveis (Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco & Contreras, 2015b).

Ao trabalharem com recurso a diagramas, os alunos relacionam a dimensão geométrica com a algébrica. É essencial recorrer também a objetos não ostensivos (entidades abstratas e mentais) para dar resposta às tarefas propostas. Estes últimos levam à formação de outros processos cognitivos, tais como a generalização, a idealização, o agrupamento de informação, a significação e a representação (Godino et al. 2015b). Para estes investigadores, os objetos ostensivos e não ostensivos devem ser trabalhados simultaneamente de modo a estruturar o raciocínio, já que os primeiros são um suporte para os segundos.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

O texto está organizado por secções, a primeira apresenta a introdução do artigo. Na segunda descreve-se o marco teórico, onde se apresenta os níveis de PA propostos nos modelos de Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray & Lasa (2014) e em que consiste o PD. Iremos também apresentar o problema a analisar e a metodologia. Na secção três ir-se-á apresentar a análise dos dados, bem como alguns exemplos de resoluções dos alunos às 4 tarefas e uma tabela que categoriza estas resoluções, por fim, na secção quatro, será realizada uma síntese do trabalho, apresentando as reflexões finais.

Marco teórico e metodologia

o presente trabalho pretende investigar o pensamento que os alunos utilizam para resolver as tarefas, neste caso, o PA e/ou o PD.

Pensamento Algébrico

O PA tem suscitado o interesse de diversos autores. Para Kaput (2008), implica generalizar regularidades, conduzindo o raciocínio através das generalizações no sistema de símbolos convencional. Ponte (2003; 2005) refere que é a capacidade de trabalhar com expressões algébricas, (in)equações, sistemas e funções, manipulando relações e estruturas matemáticas. Godino e colaboradores (2012; 2014; 2015a) categorizam-no em níveis, sendo que os primeiros quatro são frequentemente encontrados em alunos do ensino básico e os últimos três, em alunos do Ensino Secundário e Superior (Godino et al., 2015a). Este modelo tem em consideração os objetos e processos envolvidos nas resoluções. Assim, entende-se por objetos intensivos os que resultam de processos de generalização e objetos extensivos os resultantes de processos de particularização.

Tabela 1: Níveis de PA identificados por Godino et al. (2012, 2014, 2015a)

Nível	Descrição do nível
0	Resoluções que não incluem características algébricas. Realizam-se operações com objetos particulares, intervêm os objetos extensivos cuja linguagem é natural, numérica, podendo conter imagens. Em tarefas recursivas, relacionar dois termos não significa determinar uma regra.
1	Trabalha-se com as propriedades das estruturas algébricas em $\mathbb{N}$. A igualdade é usada como equivalência de expressões, intervêm objetos intensivos, a linguagem é natural, numérica, simbólica, podendo conter imagens. Em tarefas estruturais, podem ser usados símbolos para representar objetos desconhecidos e são aplicadas relações e propriedades de operações. Em tarefas funcionais, recorre-se ao cálculo com objetos extensivos.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

2	A linguagem é simbólica e literal, mencionando os objetos intensivos relacionados com a informação do contexto espacial ou temporal. As equações são da forma $Ax \pm B = C$, em tarefas estruturais e funcionais reconhece-se a generalização, mas não se opera com as variáveis para obter formas canónicas.
3	Há um trabalho com incógnitas e variáveis, utilizando propriedades estruturais. As expressões sofrem alterações a nível simbólico, preservando a equivalência. Resolvem-se equações do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$. Os objetos intensivos são apresentados de forma simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles.
4	Realiza-se um estudo de uma família de funções ou equações. Trabalha-se com variáveis, incógnitas e parâmetros. Ocorrem operações com variáveis, mas não com parâmetros.
5	Realiza-se um estudo de uma família de funções ou equações. Trabalha-se com variáveis, incógnitas e parâmetros. Ocorrem operações com os parâmetros.
6	Trabalha-se com estruturas algébricas que envolvem os objetos abstratos e com as relações binárias gerais e as suas propriedades. Ocorrem operações com os objetos abstratos que formam partes das estruturas algébricas.

Embora diversos autores considerem que o PA implica fazer generalizações através do sistema de símbolos convencional, não existe uma definição universal porque há uma diversidade de objetos e processos algébricos (Radford, 2006). Para este estudo iremos focar-nos na categorização proposta por Godino e colaboradores (2012; 2014; 2015a).

Pensamento Diagramático

A visualização Matemática é um processo que nos permite revelar dados que não foram mencionados na tarefa, é também

> *"um tipo de atividade do raciocínio, capaz de integrar quatro elementos principais, as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização" (Góes & Soares, 2010, p. 2).*

Godino et al. (2015b) afirmam que, para o ensino e aprendizagem da Matemática, é importante recorrer a processos de visualização para construir o raciocínio, sendo estes complementares aos processos de resolução puramente analíticos e mencionam que os diagramas:

- Têm uma disposição espacial das suas partes e apresentam as propriedades e relações existentes entre os seus elementos.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

- São constituídos por operações conduzidas por regras permitindo-nos chegar a novas conclusões.
- Modelizam situações.
- Têm um carácter genérico.

Estes autores, citando Peirce, referem que um diagrama pode ser também constituído por letras, números e símbolos, como as expressões algébricas.

Para além disso, Radford (2008) refere que o PD é um processo heurístico que exibe alguns aspetos relevantes da tarefa, permitindo-nos descobrir novas relações conceituais.

Problema e Metodologia

Este artigo divulga a investigação realizada por Vaz (2015), que teve como participantes uma turma de 25 alunos do 10.º ano, que frequentavam a disciplina Matemática A, de uma escola em Portugal, e como instrumentos de recolha de dados um teste e uma ficha de trabalho.

Pela impossibilidade de, neste texto, analisar todas as resoluções recolhidas decidiu-se selecionar apenas quatro tarefas da investigação já mencionada, sendo que três delas estão relacionadas com a função quadrática e uma relacionada com a função afim, que promovem a utilização de PA e/ou de PD.

Com o intuito de perceber melhor as dificuldades sentidas pelos alunos do 10.º ano na realização de tarefas de índole algébrica e diagramática, consideramos para tema de investigação o "Pensamento Algébrico e Diagramático: Uma experiência de ensino com alunos do 10.º ano". Assim, o problema de investigação foi formulado da seguinte maneira: de que forma os alunos resolvem as tarefas recorrendo ao PA e/ou PD?

Tendo como propósito investigar este problema, pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

- Quais os níveis de PA mais comuns de alunos que frequentam uma turma do 10.º ano de escolaridade?
- De que modo os alunos utilizam o PD na resolução das tarefas?

Será apresentada uma resolução possível para cada tarefa, os seus objetos e processos e alguns exemplos de resoluções dos alunos, com a respetiva análise do nível de PA e o modo que os alunos utilizaram o PD (sempre que este estiver presente).

A metodologia a seguir será qualitativa de natureza exploratória-descritiva, uma vez que envolve a obtenção de dados descritivos, recolhidos no contexto direto do investigador e os fenómenos ocorrem naturalmente (Bogdan & Biklen, 2013).

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

De modo a entendermos melhor qual é o nível de PA da turma, se é ou não usual estes alunos recorrerem ao PD, apresenta-se a tabela 2 (em anexo) que categoriza as resoluções das 4 tarefas selecionadas para este artigo.

Análise dos Resultados

Nesta seção começamos por apresentar os tipos de resposta, de todos alunos da turma, a quatro tarefas selecionadas para este estudo. Destas quatro tarefas serão também analisadas algumas resoluções dos alunos quanto ao nível de PA e quanto ao PD e será apresentada uma categorização das resoluções dos alunos às tarefas selecionadas para o estudo.

Relativamente ao tipo de resolução, através de analise do gráfico da figura 1, verifica-se que quanto ao número de RC, RPC, RE e tarefas não respondidas, a maioria das resoluções dadas pelos alunos estavam corretas e quase nunca os alunos deixaram tarefas por responder.

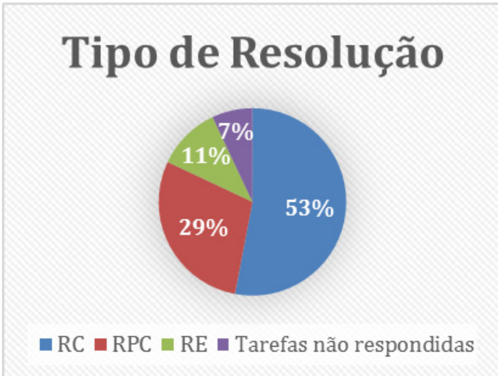


Figura 1: Gráfico que representa a percentagem dos tipos de resoluções

No que diz respeito ao nível de PA, e analisando a figura 2, observa-se que o nível 1 de PA foi o mais comum, seguindo-se o nível 2 e depois o nível 0. Os alunos raramente trabalharam nos níveis 3 e 4 de PA.

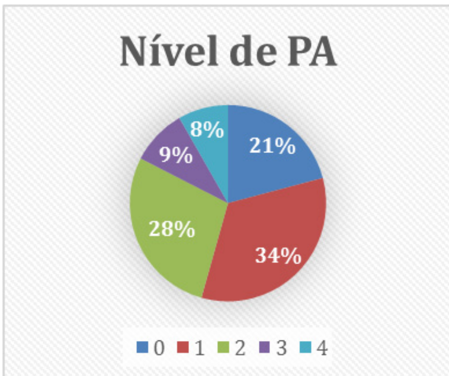


Figura 2: Gráfico que traduz a percentagem do nível de PA presentes nas respostas

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

No que se concerne à presença ou ausência de PD dos alunos, e analisando a figura 3, verifica-se que a maioria apresenta resoluções por via analítica e não gráfica.

Figura 3: Gráfico que traduz a percentagem de presenças e ausências de PD nas respostas

Tarefas analisadas

As tarefas terão sempre uma resolução proposta pelos autores, bem como a análise dos objetos e processos envolvidos e alguns exemplos de resoluções dos alunos, com a respetiva análise de PA e de PD.

De seguida apresenta-se a tarefa 1, do tipo de resolução de problema, sobre a função quadrática.

Tarefa 1:

No cimo de um penhasco, um homem dispara foguetes de iluminação. A altura h, em metros, do foguete em relação ao solo, ao fim do tempo t, em segundos s, é dada por $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$.

Tarefa 1.1

De que altura foi lançado o foguete?

<u>Resolução possível:</u> $h(0) = 25 + 20 \times 0 - 5 \times 0^2 = 25 + 0 - 0 = 25$. Foi lançado a 25 metros.

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Trabalhar com o uso de igualdade como equivalência de expressões e com propriedades de operações aritméticas.

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

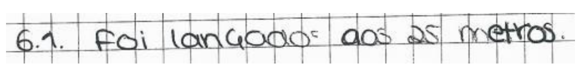
<table>
<tr><td rowspan="2">

Figura 4: Exemplo de uma RC de nível 0 de PA</td><td>PA: A linguagem é natural e a resposta não tem características algébricas.</td></tr>
<tr><td>PD: Não há evidência.</td></tr>
</table>

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

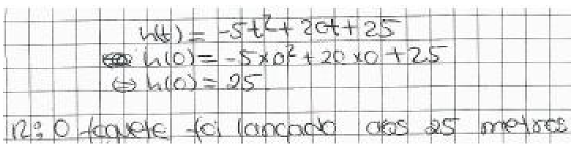
<table>
<tr><td rowspan="2">

Figura 5: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA</td><td>**PA:** A linguagem é natural, numérica e simbólica, há trabalho com propriedades de operações aritméticas e é uma tarefa de índole algébrica e operacional.</td></tr>
<tr><td>**PD:** Não há evidência.</td></tr>
</table>

Nos dois exemplos, observa-se que os alunos utilizam a linguagem natural. A diferença de PA entre as duas resoluções é indicada pela utilização da operação numérica (2ª resolução). Quanto ao PD, as duas resoluções não manifestam nenhuma representação externa.

Tarefa 1.2

Ao fim de quanto tempo chega o foguete ao solo?

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 25 + 20t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \times (-5) \times 25}}{(2 \times (-5))} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 500}}{-10} \Leftrightarrow t = \frac{-20 + 30}{-10} \vee t = \frac{-20 - 30}{-10} \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 5$$

Resposta: Não existem tempos negativos, então chega ao solo após 5 segundos.

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Recorre-se à fórmula resolvente para determinar os zeros e, atendendo ao contexto do problema, exclui-se uma solução.

<u>Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:</u>

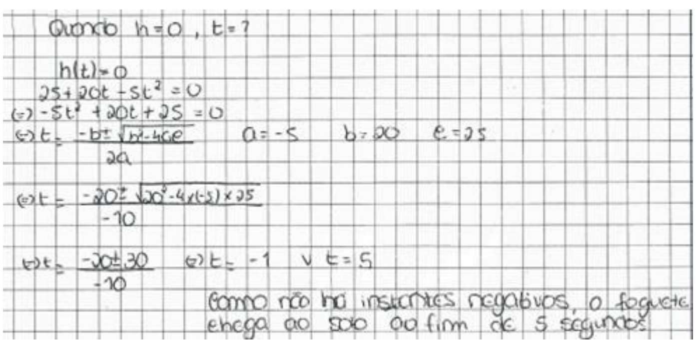
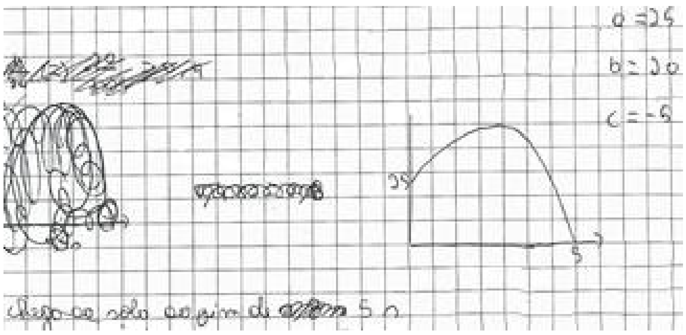
<table>
<tr><td rowspan="2">

Figura 6: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA</td><td>**PA:** A linguagem é natural, numérica e simbólica, o símbolo “t” representa o objeto desconhecido (tempo) e são aplicadas relações e propriedades de operações. Recorre-se ao cálculo com objetos extensivos.</td></tr>
<tr><td>**PD:** Não há evidência.</td></tr>
</table>

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

 **Figura 7: Exemplo de uma RC de nível 0 de PA**	**PA:** A resolução não inclui características algébricas. A linguagem é natural e contém imagens.
	PD: O aluno respondeu à tarefa recorrendo a uma representação gráfica da função h, modelizando a situação.

Categoriza-se a 2ª resolução no nível 0 de PA por não envolver nenhum objeto algébrico, nem se utilizar qualquer operação algébrica. Relativamente à 1ª resolução, evidencia a utilização de objetos extensivos e a aplicação da operação numérica, portanto envolve características do nível 1 de PA. Em relação ao PD, na 2ª resolução, o aluno recorre a uma representação gráfica.

Tarefa 1.3

Qual é a altura máxima atingida?

Resolução Possível:

$$h(t) = 25 + 20t - 5t^2 \Leftrightarrow h(t) = -5(t^2 - 4t + 2^2 - 2^2) + 25 \Leftrightarrow h(t) = -5(t-2)^2 + 45$$

$$V(2, 45)$$

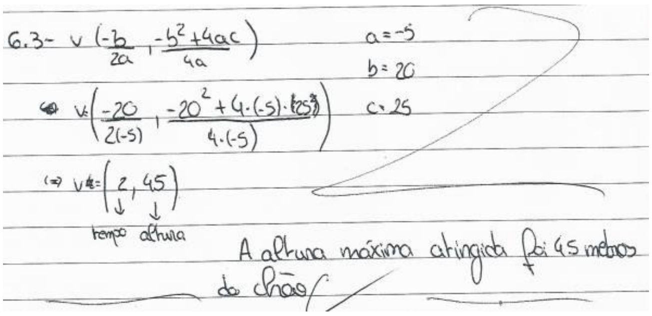
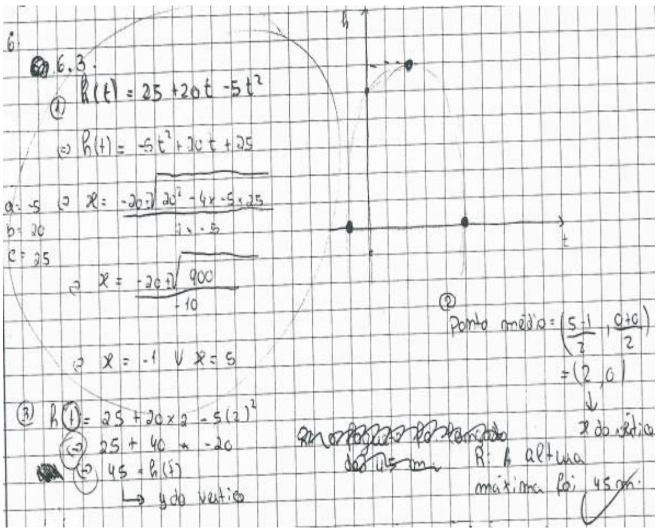
Resposta: A altura máxima é de 45 metros.

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Na resolução apresentada, manipula-se a expressão de modo a conseguir escrevê-la na forma $y = a(x-h)^2 + ky = a(x-h)^2 + k$, sendo *h* e *k* a abcissa e a ordenada do vértice, respetivamente.

Desenvolvimento Curricular e Didática

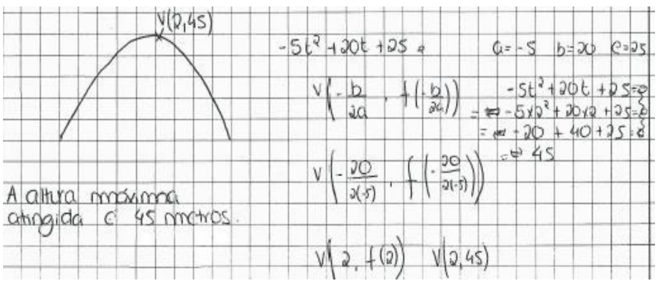
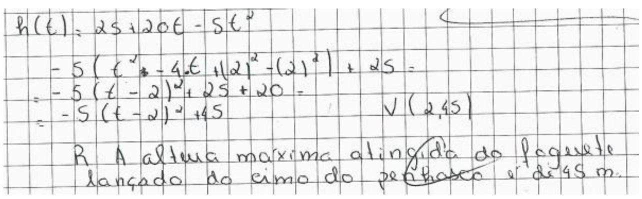
Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

<table>
<tr><td rowspan="2">
Figura 8: Exemplo de uma RC de nível 0 de PA</td><td>**PA:** A linguagem é natural e numérica. A resolução não inclui características algébricas, o aluno apenas substituiu os parâmetros pelos respetivos valores.</td></tr>
<tr><td>**PD:** Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
Figura 9: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA</td><td>**PA:** A linguagem usada é numérica, natural e o aluno recorre a uma imagem. Aplica relações e as propriedades de operações e usa símbolos para representar os dados desconhecidos. A tarefa é funcional e o aluno recorreu ao cálculo com objetos extensivos.</td></tr>
<tr><td>**PD:** A resolução tem uma disposição espacial das suas partes, uma vez que o aluno identifica os passos que fez, contornando os números 1, 2 e 3. Existem operações conduzidas por regras que permitem chegar a novas conclusões.</td></tr>
</table>

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

<table>
<tr><td rowspan="2">
Figura 10: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA</td><td>PA: O aluno aplica relações e propriedades de operações, usa símbolos para representar os dados desconhecidos. O sinal de equivalência é usado para representar igualdades e a linguagem é numérica, recorrendo a uma imagem.</td></tr>
<tr><td>PD: Não há evidência, apesar de se observar uma representação que parece indicar o vértice da parábola.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
Figura 11: Exemplo de uma RC de nível 2 de PA</td><td>PA: A resolução é de índole algébrica e funcional, a linguagem é simbólica e literal e a informação está relacionada com o contexto espacial.</td></tr>
<tr><td>PD: Não há evidência.</td></tr>
</table>

Na 2ª resolução o aluno apresenta operações algébricas calculando os zeros da função, os vértices e a respetiva representação gráfica (evidências de PD). Na 3ª resolução, o aluno apenas esboça uma parábola indicando o valor do vértice. Relativamente o PA, a 1ª resolução é um exemplo do nível 0, uma vez que não envolve os objetos extensivos e apenas se opera numericamente. As 2ª e 3ª resoluções, manifestam a utilização de símbolos para representar os dados e operam-se aritmeticamente. Enquanto a 4ª resolução, mostra a utilização dos símbolos e opera-se algebricamente, portanto categoriza-se no nível 2 de PA.

Tarefa 1.4

Em que instante estava o foguete a 15 metros de altura? Recorre às capacidades gráficas da calculadora para responder à pergunta. Deves seguir os seguintes passos:

- Reproduzir a(s) representação(ões) gráfica(s) em que te baseaste, respeitando o domínio da função, atendendo ao contexto do problema.
- Assinalar no gráfico o(s) ponto(s) relevante(s), com as coordenadas aproximadas às décimas.
- Indicar a solução do problema.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Resolução Possível:

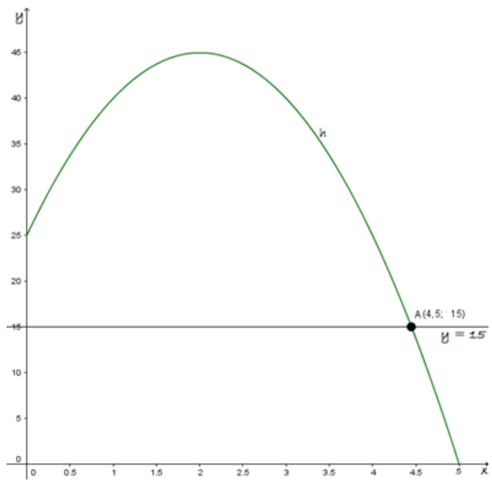


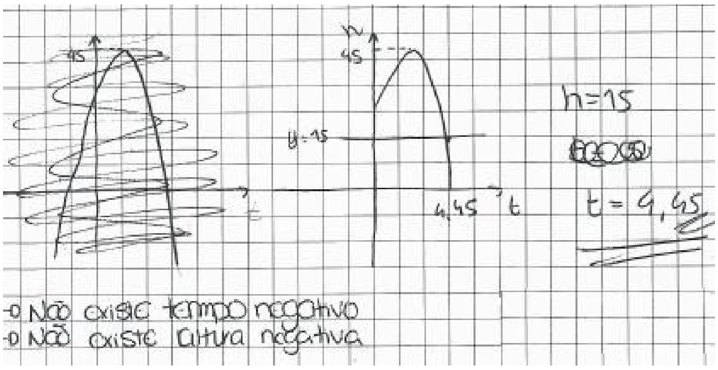
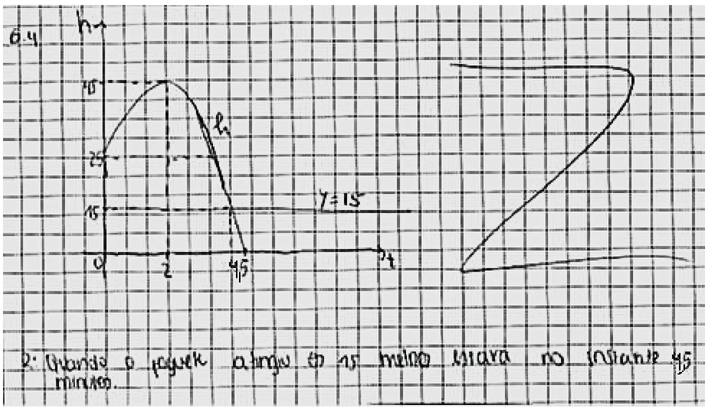
Figura 12: Representação gráfica da função h

Resposta: O foguete estava a 15 metros do solo aos 4 segundos e meio.

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Pretende-se que os alunos recorram às capacidades da calculadora gráfica para representar a função h. Para isso, devem ter em atenção que não há tempo nem altura negativa. Deve ser assinalado o ponto de interseção da função h e de y = 15. O máximo de h não é necessário ser marcado, uma vez que este não é relevante para resolver a tarefa.

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

 **Figura 13: Exemplo de uma RPC de nível 0 de PA**	**PA:** As resoluções não incluem características algébricas, a linguagem usada é natural, recorrendo a imagens.
 **Figura 14: Exemplo de uma RC de nível 0 de PA**	**PD:** As resoluções têm uma disposição espacial das suas partes, apresentam as relações existentes entre os seus elementos e modelizam a situação.

Nestes exemplos, as resoluções são do mesmo nível de PA (nível 0) uma vez que há uma falta de utilização de símbolos algébricos e de operações algébricas. Classifica-se a 1ª resolução de RPC por não ter apresentado as coordenadas com aproximação às décimas nem a resposta à tarefa.

Nestes dois exemplos verifica-se que os alunos recorreram ao PD, indicado pelas suas representações gráficas como uma modelação da tarefa.

De seguida vamos apresentar outra tarefa proposta aos alunos, tarefa 2, bem como uma resolução possível e alguns exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Tarefa 2:

Na Figura 15 estão representados parte do gráfico da função f de domínio $]0,3[$, definida por $f(x) = 6 - 2x$ e um triângulo retângulo $[OPQ]$, em que O é a origem do referencial, P é um ponto do gráfico de f e Q pertence ao eixo das abcissas. Considera que o ponto P se desloca ao longo do gráfico de f e que o ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que o triângulo $[OPQ]$ é sempre retângulo no ponto Q. Seja A a função que faz corresponder à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OPQ]$. Por processos exclusivamente analíticos, resolve as três alíneas seguintes.

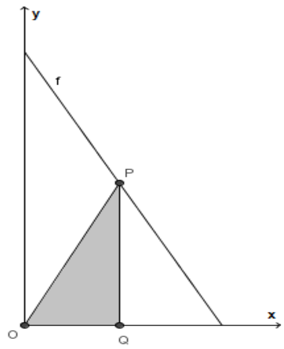


Figura 15:
Representação gráfica
da situação problema

Tarefa 2.1

Mostre que, para cada $x \in]0,3[$, se tem $A(x) = 3x - x^2$.

Resolução Possível:

$O(0,0)$, $P(x, 6-2x)$, $Q(x,0)$, com $x \in]0,3[$uma vez que é esse o domínio de f.

$h = \overline{PQ} = (6-2x) - 0 = 6 - 2x$, com $x \in]0,3[$

$b = \overline{QO} = x - 0 = x$, com $x \in]0,3[$

$$A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2}$$

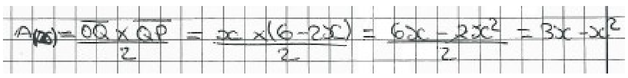
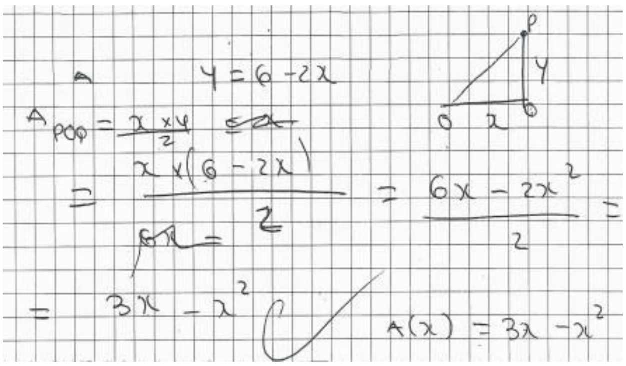
$$A(x) = \frac{x \times (6-2x)}{2} = \frac{6x - 2x^2}{2} = 3x - x^2$$

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Devem ser indicadas as coordenadas dos pontos O, P e Q e recorrer à propriedade da existência do elemento neutro da adição. De seguida, será usada a fórmula da área do triângulo, fazendo as substituições devidas. Na manipulação e simplificação

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

da expressão, os alunos apelam à propriedade distributiva da multiplicação e ao uso da igualdade como equivalência de expressões.

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

 Figura 16: Exemplo de uma RC de nível 3 de PA	**PA:** A expressão usada sofre alterações a nível simbólico, preservando a equivalência. Os objetos intensivos são apresentados de forma simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles.
	PD: Não há evidência.
 **Figura 17: Exemplo de uma RC de nível 3 de PA**	**PA:** O aluno trabalha com as incógnitas e variáveis, utilizando as propriedades estruturais. A expressão usada sofre alterações a nível simbólico, preservando a equivalência. Os objetos intensivos são apresentados de forma simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles.
	PD: O aluno recorre a uma imagem, que lhe permite concluir qual é a expressão da base e da altura do triângulo, conseguindo assim modelizar a situação. A resolução apresenta também tem um carácter genérico.

Apresentam-se dois exemplos de resoluções no nível 3 de PA. Faz-se uma tradução da linguagem natural para linguagem algébrica e resolve-se o problema pela resolução de uma equação do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$.

Quanto à utilização de PD, a 2ª resolução utiliza uma imagem de um triângulo como modelação desta situação sendo este um suporte ao raciocínio do aluno que lhe permitiu resolver o problema.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Tarefa 2.2

Calcula as coordenadas do ponto P, de modo que a área do triângulo $[OPQ]$ seja máxima. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

<u>Resolução Possível:</u>

$A(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3 - x = 0 \ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

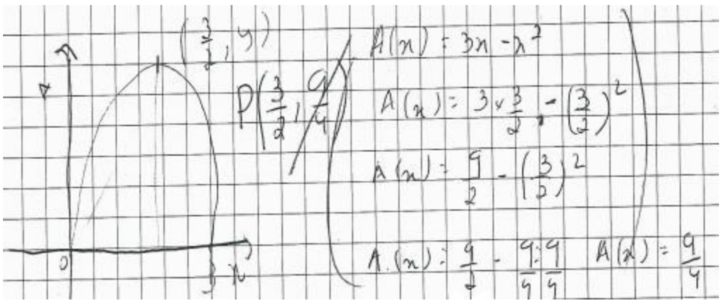
A área máxima é dada quando:

$x = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};$ $\qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = 6 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) = 3$

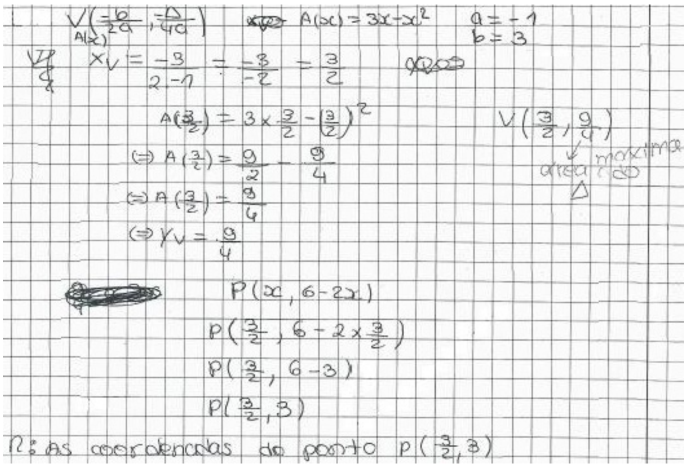
$\text{Resposta}: P\left(\frac{3}{2}, 3\right).$

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> São calculados os zeros da parábola e, de seguida, o ponto médio desses zeros. Por fim, substitui-se o valor 1,5 pela abcissa de P e determina-se a sua ordenada.

<u>Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:</u>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
Figura 18: Exemplo de uma RPC de nível 1 de PA</td>
<td>PA: A linguagem é numérica, simbólica e contém uma imagem. Recorreu-se ao cálculo com objetos extensivos.</td>
</tr>
<tr>
<td>PD: O aluno desenha uma representação gráfica da função A, concluindo assim que a área é máxima quando a abcissa assume o valor 3/2.
No entanto não indica corretamente as coordenadas do ponto P. A resolução apresenta uma disposição espacial das suas partes e as propriedades e relações existentes entre os seus elementos.</td>
</tr>
</table>

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

 **Figura 19: Exemplo de uma RC de nível 2 de PA**	**PA:** Há uma manipulação numérica da expressão da função A de modo a obter as coordenadas do vértice de A(x). A resolução apresentada é de carácter algébrico-operacional, interferindo incógnitas que são expressas numa linguagem simbólica e literal.
	PD: Não há evidência.

Apresentam-se dois exemplos de diferentes níveis de PA utilizados pelos alunos. Na 1ª resolução é manifestado o nível 1 de PA, pois há utilização dos símbolos algébricos e recorre-se ao cálculo com estes símbolos. Enquanto a 2ª resolução, manifesta o nível 2 de PA, pela utilização dos símbolos como incógnitas e pela resolução de problema através da equação da forma $Ax \pm B = C$.

A utilização de PD está presente apenas na 1ª resolução uma vez que o aluno construiu uma representação gráfica da função A.

Tarefa 2.3

Indica, na forma de um intervalo, o conjunto de valores de x para os quais a área do triângulo $[OPQ]$ é maior ou igual a dois.

<u>Resolução Possível:</u>

$$A(x) \geq 2 \Leftrightarrow 3x - x^2 \geq 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-1) \times (-2)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-2} \vee x = \frac{-3-1}{-2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

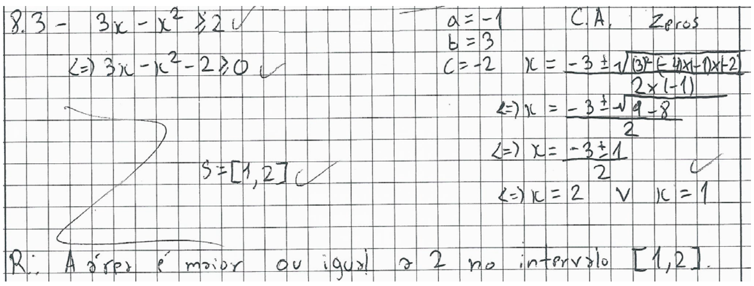
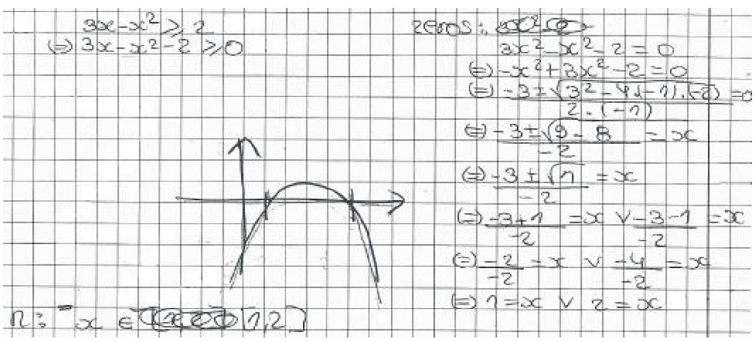
Resposta: $S = x \epsilon [1, 2] S = x \epsilon [1, 2]$

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Deve-se resolver uma inequação do 2.º grau e por isso é necessário calcular os zeros da parábola, indicando por fim o intervalo que é solução da inequação.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

<table>
<tr><td rowspan="2">
Figura 21: Exemplo de uma RC de nível 2 de PA</td><td>**PA:** O aluno resolve uma inequação em que a incógnita está apenas num dos membros, recorre à fórmula resolvente para calcular os zeros da função quadrática e a linguagem usada é simbólica e literal.</td></tr>
<tr><td>**PD:** Não há evidência.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
Figura 22: Exemplo de uma RC de nível 2 de PA</td><td>**PA:** O aluno resolve uma inequação em que a incógnita está apenas num dos membros, recorre à fórmula resolvente para calcular os zeros da função quadrática e a linguagem usada é simbólica e literal.</td></tr>
<tr><td>**PD:** A resolução tem uma disposição espacial das suas partes e apresenta as relações existentes entre os seus elementos. O aluno, recorre a uma representação gráfica para definir um intervalo.</td></tr>
</table>

Apresenta-se dois exemplos do mesmo nível de PA (nível 2) que manifestam a utilização dos símbolos como incógnitas e a utilização de operações algébricas para resolver a inequação com a incógnita num dos membros.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

O 2º exemplo manifesta o envolvimento de PD na sua resolução. Utiliza-se uma representação gráfica da função quadrática para definir o intervalo.

Apresenta-se, em seguida, a tarefa 3 que foi proposta aos alunos e também a resolução possível e resoluções apresentadas pelos alunos.

Tarefa 3

Numa quinta há uma estufa com a forma de uma parábola, como a representada na figura 23. Sabe-se que a estufa tem 8 metros de largura ao nível do solo e que a altura máxima da estufa é 2,4 metros.

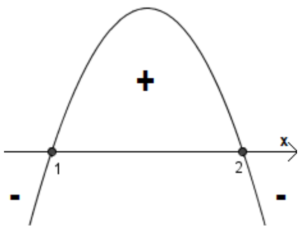


Figura 20: Zeros da função A

Tarefa 3.1

Define analiticamente a curva dada.

<u>Resolução Possível:</u>

$V\left(\frac{0+8}{2}; 2{,}4\right) \Leftrightarrow V(4; 2{,}4)$

Os zeros da parábola são $x = 0 \wedge x = 8$. Então $f(x) = a(x-0)(x-8)$.

Como $V(4; 2{,}4)$ pertence a f(x), substituindo vem:

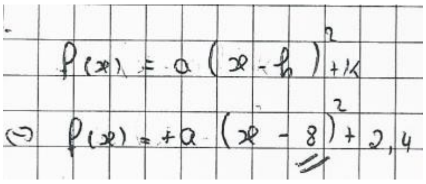
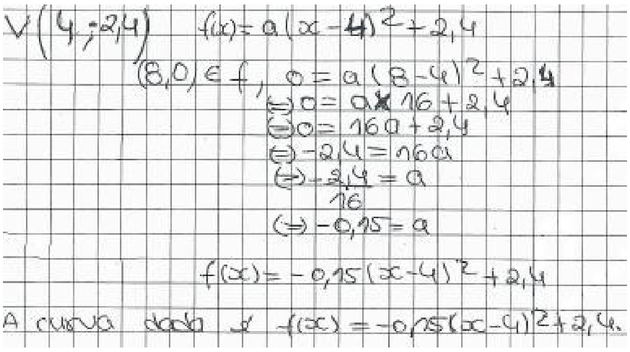
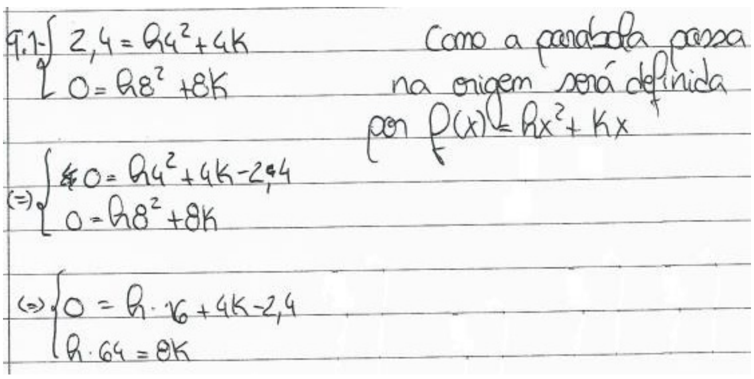
$2{,}4 = a(4-0)(4-8) \Leftrightarrow 2{,}4 = 4a \times (-4) \Leftrightarrow 2{,}4 = -16a \Leftrightarrow a = -0{,}15$

Assim $f(x) = -0{,}15(x-0)(x-8) = -0{,}15x(x-8)$

<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Os alunos calculam o valor de “a” recorrendo aos zeros da função f.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

 **Figura 24: Exemplo de uma RPC de nível 0 de PA**	**PA:** A linguagem é simbólica e numérica. O aluno apenas substituiu o valor de dois dos três parâmetros da família de funções $y = a(x - h)^2 + k$. Assim, a resolução não inclui características algébricas.
	PD: Não há evidência.
 **Figura 25: Exemplo de uma RC de nível 2 de PA**	**PA:** O aluno substitui os valores de h e k na expressão da parábola. Depois descobriu o valor de "a", resolvendo para isso uma equação do tipo $Ax \pm B = C$.
	PD: Não há evidência..
 **Figura 26: Exemplo de uma RPC de nível 3 de PA**	**PA:** Apesar do aluno não concluir a resolução do sistema linear a duas incógnitas, as expressões sofrem transformações, conservando-se a equivalência, e as incógnitas são tratadas aplicando as propriedades estruturais. A linguagem é simbólica, natural e literal.
	PD: Não há evidência.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Nesta tarefa não se encontra nenhuma resolução em que os alunos manifestam o PD. Quanto ao PA, a 1ª resolução é categorizada no nível 0, pois há uma substituição de valores na fórmula e apenas está presente a utilização do cálculo numérico. A 2ª, categoriza-se no nível 2 de PA pois envolve uma resolução da equação na forma $Ax \pm B = C$. A resolução 3, categoriza-se no nível 3 devido às transformações simbólicas das expressões para um sistema das equações lineares.

Tarefa 3.2

Os dois postes que suportam a estufa distam 2 metros de cada lado. Qual é a altura dos postes?

Resolução Possível:

Os postes estão assentes em $x = 2$ e $x = 6$, uma vez que correspondem às abcissas dos zeros de função.

Como uma parábola é simétrica em relação a $x = h$, em que h é a abcissa do vértice, então $f(h - x) = f(h + x)$, como $h = 4$, então:

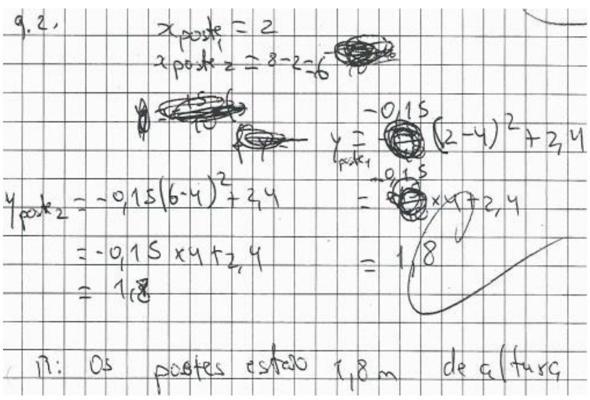
$f(4 - 2) = f(4 + 2) \Leftrightarrow f(2) = f(6)$

$f(2) = -0{,}15 \times (2 - 4)^2 + 2{,}4 = 1{,}8$

Resposta: A altura dos postes é de $1{,}8$ metros.

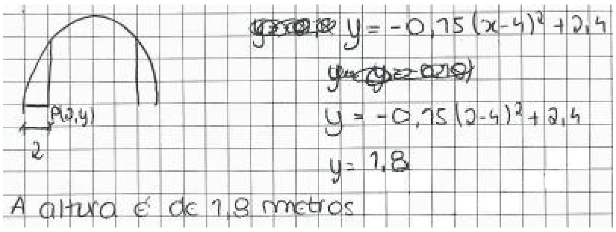
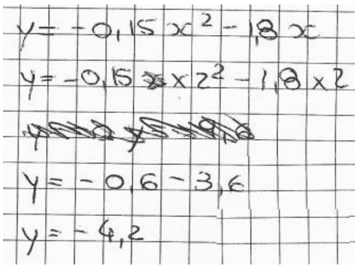
Objetos e processos da resolução possível: Os alunos identificam o eixo de simetria da parábola, de seguida terão que substituir h por 4, e através de simplificações, calcular f (2) ou f (6).

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
Figura 27: Exemplo de uma RC de nível 0 de PA</td>
<td>**PA:** A linguagem é natural e numérica. O aluno efetua duas substituições na função que obteve na alínea anterior, sendo deste modo a sua resolução de caráter aritmético.</td>
</tr>
<tr>
<td>**PD:** Não há evidencia.</td>
</tr>
</table>

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

 **Figura 28: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA**	**PA:** A linguagem é natural e essencialmente numérica. O valor desconhecido é representado por um símbolo (y). Observa-se um pensamento relacional, sendo usada a igualdade entre duas expressões para confirmar que as alturas dos postes eram iguais.
	PD: O aluno recorreu a uma imagem que modeliza a situação. A resolução tem um carácter genérico, pois o aluno conclui que os postes têm que ter a mesma altura, determinando apenas a altura de um deles.
 **Figura 29: Exemplo de uma RC de nível 1 de PA**	**PA:** É feita uma substituição da variável x. A linguagem usada é numérica e simbólica. O cálculo é realizado com objetos extensivos.
	PD: Não há evidência.

Apresenta-se exemplos diferentes de nível 0 e de nível 1 de PA. Na 1ª resolução (nível 0 de PA), verifica-se um indício para a utilização da linguagem natural e numérica e a substituição de valores na função sem operar algebricamente. As 2ª e 3ª resoluções categorizam-se no nível 1 de PA pelo envolvimento do símbolo como incógnita e da igualdade como uma equivalência relacional.

Seguidamente, apresenta-se a tarefa 4 que foi adaptado de Saraiva, Teixeira e Andrade (2010) sobre a família da função linear. Apresenta-se, também, uma resolução possível e alguns exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos.

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Tarefa 4

Utilizando a calculadora gráfica representa graficamente funções reais de variável real da família $f(x) = mx + b$, com m e b reais. Estuda as representações gráficas de funções desta família e indica:

A existência e o número de zeros.

Intervalos de monotonia.

<u>Resolução Possível:</u>

Se $m = 0$ então $f(x) = b$ é estritamente monótona.

Zeros:

Caso $b = 0$: São todos os valores reais. Caso $b \neq 0$: Não tem.

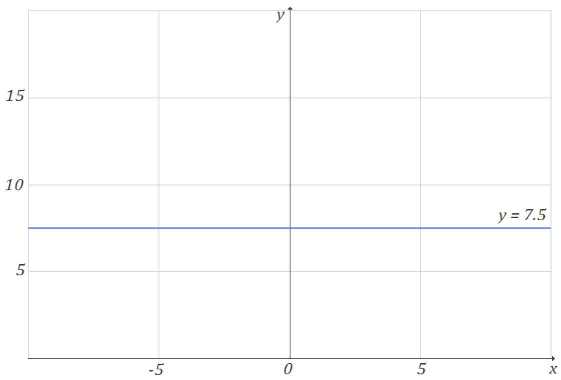


Figura 30: Exemplo de uma representação gráfica do tipo y = k, $k \in \mathbb{R}$

Se $m > 0$ então $f(x) = mx + b$ é estritamente crescente.

Zeros:

Caso $b = 0$: $x = 0$ Caso $b > 0$: $x \in]-\infty, 0[$ Caso $b < 0$: $x \in]0, +\infty[$

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

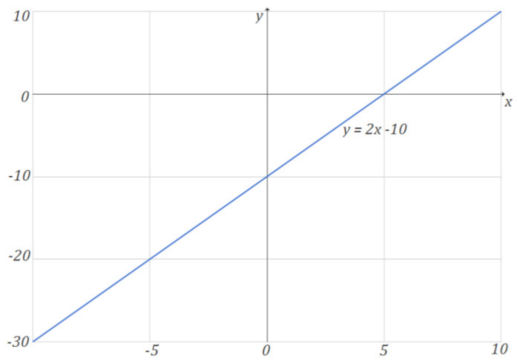


Figura 31: Exemplo de uma representação gráfica da forma y = mx + b, m > 0

Se $m < 0m < 0$ então $f(x) = mx + bf(x) = mx + b$ é estritamente decrescente.

Zeros:

Caso $b = 0$: $x \in \{0\}$ Caso $b > 0$: $x \in]0, +\infty[$ Caso $b < 0$: $x \in]-\infty, 0[$

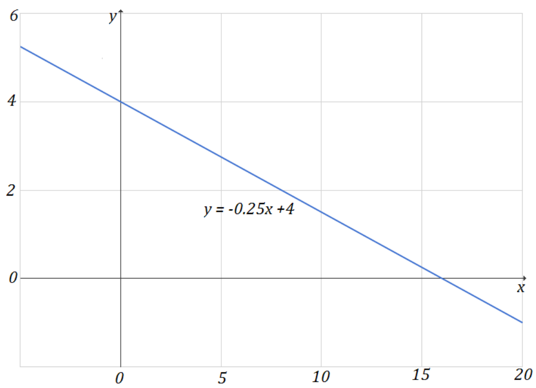


Figura 32: Exemplo de uma representação gráfica do tipo y = mx + b, m < 0

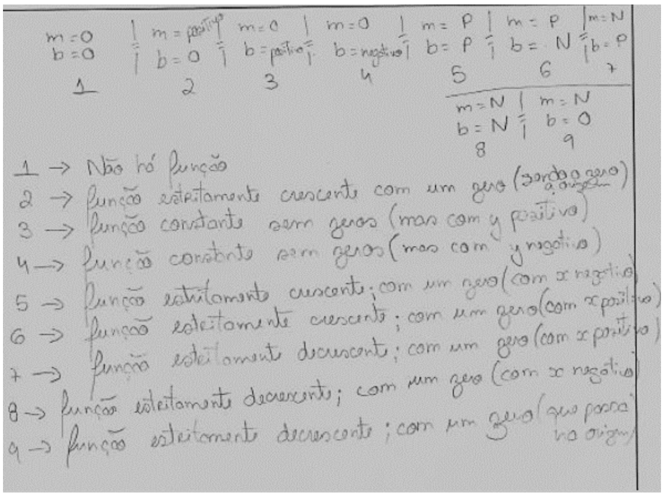
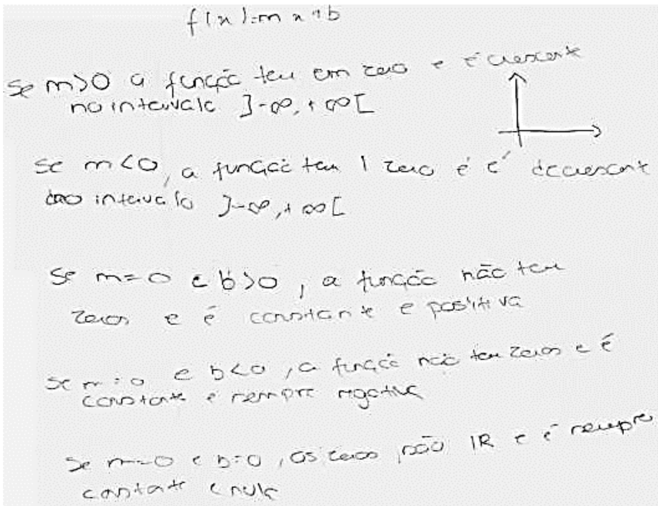
<u>Objetos e processos da resolução possível:</u> Manipular a função afim fazendo um estudo dos seus parâmetros.

A seguir apresenta-se quatro resoluções ilustrativas do nível 4 de PA. Nas resoluções 1 e 2, os alunos realizam este estudo sem recorrerem à representação gráfica.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

Exemplos de resoluções apresentadas pelos alunos:

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
m=0 b=0 1 | m=positivo b=0 2 | m=0 b=positivo 3 | m=0 b=negativo 4 | m=P b=P 5 | m=P b=N 6 | m=N b=P 7
m=N b=N 8 | m=N b=0 9
1 → Não há função
2 → função estritamente crescente com um zero (sendo o zero a origem)
3 → função constante sem zeros (mas com y positivo)
4 → função constante sem zeros (mas com y negativo)
5 → função estritamente crescente; com um zero (com x negativo)
6 → função estritamente crescente; com um zero (com x positivo)
7 → função estritamente decrescente; com um zero (com x positivo)
8 → função estritamente decrescente; com um zero (com x negativo)
9 → função estritamente decrescente; com um zero (que passa na origem)
Figura 33: Exemplo de uma RPC de nível 4 de PA</td>
<td>**PA:** O aluno realiza um estudo da família da função afim, tendo em conta os seus parâmetros. Apesar de ter cometido um erro ao afirmar que “Não há função” quando $m = 0$ e $b = 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>**PD:** O aluno apresentou a resolução numa disposição espacial das suas partes, de forma bastante organizada, mostrando as propriedades e existentes entre os seus elementos. A resolução apresenta um carácter genérico.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">
f(x)=mx+b
Se m>0 a função tem um zero e é crescente no intervalo]-∞,+∞[
Se m<0, a função tem 1 zero e é decrescente no intervalo]-∞,+∞[
Se m=0 e b>0, a função não tem zeros e é constante e positiva
Se m=0 e b<0, a função não tem zeros e é constante e sempre negativa
Se m=0 e b=0, os zeros são IR e é sempre constante e nula
Figura 34: Exemplo de uma RPC de nível 4 de PA</td>
<td>**PA:** O aluno realiza um estudo da família da função afim, tendo em conta os seus parâmetros.</td>
</tr>
<tr>
<td>**PD:** Não há evidência.</td>
</tr>
</table>

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

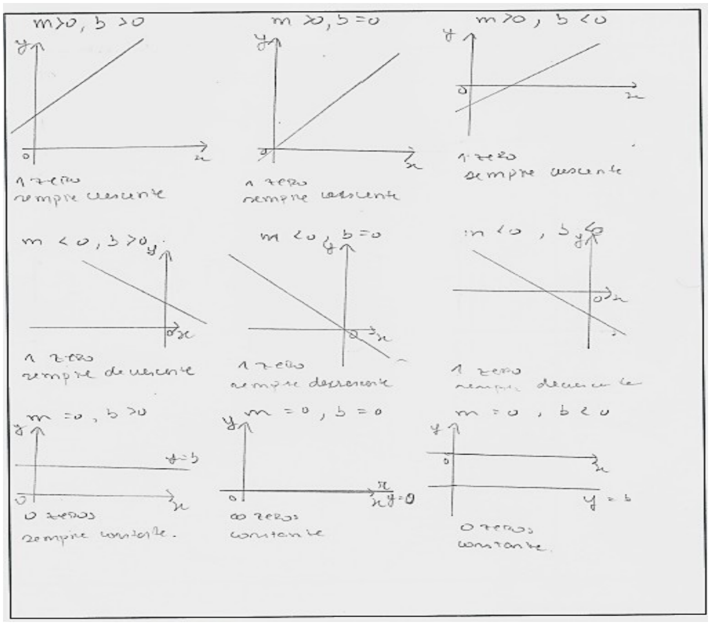
<table>
<tr>
<td rowspan="2">

Figura 35: Exemplo de uma RC de nível 4 de PA</td>
<td>PA: O aluno realiza um estudo da família de funções afins, tendo em conta os seus parâmetros.</td>
</tr>
<tr>
<td>PD: O aluno modeliza a situação pedida na tarefa, recorrendo a diversas representações gráficas de funções da família $f(x) = mx + b$. Assim, a resolução apresenta-se numa disposição espacial das suas partes mostrando as propriedades e relações existentes entre os seus elementos. O aluno atribui um carácter genérico à resolução por não ter atribuído um valor em particular a nenhum dos parâmetros.</td>
</tr>
</table>

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

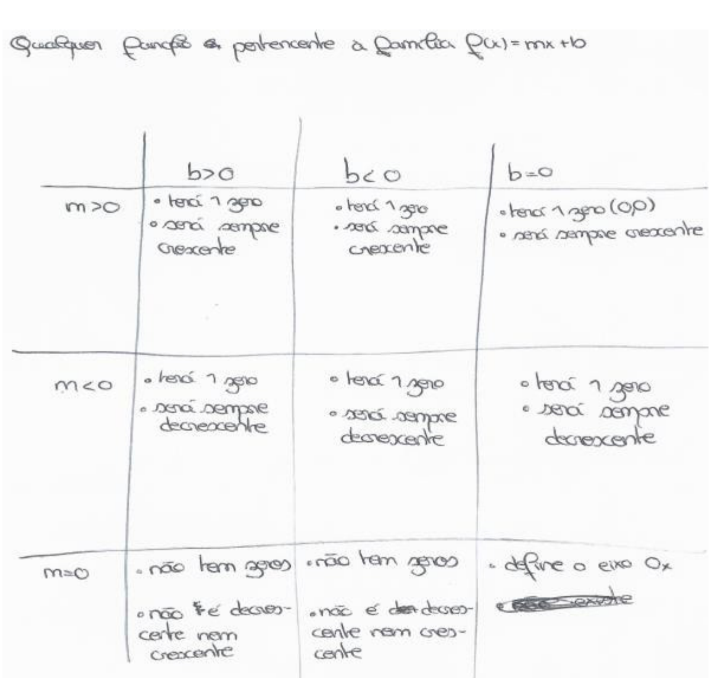


Figura 36: Exemplo de uma RC de nível 4 de PA

PA: O aluno realiza um estudo da família de funções afins, tendo em conta os seus parâmetros.

PD: O aluno modeliza a situação pedida na tarefa, recorrendo a uma tabela. Assim, nas linhas aparecem as variações do declive e nas colunas as variações da ordenada na origem. Deste modo, a resolução tem uma disposição espacial das suas partes mostrando as propriedades e relações existentes entre os seus elementos. O aluno atribui um carácter genérico à resolução por não ter atribuído um valor em particular a nenhum dos parâmetros.

Estas resoluções estão no nível 4 de PA pois há um estudo dos parâmetros da família da função afim. Nas resoluções 1 e 2, os alunos não recorrerem a representações gráficas. Na 3ª, apresentam-se vários gráficos e as diferentes combinações dos parâmetros. Na resolução 4, o aluno modelizou o problema através de uma tabela, mostrando as propriedades e relações existentes entre os elementos.

Conclusões

O estudo pretendia analisar os objetos e processos usados na resolução de tarefas, envolvendo o PA e PD, de uma turma do 10.º ano de escolaridade, do Ensino Secundário, em Portugal.

Neste estudo, verifica-se que a maioria das respostas analisadas estavam corretas ou parcialmente corretas. Os alunos usam frequentemente conceitos aprendidos e baseiam-se em proposições na construção das resoluções. No entanto, raramente usam argumentos que as justifiquem. Os resultados obtidos vão ao encontro a investigações anteriormente realizadas, Godino et al. (2015b) referem que

> *"los medios de expresión son "artefactos" empíricos que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos de naturaleza conceptual, proposicional, procedimental y*

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

argumentativa, que constituyen la esencia de la actividad matemática realizada con el apoyo de los objetos ostensivos" (p.19).

Para responder à primeira questão de investigação, recorreu-se a uma observação gráfica (figura 2) que indica que os alunos trabalharam, maioritariamente, no nível 1 de PA. Verifica-se também que os diagramas estiveram presentes em algumas as resoluções dos alunos, sendo que, na maioria das vezes, os alunos recorreram aos diagramas através de disposições espaciais, apresentando as propriedades e relações existentes entre os seus elementos e (ou) constituídos por operações conduzidas por regras permitindo que chegassem a novas conclusões.

Foi possível verificar que os diagramas ajudaram na estruturação do raciocínio matemático, no entanto, pela análise da figura 3, observa-se que a grande maioria dos alunos não recorreu a representações diagramáticas.

Assim conclui-se que, nesta turma, se o PD for mais trabalhado em sala de aula poderá levar a uma melhoria no desenvolvimento do PA, uma vez que a maioria dos alunos trabalha num nível elementar de PA e raramente recorrem a representações diagramáticas. Também Radford (2003) sublinha que o PD é relevante na medida em que ele é visto como um modo de expressão de subjetividade humana que inclui, no lado epistêmico, o esforço para compreender a realidade humana.

Este estudo mostra que há necessidade dos alunos serem habituados a resolver atividades matemáticas, de resolução de problemas, através de abordagem diversificadas, que promovem da utilização de PA e de PD. De acordo com NCTM (2007) "representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações e conceitos complexos" pelo que, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (p. 77).

Referências

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, Ed.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. In A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. J. Garcia y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 285-294). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2014). Levels of algebraic reasoning in primary and secondary education. CERME 9, TWG 3.

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., F. Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. & Wilhelmi, M. R. (2015a). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33.1 (pp. 127-150).

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. & Contreras, A. (2015b) Configuraciones de práticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. Departamento de Didática da Matemática. Universidade de Granada.

Góes, M. B. & Soares, M. M. D. (2010). Visualização: Relevância na educação Matemática e

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016 ISSN: 1647-3582

contribuição para o ensino/aprendizagem de arquitetura. In X Enem - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador, Bahia. X Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador, Bahia: SBEM, v. 1. (pp. 1-10).

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M.Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

NCTM (2007), Princípios e Normas para a Matemática Escolar, Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). O ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa? In O ensino da Matemática: Situação e perspectivas (pp. 21-56). Lisboa: Conselho Nacional de Educação.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Radford, L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. V. Cifarelly (Eds.), Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Saiz, & A. Mendez (Eds.). Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (vol.1, pp. 2-21). Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Radford, L. (2008). Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology. PNA, 3 (1), 1 – 18.

Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). Estudo das funções no programa de Matemática com problemas e tarefas de exploração. Recuperado em 25 março, 2015, de http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Vaz, S. A. A. (2015). Avaliação e Desenvolvimento do Pensamento Algébrico numa turma do 10.º ano. Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 8 (5), dezembro 2016

ISSN: 1647-3582

Anexo - Categorização das resoluções da turma

Tabela 2: Categorização das resoluções

Tarefa / Aluno	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4
A	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N		RC, 3, N	RPC, 1, S	RPC, 2, S	RC, 2, N	RC, 1, N	RC, 4, N
B	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 2, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RPC, 2, N	RPC, 2, N	RPC, 2, N	RC, 1, N	RC, 4, S
C	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RPC, 3, N	RPC, 1, S	RC, 4, S
D	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, S	RPC, 0, S	RC, 3, S	RC, 2, N	RC, 2, S	RC, 2, N	RPC, 1, N	
E	RC, 1, N	RC, 0, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RE	RPC, 2, N	RPC, 2, N		RPC, 1, N	RE
F	RC, 1, N	RC, 1, N	RPC, 0, N	RC, 0, S	RC, 3, N	RPC, 2, N				
G	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 2, N	RPC, 0, S	RPC, 3, N	RC, 2, N	RPC, 2, S	RC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, S
H	RC, 0, N	RPC, 1, N	RC, 0, N	RE	RE	RC, 2, N	RE	RPC, 2, N	RPC, 0, N	RPC, 4, S
I	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RC, 0, N	
J	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RC, 2, S	RC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, S
K	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 1, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RPC, 2, S	RC, 2, N	RC, 1, S	RC, 4, S
L	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RPC, 2, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RC, 0, N	RPC, 4, S
M	RC, 1, N	RE			RE	RE		RPC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, S
N	RC, 1, N	RC, 1, N	RPC, 1, N	RPC, 0, S	RC, 2, N	RPC, 1, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RC, 0, N	RPC, 4, S
O	RC, 1, N	RC, 0, S	RPC, 1, N	RPC, 0, S	RE		RPC, 2, N	RE	RPC, 1, N	RE
P	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RPC, 2, N	RC, 2, N	RC, 1, N	RE
Q	RC, 1, N	RE	RPC, 0, N	RE	RC, 3, N	RC, 2, N	RE	RC, 2, N	RC, 1, N	
R	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RE	RC, 2, N	RPC, 2, N	RPC, 1, N	RPC, 4, S
S	RC, 1, N	RPC, 1, N	RPC, 0, N	RPC, 0, S	RC, 3, N	RE	RE	RPC, 2, N	RPC, 1, N	RPC, 4, S
T	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RC, 0, S	RC, 3, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RPC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, S
U	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, N	RPC, 0, S	RE	RPC, 2, N	RC, 2, N	RC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, N
V	RC, 1, N	RE			RE	RE		RPC, 2, N	RC, 1, N	RPC, 4, S
W	RC, 1, N	RPC, 1, N	RE	RE	RC, 3, N	RC, 2, N	RPC, 2, S	RPC, 2, N	RE	
X	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 0, S	RPC, 0, S	RPC, 3, N	RE	RE	RC, 2, N	RC, 1, N	RC, 4, S
Y	RC, 1, N	RC, 1, N	RC, 1, S	RPC, 0, S	RPC, 3, N	RPC, 2, N	RPC, 2, N	RPC, 0, N	RC, 1, N	RC, 4, S

RC: Resolução Correta; **RPC:** Resolução Parcialmente Correta; **RE:** Resolução Errada; **Números:** Nível de PA da Resolução; **Espaço em branco:** O aluno não respondeu à tarefa; **S:** Presença de PD; **N:** Ausência de PD. **Exemplo da leitura:** RC, 1, N: Resolução Correta, de nível 1 de PA e não há presença de PD.