



## Definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes

### Define incompatible, complementary and independent events

**José António Fernandes**

Universidade do Minho, Instituto de Educação, Portugal  
jfernandesl@ie.uminho.pt  
<https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>

**Paula Maria Barros**

Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Portugal  
pbarros@ipb.pt  
<https://orcid.org/0000-0002-6297-0868>

#### Resumo:

Neste artigo estuda-se o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, acerca de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. Participaram no estudo 31 estudantes da Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do Norte de Portugal, a quem foi proposto que resolvessem uma tarefa com três itens, cada um relativo a um tipo de acontecimentos. Em termos de resultados, salientam-se as grandes dificuldades exibidas pelos estudantes na definição dos diferentes tipos de acontecimentos, mais acentuadas no caso dos acontecimentos complementares e independentes, as quais se explicam, sobretudo, por se tratar de definir acontecimentos de uma experiência aleatória composta.

**Palavras-chave:** probabilidades; acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes; futuros professores dos primeiros anos.

#### Abstract:

This article studies the knowledge of students, prospective primary school teachers, about incompatible, complementary and independent events. Participated in the study 31 students of the Degree in Basic Education of a university in the North of Portugal, who were proposed to solve a task with three items, each related to a type of events. In terms of results, we highlight the great difficulties exhibited by students in defining the different types of events, most accentuated in the case of complementary and independent events, which are explained, above all, because it is about defining events of a compound random experience.

**Keywords:** probabilities; incompatible, complementary and independent events; prospective primary school teachers.



### Resumen:

Este artículo estudia el conocimiento de los estudiantes, futuros maestros, sobre eventos incompatibles, complementarios e independientes. Participaron en el estudio 31 estudiantes del Grado en Educación Básica de una universidad en el Norte de Portugal, a quienes propusieron resolver una tarea con tres ítems, cada uno relacionado con un tipo de sucesos. En términos de resultados, destacamos las grandes dificultades exhibidas por los estudiantes para definir los diferentes tipos de sucesos, más acentuados en el caso de sucesos complementarios e independientes, que se explican, sobre todo, porque se trata de definir sucesos de una experiencia aleatoria compuesta.

**Palabras clave:** probabilidades; sucesos incompatibles, complementarios e independientes; futuros maestros.

## Introdução

Nas sociedades atuais, sobretudo nos países desenvolvidos, a importância das Probabilidades e da Estatística tem aumentado continuamente. Hoje em dia estas temáticas desempenham um papel crucial na vida das pessoas, seja a nível da vida do quotidiano, a nível do emprego ou a nível da participação social. Por exemplo, facilmente podemos imaginar as dificuldades que um analfabeto nestas temáticas enfrentaria ao ver televisão, ao ler um jornal ou mesmo ao manter algumas conversas com outras pessoas.

Ora, tal relevância vem-se repercutindo em mais estudo dessas temáticas na escola. Em Portugal, o ensino de Probabilidades e Estatística passou a fazer parte dos programas escolares da disciplina de Matemática do ensino básico no final do século passado, quando antes estes temas apenas eram estudados no ensino secundário. Concretamente, os novos programas de Matemática aprovados em 1991 passaram a incluir temas de Estatística e Probabilidades no 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. Mais tarde, com o programa de 2007 (Ministério da Educação, 2007), sob a designação de Organização e Tratamento de Dados, assiste-se mesmo a um aprofundamento do ensino desta temática, estendendo o seu estudo ao 1.º ciclo do ensino básico, e com o programa de 2013 (Ministério da Educação e Ciência, 2013) mantêm-se, fundamentalmente, os conteúdos do programa anterior. Pode-se aceder à descrição e discussão mais detalhadas destes programas escolares, em relação a estas temáticas, em Alves e Fernandes (2015).

Naturalmente que o aprofundamento do ensino de Probabilidades e Estatística na educação básica requer que os professores desses níveis de escolaridade adquiram uma formação adequada, a começar na formação inicial, para poderem desenvolver um ensino apropriado dessas temáticas. Estudos anteriores mostram que os estudantes, futuros professores dos primeiros anos, têm dificuldades em muitos dos conteúdos de Probabilidades e Estatística (e.g., Fernandes & Freitas, 2019; Fernandes & Gea, 2018; Fernandes, Viseu & Gea, 2016), o que também se deve a serem temas introduzidos recentemente nos programas de formação inicial e contínua dos professores dos primeiros anos.



No caso das Probabilidades, Fernandes et al. (2016) relatam dificuldades dos futuros professores dos primeiros anos em diversos conteúdos, mesmo depois de terem completado a sua formação em Probabilidades e Estatística no ensino superior. Esses estudantes exibiram um melhor desempenho na determinação de probabilidades simples e mais dificuldades na definição de acontecimentos certos no processo de extração de berlinde de diferentes cores de um saco e na determinação de probabilidades condicionadas e da conjunção, mais acentuadas no caso das probabilidades da conjunção.

Com foco no tema das Probabilidades, neste artigo estuda-se o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, acerca da definição de diferentes tipos de acontecimentos, designadamente: acontecimentos incompatíveis ou disjuntos, acontecimentos complementares e acontecimentos independentes.

A relevância do presente estudo pode ser vista a vários níveis. Em primeiro lugar, analisando os estudos já realizados sobre acontecimentos probabilísticos, conclui-se que têm sido estudadas, sobretudo, a classificação e a formulação de acontecimentos segundo a tipologia acontecimentos certos, impossíveis e possíveis. Assim, este estudo constitui-se como complementar do conhecimento existente sobre acontecimentos probabilísticos.

Em segundo lugar, assumimos que o futuro professor (mais tarde professor) deve ter um conhecimento sobre o que ensina que vá além do que é exigido aos seus alunos. Portanto, enquadrado no conhecimento no horizonte matemático (Hill, Ball & Schilling, 2008), o professor deve ter conhecimento sobre o que os alunos terão de aprender posteriormente, tendo em conta as possíveis conexões entre o que estão a aprender num determinado momento e aquilo que aprenderão no futuro.

Por último, a tipologia dos acontecimentos aqui estudados (incompatíveis, complementares e independentes) apresenta um potencial formativo muito rico em termos matemáticos na medida em que permite explorar variados conteúdos, como sejam teoria de conjuntos, lógica e probabilidades.

Depois de apresentado o estudo, nas secções seguintes do artigo efetua-se a contextualização teórica, logo seguida da referência à metodologia usado e da apresentação de resultados. Por fim, focam-se as principais conclusões do estudo e extraem-se algumas implicações para o ensino de Probabilidades.

## Contextualização teórica

Como no presente artigo estudamos o conhecimento de futuros professores sobre diferentes tipos de acontecimentos probabilísticos, discute-se, a seguir, sucintamente, a questão do conhecimento do professor para ensinar e apresentam-se alguns estudos sobre o conhecimento de acontecimentos probabilísticos, mais especificamente envolvendo a classificação e a definição de acontecimentos probabilísticos certos, impossíveis e possíveis.

Nos últimos anos tem-se assumido que o conhecimento do professor para ensinar é multifacetado, salientando-se dois tipos fundamentais de conhecimento: o *conhecimento do conteúdo* e o *conhecimento pedagógico do conteúdo* (Hill et al., 2008; Shulman, 1986). Este trabalho cen-



tra-se, sobretudo, no conhecimento do conteúdo e envolve as facetas epistêmica e cognitiva do marco do Enfoque Ontossemiótico de Godino e colaboradores (e.g., Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017), que se referem, respetivamente, aos conhecimentos matemáticos do contexto institucional em que se realiza o processo de estudo e aos conhecimentos pessoais dos alunos e à progressão das suas aprendizagens. Mais especificamente, recorre-se às ferramentas de significado e conflito semiótico para avaliar o conhecimento do futuro professor para ensinar probabilidades.

Hill et al. (2008) distinguem diferentes tipos de conhecimento do conteúdo, o *conhecimento comum do conteúdo*, que se refere ao conhecimento que uma pessoa (não necessariamente o professor) mobiliza para resolver problemas matemáticos, o *conhecimento especializado do conteúdo*, que se refere ao conhecimento do professor que lhe permite planificar e desenvolver sequências de ensino, e o *conhecimento no horizonte matemático*, que se refere a conteúdos mais avançados do que os que se ensinam, incluindo também aspetos históricos e filosóficos. No presente estudo enfatiza-se, principalmente, o conhecimento no horizonte matemático, assumindo-se que o professor deve dominar os conteúdos que os seus alunos irão aprender num futuro mais ou menos próximo.

No Enfoque Ontossemiótico o conhecimento, incluindo o conhecimento matemático, emerge das práticas operativas e discursivas que o sujeito realiza ao resolver uma amostra representativa de situações-problema referentes a um dado conteúdo matemático, assumindo-se, assim, uma perspetiva pragmática e semiótica do significado.

Godino e Batanero (1994) distinguem duas grandes categorias de significado: o significado de um ponto de vista institucional (estabelecido pelos estatísticos) e de um ponto de vista pessoal (relativo a cada um dos futuros professores dos primeiros anos escolares). No presente estudo, é nosso propósito investigar esta dualidade do conhecimento, institucional *versus* pessoal, a partir das respostas dadas pelos estudantes às questões sobre os diferentes tipos de acontecimentos considerados.

Para além da dualidade *institucional-pessoal*, no Enfoque Ontossemiótico reconhecem-se outras dualidades (Godino et al., 2007), de entre as quais é também relevante para o nosso estudo a dualidade *expressão-conteúdo*. Esta dualidade permite confrontar os significados dos objetos que intervêm nas funções semióticas (entendidas como correspondências estabelecidas por uma pessoa ou instituição entre um antecedente, *expressão*, e um conseqüente, *conteúdo*) com os significados institucionais de referência. No processo de comparação subjacente, a verificação de discrepâncias entre esses significados, ou seja, entre os significados institucional e pessoal (Godino & Batanero, 1994), conduz à identificação de conflitos semióticos.

Tendo em conta a dualidade do significado, institucional *versus* pessoal, podemos instituir que a finalidade do ensino é fazer coincidir, o mais possível, o conhecimento pessoal com o conhecimento institucional. Donde, Godino e Batanero (1994) definem que a compreensão de um conteúdo por um sujeito corresponde à parte do seu conhecimento pessoal que é comum com o conhecimento institucional.

Sobre os antecedentes deste estudo, em relação a diferentes tipos de acontecimentos probabilísticos (certos, impossíveis e possíveis), salienta-se o estudo de Fernandes e Barros



(2005). Nesse estudo participaram 37 futuros professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico, portanto do mesmo nível de ensino dos futuros professores envolvidos na presente investigação, tendo-se verificado que os estudantes revelaram um elevado desempenho (entre 78,4% e 97,3% respostas corretas), com dificuldades um pouco superiores em formular do que em classificar acontecimentos e em classificar acontecimentos certos do que outros tipos de acontecimentos.

No caso de alunos do 4.º, 5.º, 6.º, 7.º e 8.º ano, Fischbein, Nello e Marino (1991) concluíram que a maioria deles classificou e definiu acontecimentos corretamente (nos contextos do lançamento de um dado e de girar uma tómbola de jogo com números de 1 a 90) segundo os tipos certos, possíveis e impossíveis, verificando-se uma pequena melhoria das respostas dos alunos com a idade em todos os itens e com o estudo prévio de probabilidades na maioria dos itens, neste último caso um tanto irregular. Tal como no estudo de Fernandes e Barros (2005), verificou-se que os alunos revelaram mais dificuldades na categoria dos acontecimentos certos e na formulação de acontecimentos relativamente à sua classificação.

Também Fernandes (2000) refere que a grande maioria dos alunos do 8.º e 11.º ano (12 e 16 anos, respetivamente), que participaram no seu estudo, foram capazes de classificar acontecimentos (no contexto de extração de bolas de um saco e de lançamento de um dado) em certos, possíveis e impossíveis, verificando-se um aumento sistemático das respostas corretas com o ano escolar e com o desempenho em matemática e, à semelhança dos estudos anteriores, os alunos tiveram mais dificuldades em identificar acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos. Ainda no mesmo estudo, o autor constatou que as dificuldades de alunos do 9.º ano, sem ensino de probabilidades, aumentaram consideravelmente quando lhes foi pedido para distinguirem acontecimentos quase certos (com probabilidade próxima de 1) de acontecimentos certos e acontecimentos quase impossíveis (com probabilidade próxima de 0) de acontecimentos impossíveis. Nestas situações, muitos alunos consideraram os acontecimentos quase certos como sendo certos e os acontecimentos quase impossíveis como sendo impossíveis.

Também envolvendo futuros professores dos primeiros anos, Fernandes, Gea e Correia (2016) conduziram um estudo sobre a definição de acontecimentos certos no processo de extração de berlindes de um saco, contendo berlindes vermelhos, verdes e brancos. Nesse estudo constatou-se que os estudantes sentiram muitas dificuldades, as quais aumentaram sistematicamente com a garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas cores e um berlinde de cada uma das três cores consideradas. No caso dos berlindes das três cores, os futuros professores do estudo de Fernandes e Barros (2005) sentiram dificuldades idênticas, enquanto os futuros professores do estudo de Ortiz e Mohamend (2014) demonstraram um desempenho um pouco superior. Já os alunos do 5.º, 6.º e 7.º ano (10-13 anos) que participaram no estudo de Fischbein e Gazit (1984) revelaram maiores dificuldades ainda.

## Metodologia

Nesta investigação estuda-se o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos, na definição de diferentes tipos de acontecimentos, concretamente de acontecimentos



incompatíveis ou disjuntos, mas não complementares, de acontecimentos complementares e de acontecimentos independentes. Mais especificamente, com o estudo procura-se dar resposta aos seguintes objetivos:

1. Avaliar e comparar o desempenho dos estudantes nos três diferentes tipos de acontecimentos (incompatíveis, complementares e independentes);
2. Identificar ideias dos estudantes subjacentes às suas respostas, relacionando-as com as origens dos erros e dificuldades;
3. Extrair consequências para a formação em Probabilidades dos futuros professores dos primeiros anos.

Participaram no estudo 31 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do Norte de Portugal. Estes estudantes, futuros professores dos primeiros anos, tinham uma formação matemática muito variada à entrada na universidade, que ia desde a formação matemática obtida no final do 9.º ano à adquirida em cursos do nível de ensino secundário, como sejam cursos profissionais, cursos humanísticos e cursos científico-tecnológicos.

Os dados usados no presente estudo foram obtidos através das respostas escritas dadas pelos estudantes a um pequeno questionário de avaliação formal, aplicado no âmbito da unidade curricular de Probabilidades e Estatística que os estudantes se encontravam a frequentar. O questionário era constituído por várias questões, das quais estudamos aqui apenas uma, cujo enunciado é apresentado na Figura 1.

Lança-se, sucessivamente, um dado duas vezes e regista-se o número de pintas das faces que ficam voltadas para cima. Definir:

- a) Dois acontecimentos incompatíveis, mas não complementares;
- b) Dois acontecimentos complementares;
- c) Dois acontecimentos independentes.

Figura 1. Tarefa proposta aos estudantes.

Constata-se, assim, que foi pedido aos estudantes que definissem pares de acontecimentos, na experiência de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, devendo esses acontecimentos ser incompatíveis, mas não complementares no item a), ser complementares no item b) e ser independentes no item c).

O facto de os itens da tarefa envolverem a definição de pares de acontecimentos de uma experiência aleatória composta significa um desafio acrescido para os estudantes e um aprofundamento do seu conhecimento na componente horizonte matemático.

Por último, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes, relativamente à sua correção e incorreção e às ideias subjacentes a essas respostas. Em ambos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das ideias subjacentes a tais respostas, tendo-se usado uma tabela para resumir a informação dos tipos de respostas. Adicionalmente, tendo em vista proporcionar uma



melhor compreensão das respostas dos estudantes e da análise realizada, serão ainda apresentados alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra *E* (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 31).

## Apresentação de resultados

Na tarefa proposta foi pedido aos estudantes para definirem pares de acontecimentos de diferentes tipos na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, designadamente dois acontecimentos incompatíveis e não complementares, dois acontecimentos complementares e dois acontecimentos independentes. Na Tabela 1, apresentada a seguir, encontram-se registadas as frequências (em %) de estudantes com respostas corretas e incorretas em cada tipo de acontecimentos.

Tabela 1 – Frequência (em %) de estudantes segundo o tipo de resposta em cada item

Item	Frequência (em %) de respostas	
	Corretas	Incorretas
a) Dois acontecimentos incompatíveis, mas não complementares	13(42)	18(58)
b) Dois acontecimentos complementares	4(13)	27(87)
c) Dois acontecimentos independentes	7(23)	24(77)

Pela Tabela 1 conclui-se que os estudantes, futuros professores dos primeiros anos, tiveram muitas dificuldades em responder corretamente aos itens propostos. Verifica-se que, em qualquer dos itens, menos de metade dos estudantes deram uma resposta correta e, globalmente, no conjunto dos três itens, em média, apenas 8 estudantes, ou seja, aproximadamente 26%, responderam corretamente a qualquer dos itens. Este valor tão baixo confirma e reforça as dificuldades sentidas pelos estudantes em cada um dos itens.

Já entre os itens, constata-se que os estudantes tiveram mais sucesso em definir dois acontecimentos incompatíveis, mas não complementares (item a)), seguiu-se definir dois acontecimentos independentes (item c)) e, por fim, muito poucos estudantes foram capazes de definir dois acontecimentos complementares (item b)).

A maior dificuldade dos estudantes nos acontecimentos complementares explica-se pelo facto desses dois acontecimentos terem de ser, simultaneamente, incompatíveis e a sua reunião ter de ser o acontecimento certo. Ou seja, em termos de conjuntos, a interseção dos dois acontecimentos deve ser o conjunto vazio,  $\emptyset$ , e a reunião deve ser o universo  $U$ . Assim, neste tipo de acontecimentos têm-se de cumprir duas condições, além de que o próprio universo é definido de modo único, o que não acontece com os outros tipos de acontecimentos.



Ao longo de qualquer dos itens observa-se a dificuldade dos estudantes em definir os acontecimentos solicitados na experiência aleatória especificada no enunciado. Neste caso, em vez de definirem acontecimentos relativos ao lançamento de um dado duas vezes, portanto numa experiência aleatória composta, os estudantes definiram acontecimentos relativos ao lançamento de um dado apenas uma vez, portanto numa experiência aleatória simples. Na continuação explicam-se as respostas dadas pelos estudantes em cada um dos diferentes tipos de acontecimentos.

### **Acontecimentos incompatíveis, mas não complementares**

Nas respostas corretas salientam-se cinco estudantes que definiram os acontecimentos fixando uma ou duas faces do dado, como por exemplo: “Obter dois 5 e “Obter dois 3” ( $E_2$ ) ou “Sair 3 e 5” e “Sair 4 e 6” ( $E_{15}$ ). Repare-se que se trata de uma forma simples de definir acontecimentos incompatíveis e não complementares.

Os restantes estudantes, num total de oito, definiram pelo menos um dos dois acontecimentos de forma mais genérica, como por exemplo: “Sair dois números ímpar” e “Sair o número 2” ( $E_{11}$ ) ou “Saírem dois números pares” e “A soma dos dados dar 7” ( $E_{14}$ ).

Já as respostas incorretas resultaram, na sua grande maioria, da consideração de acontecimentos resultantes da experiência aleatória de lançamento do dado apenas uma vez. Do total dos 36 acontecimentos definidos, 30 referem-se ao lançamento do dado apenas uma vez, como acontece por exemplo: “Sair o número 5” e “Sair o número 2” ( $E_{31}$ ) ou “Sair um número maior que 3 e “Sair o número 1” ( $E_7$ ). Os restantes 6 acontecimentos envolvem o lançamento de um dado duas vezes, mas não são incompatíveis como acontece com os acontecimentos: “Sair dois números ímpares” e “Sair dois múltiplos de três” ( $E_4$ ).

### **Acontecimentos complementares**

Neste item, foram apenas quatro os estudantes que foram capazes de definir dois acontecimentos complementares na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas. Nestes acontecimentos, diferentemente do item anterior, uma resposta correta não pode resultar da fixação de uma ou duas faces do dado pois a reunião dos acontecimentos tem de dar o universo, constituído por 36 resultados possíveis simples. Ora, esta exigência, naturalmente, dificulta a definição dos acontecimentos complementares. Neste caso, apenas se salientam os acontecimentos “Sair números diferentes” e “Sair números iguais”, que foram referidos por dois estudantes ( $E_1$  e  $E_{14}$ ).

A maioria das respostas incorretas, referentes aos restantes 27 estudantes, tal como no item anterior, resultaram da definição de acontecimentos na experiência aleatória de lançamento do dado uma vez. Ao todo, foram 44 os acontecimentos nessas condições, de entre os quais se salientam largamente os acontecimentos “Sair número par” e Sair número ímpar” ( $E_3$ ), que foram adotados por um total de 18 estudantes.





Apesar de terem conduzido também a respostas incorretas, observaram-se 10 acontecimentos envolvendo a experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, como é o caso dos exemplos: “Sair dois números ímpares” e “Sair dois números pares” ( $E_{23}$ ), em que a sua reunião não é o universo, ou “Sair número par no 1.º lançamento” e “Sair número ímpar no 2.º lançamento” ( $E_{12}$ ), que não são acontecimentos incompatíveis.

### Acontecimentos independentes

Tendo em conta que nos dois lançamentos do dado, o resultado do primeiro lançamento não afeta o resultado do segundo lançamento, esperava-se que os estudantes tivessem maior sucesso em definir dois acontecimentos independentes. Contudo isso não se verificou, tendo apenas sete estudantes definido corretamente tais acontecimentos. São exemplos corretos, os acontecimentos: “Sair múltiplos de 2” e “Sair múltiplos de 3” ( $E_8$ ) ou “Sair a face 3 no 1.º lançamento” e “Sair a face 5 no 2.º lançamento” ( $E_{20}$ ).

Tal como se verificou nos dois itens anteriores, também neste as respostas incorretas dos estudantes resultaram frequentemente de definir acontecimentos da experiência aleatória de lançamento do dado apenas uma vez. Do total de 48 acontecimentos incorretos definidos, 40 referem-se ao lançamento do dado apenas uma vez, como acontece com os acontecimentos “Sair número par” e “Sair número ímpar” ( $E_7$ ) ou “Sair um número múltiplo de 3” e “Sair um número par” ( $E_{17}$ ).

Independentemente dos acontecimentos se referirem ao lançamento do dado uma ou duas vezes, os estudantes parecem ter confundido a independência com a incompatibilidade dos acontecimentos, como mostram os seguintes exemplos: “Sair um número maior que 3” e “Sair um número menor ou igual a 3” ( $E_{15}$ ), acontecimentos que foram referidos por mais quatro estudantes, ou “Obter dois números pares” e “Obter dois números ímpares” ( $E_{24}$ ).

### Discussão e conclusões

Do estudo exploratório realizado conclui-se que os estudantes, futuros professores dos primeiros anos, sentiram muitas dificuldades em definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes na experiência aleatória de lançamento de um dado duas vezes. Comparando o desempenho dos estudantes nos itens, verifica-se que ele foi um pouco melhor aquando da definição de acontecimentos incompatíveis, mas não complementares, diminuindo aquando da definição de acontecimentos independentes e, mais ainda, aquando da definição de acontecimentos complementares.

Confrontando os resultados do presente estudo com os resultados dos estudos antes revistos (Fernandes & Barros, 2005; Fernandes et al., 2016; Fernandes, 2000; Fischbein et al., 1984; Fischbein et al., 1991), conclui-se, de forma clara, que os estudantes tiveram muitas mais dificuldades na definição de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes do



que os alunos, mesmo de níveis de escolaridade anteriores, tiveram na classificação e definição de acontecimentos certos, impossíveis e possíveis.

A essas dificuldades dos estudantes não será certamente indiferente o facto de os acontecimentos deverem ser definidos na experiência de lançamento de um dado duas vezes consecutivas, portanto acontecimentos de uma experiência aleatória composta. A esse respeito, num estudo anterior, envolvendo também futuros professores dos primeiros anos, Fernandes, Gea e Batanero (2016) constataram que os estudantes tiveram muitas dificuldades em comparar probabilidades de acontecimentos na experiência aleatória de extração de duas bolas de um saco. Perante a situação, os estudantes não foram capazes de relacionar as probabilidades nas experiências simples para obter a probabilidade na experiência composta, não consideraram a não reposição ou não atenderam à ordem para identificar os resultados da experiência composta.

Do presente estudo conclui-se que as dificuldades dos estudantes na determinação de probabilidades em experiências compostas também se manifestam na definição de acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. Compreender matematicamente a experiência aleatória estabelecida no enunciado da tarefa foi a dificuldade sentida por mais alunos em todos os tipos de acontecimentos, que ao considerarem a experiência de lançamento do dado apenas uma vez reduziram substancialmente a complexidade da tarefa que lhes tinha sido proposta. Assim, em termos formativos, é importante que os estudantes sejam capazes de distinguir e relacionar acontecimentos em experiências simples e acontecimentos em experiências compostas.

No caso dos acontecimentos independentes, deve-se ter ainda em consideração as muitas dificuldades experienciadas pelos estudantes no conceito de probabilidade condicionada, designadamente confundir a probabilidade condicional  $P(A|B)$  com a sua transposta  $P(B|A)$ , confundir condicionamento com causalidade e aderir à falácia do eixo temporal, em que o sujeito rejeita que um acontecimento que se realizou depois possa influenciar a probabilidade de um acontecimento que se realizou antes (Batanero, Gea & Álvarez-Arroyo, 2020). Dificuldades deste tipo foram observadas em futuros professores dos primeiros anos por Fernandes, Batanero e Correia (2014).

Outra conclusão que ressalta do estudo é o melhor desempenho dos estudantes nos acontecimentos incompatíveis, mas não complementares. Neste tipo de acontecimentos observou-se que alguns estudantes (cinco ao todo) fixaram resultados específicos para o primeiro e segundo lançamentos do dado, por exemplo “Obter um 2 e um 5” e “Obter dois 3”. Ora, esta estratégia simplifica a definição dos acontecimentos incompatíveis e explica o melhor desempenho dos alunos neste tipo de acontecimentos em relação aos acontecimentos complementares. Contudo, ela não leva, necessariamente, a definir corretamente dois acontecimentos complementares uma vez que a sua reunião tem de ser o acontecimento certo, ou seja, o espaço de resultados em termos de conjuntos. Também este resultado do estudo oferece implicações didáticas em termos do ensino dos acontecimentos incompatíveis *versus* acontecimentos complementares, devendo ser discutidas com os estudantes as potencialidades e as limitações dos exemplos apresentados.

Por último, independentemente de definirem acontecimentos relativos às experiências aleatórias de lançamento do dado duas vezes ou apenas uma vez, vários estudantes consideraram que acontecimentos incompatíveis e/ou complementares seriam independentes. Uma tal confusão entre os vários tipos de acontecimentos reforça a conveniência dos futuros professores estudarem



dois acontecimentos, simultaneamente, em relação à incompatibilidade, à complementaridade e à independência, como acontece com a tarefa aqui explorada. Deste modo, com tais tarefas, espera-se que os estudantes concluam que os acontecimentos complementares são também incompatíveis, os acontecimentos incompatíveis não são necessariamente complementares e que qualquer destes dois tipos de acontecimentos (incompatíveis e complementares) não podem ser independentes, a não ser que um desses acontecimentos tenha probabilidade nula. A este respeito, tal como se verificou neste estudo, Sánchez (1996) refere que os estudantes confundem independência com incompatibilidade dos acontecimentos. Apesar dessa confusão dos estudantes, os conceitos de incompatibilidade e independência

exprimem relações completamente diferentes, na medida em que a incompatibilidade de acontecimentos é uma propriedade inerente aos acontecimentos, não sendo necessário ter definido nenhuma probabilidade, enquanto que a independência de acontecimentos depende do modelo de probabilidade que se tenha definido no espaço de resultados onde estão definidos os acontecimentos". (Martins, 2017, p. 4)

## Referências

- Alves, M. P., & Fernandes, J. A. (2015). Alterações do programa de matemática do ensino básico português: o caso do tema Organização e Tratamento de Dados. *Olh@res*, 3(1), 280-305.
- Batanero, C., Gea, M. M., & Álvarez-Arroyo, R. (2020). Comprendiendo la independencia y el condicionamento. *UNO*, 89, 7-13.
- Fernandes, J. A. (2000). Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Fernandes, J. A., & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM). Porto (Portugal): Faculdade de Ciências.
- Fernandes, J. A., & Freitas, A. (2019). Selection and Application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, 21(6), 82-97.
- Fernandes, J. A., & Gea, M. M. (2018). Conhecimento de futuros professores dos primeiros anos escolares para ensinar probabilidades. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 14, 15-30.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F., & Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, 23(1), 43-61.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M. & Correia, P. F. (2016). Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco. *Acta Scientiae*, 18(1), 83-100.
- Fernandes, J. A., Gea, M. M., & Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. In J. A. Macías et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 217-225). Málaga: SEIEM.
- Fernandes, J. A., Viseu, F., & Gea, M. M. (2016). O conhecimento de Probabilidades de futuros educadores e professores dos primeiros anos. In L. G. W. Coan & M. T. Moretti (Orgs.), *Aplicações matemáticas com Tecnologias de Informação e Comunicação* (pp. 123-142). Florianópolis, SC: Editora Insular.



- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.
- Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 523-549.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 39(1/2), 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Martins, E. G. M., (2017). *Acontecimentos independentes*. *Revista de Ciência Elementar*, 5(4), 1-4.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.
- Ortiz, J. J., & Mohamend, N. (2014). Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Cuadrante*, 23(2), 5-22.
- Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.