

Observar, manipular e comunicar sequências e regularidades da Ribeira do Porto

Observe, manipulate and communicate sequences and regularities of the Ribeira of Porto

Catarina Baptista dos Santos Cravo Martins

ESE P. Porto
catarinacravo97@gmail.com
Professora Estagiária

Dárida Maria Fernandes

ESE P. Porto
InED
daridafernandes4@gmail.com

Investigadora Integrada do InED e Professora Supervisora Institucional na área de Matemática

Teresa Maria Barata de Jesus Guedes

ESE P. Porto
guedesteresa1965@gmail.com
Professora Orientadora Cooperante na área de Matemática

Resumo:

No âmbito do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, foi desenvolvida uma sequência didática na leção dos conteúdos “sequências e regularidades”, no 6.º ano de escolaridade, num contexto significativo de aprendizagem e usando materiais manipuláveis, alusivos à envolvência cultural construída. Neste estudo de caso usou-se uma metodologia qualitativa e interpretativa. Esta sequência didática teve como mote um conjunto de problemas do contexto real da Ribeira do Porto e a sua resolução requeria o uso de fósforos para construir as sequências propostas. Os estudantes revelaram muito gosto e empenho na procura de estratégias diferentes e na descoberta de soluções. Expuseram as suas ideias, desenvolvendo a comunicação e o raciocínio matemáticos, numa valorização individual constante até chegarem ao *Clever Day*, uma motivação extra, proposta pelo “Método de Singapura”. A sistematização e a avaliação dos conteúdos lecionados revelaram que a sequência didática foi uma proposta positiva e significativa no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Sequências e Regularidades; Método de Singapura; Materiais Manipuláveis; Matemática em Contexto.

Abstract:

Within the scope of the Master in Teaching of the 1st Cycle of Basic Education (CEB) and Mathematics and Natural Sciences in the 2nd CEB, a didactic sequence was developed in the teaching of sequences and regularities in the 6th year of schooling, in a meaningful learning



context and using manipulative materials, alluded to the constructed cultural environment. In this case study, a qualitative and interpretative methodology was used. This didactic sequence had, as its motto, a set of problem solving in the real context in the Ribeira of Porto and using matches to build the proposed sequences. The students showed great taste and commitment when designing different strategies and in finding solutions. They exposed their ideas, developing mathematical communication and reasoning, in a constant individual appreciation until they reached *Clever Day*, an extra motivation, proposed by the “Singapore Method”. The systematization and evaluation of the taught contents revealed that the didactic sequence was a positive and significant proposal in the teaching and learning process of Mathematics.

Keywords: Sequences and Regularities; Singapore method; Manipulative Materials; Mathematics in Context.

Résumé:

Dans le cadre du Master en Enseignement au 1^{er} Cycle d’Enseignement de Base (CEB) et de Mathématiques et Sciences Naturelles au 2^{ème} CEB, une séquence didactique a été développée dans l’enseignement des séquences et des régularités en 6^{ème} année de scolarité, dans un contexte d’apprentissage significatif et utilisant des matériaux manipulables, faisant allusion à l’environnement culturel construit. Dans cette étude de cas, une méthodologie qualitative et interprétative a été utilisée. Cette séquence didactique a eu pour point de départ un ensemble de problèmes en contexte réel à *Ribeira* de Porto et sa résolution a impliqué l’utilisation d’allumettes pour construire les séquences proposées. Les étudiants ont montré un grand plaisir et engagement dans la recherche de différentes stratégies et la découverte de solutions. Ils ont exposé leurs idées, développant la communication et le raisonnement mathématiques, dans une valorisation individuelle constante jusqu’à ce qu’ils atteignent le *Clever Day*, une motivation supplémentaire, proposée par la «Méthode de Singapour». La systématisation et l’évaluation du contenu enseigné ont révélé que la séquence didactique a été une proposition positive et significative dans le processus d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques.

Mots-clés: Séquences et régularités; Méthode de Singapour; Matériaux manipulables; Mathématiques en contexte.

Introdução

No PISA 2018, os estudantes portugueses não evoluíram significativamente na área da Matemática (Schleicher, 2019). Também no Estado da Educação 2018 (Conselho Nacional de Educação, 2019), no Ensino Básico, em Matemática, registou-se uma maior percentagem de estudantes com classificações pouco satisfatórias. Afirmar-se como problemática a existência de insucesso e consequente desinteresse dos estudantes na Matemática. Urge a necessidade de tentar colmatar ou minorar esta lacuna, procurando propor atividades significativas aos estudantes, em sequências didáticas contextualizadas e consistentes, que produzam conhecimento matemático compreendido e articulado.

Neste estudo, optou-se por usar as potencialidades de um material da vida real manipulável – os fósforos – com o intuito de motivar os estudantes e assegurar uma ligação mais estreita da Matemática com o quotidiano. Procurou-se inovar e conjugar o concreto com os conteúdos matemáticos mais abstratos, presentes no domínio da Álgebra, tornando a aprendizagem “mais significativa



e duradoira” (Fernandes, 2018). Neste contexto, “*manipular*” sequências e regularidades exige aos estudantes que as observem com atenção e que discutam/comuniquem as suas descobertas, desenvolvendo processos metacognitivos, através da comunicação matemática (Fernandes, 2017).

Este estudo mobiliza a revisão da literatura nas dimensões conceptual, programática e pedagógica, seguida da metodologia. Os resultados incluem a sequência didática desenvolvida nas aulas, numa perspetiva reflexiva e de formação de professores, contemplando a análise e as respetivas conclusões.

Espera-se que este estudo possa apoiar e melhorar futuras práticas da formação de professores, numa perspetiva de enriquecimento pessoal e profissional, de modo que esta disciplina seja um fator de desenvolvimento individual, ao alcance de todos e de cada um (Caraça, 1989).

Questão e objetivos

Este estudo focaliza-se em três dimensões: *humana*, no sentido de perceber qual a atitude dos estudantes perante esta proposta; *conceptual*, tentando perceber quais as competências científicas que desenvolvem, ao nível da aquisição e da mobilização do conteúdo em estudo; *pedagógico-didática*, compreendendo a importância do contexto na descoberta/construção do próprio conhecimento, numa perspetiva individual e social (Vygotsky, 1979).

Assim, formulou-se a questão investigativa: “*Quais as potencialidades educativas da construção de uma sequência didática contextualizada e próxima da realidade da criança, relacionada com a lecionação de sequências e regularidades, no 6.º ano de escolaridade?*”. Tendo por base esta questão, traçaram-se três objetivos fundamentais: (i) Identificar as potencialidades do uso do contexto da Ribeira do Porto, aliado à utilização de materiais manipuláveis na resolução de problemas, relacionados com a compreensão do conteúdo sequências e regularidades do 6.º ano de escolaridade; (ii) Analisar as atitudes dos estudantes perante esta abordagem pedagógico-didática, designadamente, no desenvolvimento de estratégias diferenciadas de resolução dos desafios propostos; (iii) Averiguar o nível de compreensão deste conteúdo, designadamente, na descoberta de uma lei que rege o fenómeno, enunciada oralmente e por escrito.

Contextualização teórica

Dimensão conceptual e programática¹

Este estudo focaliza a aprendizagem da compreensão de sequências pictóricas e numéricas crescentes (infinitas). Por isso, importa conceptualizar as noções de sequência e regularidade.

As sequências são listas de números – sequências numéricas – ou figuras/pictogramas – sequências pictóricas – que apresentam uma determinada regularidade repetitiva ou crescente –

¹ Algumas investigações sobre estes conceitos já foram realizadas, como em Borralho, Cabrita, Palhares e Vale (2007) e Canavarro (2007).



sequências repetitivas e sequências crescentes, respetivamente (Ponte, Branco & Matos, 2009). Uma sequência (crescente) possui os seguintes conceitos matemáticos:

- Termo, que é um elemento que integra a sequência; ordem, que diz respeito à posição, de um qualquer termo, na sequência; lei de formação, a regra que permite a sua construção; e expressão geradora, uma expressão algébrica que permite determinar qualquer termo (ou ordem) da sequência (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Uma sequência crescente é constituída por termos diferentes, cada um com uma ordem, estando dependente do termo da ordem imediatamente anterior. As sequências elencam “a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.40), desenvolvendo o pensamento algébrico. Este deve ser trabalhado desde cedo, pois permite “representar, raciocinar e resolver problemas” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.10).

Na Álgebra, trabalhar as sequências e regularidades tem grande importância no desenvolvimento do pensamento algébrico, em qualquer nível educativo, pois as tarefas que envolvem “generalizações, além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e o raciocínio matemático” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p.41). Nestas tarefas, devem ser trabalhados os raciocínios indutivo e dedutivo, que permitem estabelecer relações/conexões matemáticas do particular para o geral e vice-versa (Fernandes, 2006, 2019; Ponte, Branco & Matos, 2009).

No *Programa e Metas Curriculares de Matemática* (Damião et al., 2013), a temática abordada insere-se no domínio da *Álgebra*, no subdomínio *Sequências e Regularidades*. A mesma encontra-se nas *Aprendizagens Essenciais de Matemática do 6.º ano* (Direção-Geral da Educação, 2018), no tema *Álgebra – Sequências e Regularidades*, cujo objetivo envolve *determinar uma lei de formação de uma sequência numérica ou não numérica e uma expressão algébrica que represente uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é constante*. Também o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (Martins et al., 2017) abrange os conhecimentos, as capacidades e as atitudes dos estudantes, características fundamentais numa criança/adolescente. Esse documento é essencial na preparação, desenvolvimento e finalização de uma sequência didática, e apresenta descritores essenciais a serem desenvolvidos, como ser *conhecedor, indagador, sistematizador/organizador, questionador, comunicador, autoavaliador, participativo/colaborador e autónomo*. Destacam-se, ainda, as capacidades matemáticas transversais que envolvem o afinçado desenvolvimento da *Resolução de Problemas*, da *Comunicação* e do *Raciocínio Matemáticos*.

Dimensão pedagógica

i. Matemática em Contexto

“A Matemática afeta, sem dúvida, quase todos os aspetos da nossa vida” (Fernandes, 2006, p.68), exigindo, em sala de aula, o usufruto de um contexto significativo nas situações



do quotidiano, através do contacto “com realidades diversificadas fora” dela (Fernandes, 2006, p.67).

Em 1991, surgiu a “Matemática em Contexto” – *Mathematics in Context* (MiC) –, um projeto da Universidade de Wisconsin-Madison e do Instituto Freudenthal, que tem produzido resultados impressionantes (Dickinson & Hough, 2012; Romberg & Meyer, 2001). Intrínseca à abordagem “Educação Matemática Realista” – *Realistic Mathematics Education* –, que enfatiza a compreensão e resolução de problemas, a MiC tem como objetivo desenvolver a compreensão matemática, trabalhando contextos reais significativos, sob sequências didáticas cuidadosamente construídas, reforçando desde a compreensão de conceitos matemáticos concretos até aos mais abstratos, ocorrendo uma transição gradual do informal para o formal. Os contextos reais para os estudantes devem permitir-lhes que “se apropriem da Matemática”, não sendo necessariamente “problemas do mundo real” (Dickinson & Hough, 2012, p.3).

Os currículos que integram a MiC possuem unidades com conceitos de vários domínios, explorando a sua interconectividade através de tarefas que desenvolvem e valorizam várias estratégias de resolução, usando ferramentas adequadas e trabalhando colaborativamente. Os estudantes são estimulados a explicar o modo como pensam e resolvem as tarefas, desenvolvendo a comunicação e o raciocínio matemáticos. Os docentes ajudam-nos a compreender e encorajam-nos a usar os termos e regras matemáticos, auxiliando-os a articular e organizar o pensamento (Romberg, 2001). A MiC importa ser trabalhada:

- *Pela motivação e interesse que provoca nos estudantes, através do uso de um currículo enriquecido e vívido;*
- *Pelo reforço existente na conectividade de aprendizagens matemáticas, relacionada com a Matemática e com problemas reais, além de ser visível o positivo aproveitamento nas avaliações* (Boaler, 1993; Dickinson & Hough, 2012).

Em sala de aula, caracteriza-se pelo uso de materiais de experimentação e de abordagens pedagógico-didáticas que contemplam situações reais, pela frequente aposta em momentos reflexivos, de discussão e sistematização e pela ênfase na lecionação gradual de conteúdos matemáticos (Dickinson & Hough, 2012).

ii. O Método de Singapura (MS)²

De acordo com o TIMSS 2015, Singapura destaca-se positivamente na avaliação de desempenho dos estudantes dos 4.º e 8.º anos de escolaridade, em Matemática (Marôco, Lourenço, Mendes & Gonçalves, 2016). No PISA 2018, Singapura é um dos países com maior prestígio (Schleicher, 2019), merecendo a análise do *Singapore math method* – “O Método de Singapura” (MS).

² Esta proposta envolveu algumas características do MS, analisadas noutros estudos, como em Dinis, Teixeira & Pacheco (2019).



O MS focaliza-se no conhecimento aprofundado, alcançado pela sequência intencional de conceitos. Uma das principais características é a abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA), proposta por Bruner (1966) e Piaget (1975), que expõe as fases do conhecimento matemático.

No MS, é essencial permitir aos estudantes que percecionem a Matemática como elemento integrante do dia a dia, importante e acessível, tendo uma linguagem universal e sendo fundamentalmente na/para a vida (*Singapore Math Inc.*, 2020).

iii. A abordagem CPA

A abordagem CPA aprofunda o conhecimento matemático pela construção de conhecimentos prévios. Essa estrutura introduz conceitos de forma tangível e progride para níveis crescentes de abstração (*Singapore Math Inc.*, 2020).

No concreto, os estudantes interagem com objetos físicos para resolver tarefas matemáticas. Esta manipulação de objetos prioritariamente reais (mais significativos) ajudam na visualização de conceitos mais abstratos, expondo-os no concreto, motivando os estudantes a aprender Matemática e provocando uma progressiva consolidação dos conteúdos. No pictórico, ocorre uma conexão mental entre os objetos manipulados e as suas representações visuais, substituindo-os por esquemas representativos. No abstrato, resolvem-se tarefas pelo uso de símbolos, com crescente estímulo à abstração, evoluindo de registos pictográficos/iconográficos para registos simbólicos (Fernandes, 2017; *Singapore Math Inc.*, 2020; Teixeira, 2015). Qualquer uma destas fases incorpora uma outra – a Verbalização –, onde se desenvolve a comunicação matemática, oral e escrita (Fernandes, 2017).

Ao variar os métodos e as fases da abordagem CPA, articula-se o conhecimento e os professores ajudam a reforçar conexões matemáticas nas quais os estudantes trabalham matematicamente quando visualizam conceitos com níveis crescentes de abstração ao longo do tempo (*Singapore Math Inc.*, 2020). Este percurso didático insere-se numa abordagem em espiral de conceitos, procedimentos e processos e com recurso a múltiplas representações. Como toda a aprendizagem é cumulativa e evolutiva, os conteúdos matemáticos de um nível da espiral são integráveis nos níveis seguintes. Esta ordenação deve ser realizada sem saltar níveis, tendo como ponto de partida o concreto, especialmente em idades elementares e de acordo com as características do grupo de estudantes (Teixeira, 2015), reconhecendo-se duas máximas: “menos é mais” e “*step by step*” (Fernandes, 2017).

iv. Resolução de problemas como abordagem do “Método de Singapura” (MS)

Um ambiente educativo baseado na resolução de problemas apela à motivação dos estudantes e conseqüente redução do insucesso na Matemática, pois esta abordagem propõe uma estreita “ligação entre a realidade e a sala de aula”, trabalhando “diferentes conceitos matemáticos” em simultâneo (Alvarenga & Vale, 2007, p.29).



No MS, a resolução de problemas ocupa uma posição central e está dependente de cinco componentes inter-relacionadas: os conceitos, as competências, os processos, a metacognição e as atitudes. Os *conceitos* matemáticos devem ser trabalhados de forma articulada e diversificada, para serem compreendidos em profundidade. Para tal, é necessário explorar tarefas que possibilitem a manipulação de materiais concretos, para proporcionar maior conforto e confiança em resolver problemas (Eric, 2009; Kaur & Har, 2009; *Ministry of Education*, 2006); as *competências* devem ser trabalhadas partindo da compreensão dos princípios matemáticos a elas subjacentes, desenvolvendo a aprendizagem numa perspetiva de *why before how* – valorizar o porquê antes do processo (Albert, Bowen & Tansey, 2009; Fernandes, 2017; *Ministry of Education*, 2006); os *processos* incluem aspetos como o raciocínio, a comunicação e as conexões matemáticas (*Ministry of Education*, 2006); a *metacognição* refere-se à consciencialização e controlo (d)o próprio pensamento. Desenvolve-se pelo uso de estratégias de resolução de problemas, expondo-as/discutindo-as em voz alta (Fernandes, 2017; *Ministry of Education*, 2006); as *atitudes* (dos estudantes face à Matemática) referem-se aos aspetos afetivos, que evoluem consoante as experiências de aprendizagem. O papel do(a) professor(a) é, pois, imprescindível na criação de um ambiente educativo interessante, apreciado por todos, estimulando o gosto pela Matemática (*Ministry of Education*, 2006).

A resolução de problemas permite a aplicação e desenvolvimento de vários processos mentais. Estes espelham-se na construção, discussão, partilha e reflexão de diversas estratégias de resolução de problemas, associando-se “à criatividade e à curiosidade” dos estudantes, proporcionando “entusiasmo e sucesso” nas aulas de Matemática (Alvarenga & Vale, 2007, p.29).

Metodologia

Nesta secção, caracterizam-se o contexto educativo, as sessões que compuseram a sequência didática construída, a natureza do estudo e as técnicas e instrumentos de recolha e análise dos dados.

Contexto educativo

Este estudo foi realizado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, num 6.º ano de escolaridade de uma escola do distrito do Porto, com 25 estudantes, 13 do sexo feminino e 12 do masculino, com idades compreendidas entre os 11 e os 13 anos, que apresentavam dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos abstratos, não possuindo autonomia na resolução de tarefas. Apesar de, na avaliação sumativa, vários estudantes possuírem classificações satisfatórias, a maioria demonstrava dificuldade na compreensão dos conteúdos matemáticos. Quando eram propostas tarefas em formato de problema, a dificuldade de resolução aumentava.

Sessões e tarefas da sequência didática

A sequência didática envolveu três sessões. A primeira e segunda corresponderam à aula formalmente estipulada no horário escolar e realizaram-se de forma seguida, com um intervalo de 10 minutos entre elas.

Na primeira sessão, a tarefa realizada (figura 1) abrangeu a abordagem inicial do conteúdo, através da manipulação do material didático proposto. O objetivo, nesta sessão, era explorar os fósforos, manipulando-os e construindo, paulatinamente, a sequência (figura 1), visualizando, concretamente, a lei de formação, à medida que se introduzia o conteúdo matemático.

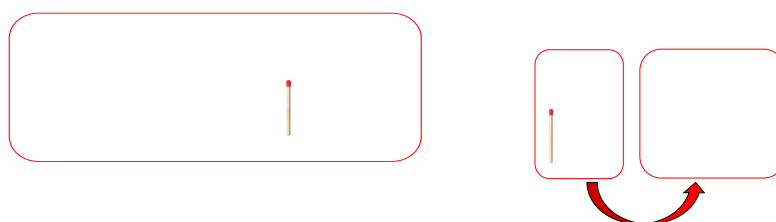


Figura 1: Tarefa da primeira sessão – construção da sequência

Na segunda sessão, as tarefas realizadas (figura 2) estavam em formato de desafios, projetados num *PowerPoint* interativo, coincidindo com um ambiente de resolução de problemas. O primeiro desafio (Desafio dos andares) permitia o uso intencional dos fósforos. No segundo (Desafio do restaurante) isso já não era possível, pelo próprio contexto do enunciado. Este percurso de aprendizagem foi desenhado com o intuito de permitir um aumento gradual de dificuldade, desprendendo os estudantes do contacto com o concreto.

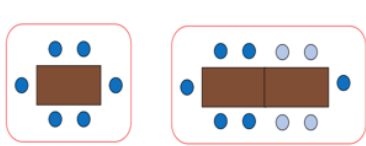
Desafio dos andares	Desafio do restaurante
Tal como apresentado na figura, uma casa da Ribeira com um andar corresponde a seis fósforos dispostos desta forma, sendo que dois andares correspondem a um total de nove fósforos.  Se eu construir uma casa da Ribeira utilizando 21 fósforos, quantos andares terá a casa?	O espaço de um restaurante situado na Ribeira foi alugado, para se realizar um evento no início do Ano 2020. Nesse restaurante, só existem mesas retangulares, tal como mostra a figura. Em cada mesa cabem seis pessoas.  Sabendo que nesse evento vão estar 50 pessoas, quantas mesas é que o dono do restaurante precisa de juntar para as receber?

Figura 2: Tarefas da segunda sessão



Na terceira sessão, realizou-se a auto e heteroavaliação, através do preenchimento de uma grelha de observação e de um guião correspondente. Este momento, aplicado numa aula de 50 minutos, durou cerca de 15/20 minutos.

Natureza da metodologia

O quadro metodológico desta investigação tem por base o paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), tomando por *design* o estudo de caso exploratório que procura compreender um fenómeno concreto (Yin, 2010), figurando-se numa abordagem qualitativa. O estudo centra-se na problemática das práticas de ensino de Matemática. A coleta de dados ocorreu numa turma do 6.º ano, num contexto real de sala de aula, previamente observado, e através da interação entre os estudantes e a professora estagiária.

Este estudo perspetiva uma ampliação de conceções perante um processo de aprendizagem e ensino construído com base nas potencialidades da Matemática em Contexto e do “Método de Singapura”, num ambiente de resolução de problemas e da manipulação de objetos concretos. O estudo de caso procura detalhar pormenores observáveis, analisando/interpretando os diálogos em sala de aula e a aprendizagem desenvolvida nesta, expondo, com maior pormenor, “os pensamentos e os significados” (Ponte, 2005, p.111).

As investigadoras deste estudo procuraram atuar “na transformação desse terreno e dos próprios participantes” (Ponte, 2005, p.112). Este estudo teve como momento especial de recolha de dados a reflexão pós-ação grupal, no qual intervieram a professora estagiária, o seu par pedagógico, a supervisora institucional e a professora orientadora cooperante. A professora estagiária planeou e orientou a sequência didática, tendo sido acompanhada pelas suas orientadoras. Em sala de aula, foi observando e recolhendo os dados, refletindo *a posteriori* sobre a prática educativa, numa partilha grupal de conceções e perspetivas pedagógicas. A participação ativa permitiu interpretar os acontecimentos, evitando uma postura intrusiva/ameaçadora e uma modificação no comportamento dos estudantes (Bogdan & Biklen, 1994).

Técnicas e instrumentos de recolha e análise dos dados

Para recolher informação relevante a este estudo, selecionaram-se técnicas e instrumentos de recolha de dados, designadamente: a observação participante grupal, as reflexões produzidas em grupo, as anotações de diálogos e as produções dos estudantes em vários suportes. Analisaram-se os documentos de auto e heteroavaliações, disponibilizados aos estudantes, e as respostas à pergunta *Qual(ais) o(s) aspeto(s) da aula que consideram ter(em) contribuído positivamente para a vossa aprendizagem?*. Também foram observados comportamentos e atitudes dos estudantes em sala de aula, desde as suas interações à resolução das tarefas, e efetuadas notas de campo e registos fotográficos.



Resultados

Momento de motivação/problematização

Após uma breve caracterização da Ribeira do Porto, os estudantes contactaram com a noção (interdisciplinar) de casa geminada, essencial para incorporar os conhecimentos seguintes (Fernandes, 2017; Piaget, 1975). Este momento teve, como principal objetivo, facilitar a introdução do novo conteúdo, despoletando a atenção dos estudantes para as novas aprendizagens, com ativação de conhecimentos prévios, criando-se um ambiente educativo (familiar) de apoio ao desenvolvimento da sequência didática (Fernandes, 2013, 2019). Foi introduzido um material manipulável real (figura 3), conhecido pelos estudantes – os fósforos –, que simulou, de forma estilizada e visualmente (no concreto), a noção de casa geminada.



Figura 3: Material manipulável – fósforos

Os materiais didáticos podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo: apresentar um assunto, motivar os estudantes, auxiliar na memorização de resultados e facilitar a re-descoberta. Esta escolha deve ser adequada e realizada de “forma cuidadosa, para que se tenha o devido sucesso durante a atividade manipulativa” (Rodrigues & Gazire, 2012, p.192). Os fósforos foram modificados, instalando-se uma proteção extra: colocou-se tinta na zona de fricção de cada fósforo. Este material surgiu como adequado, porque algumas casas da Ribeira, por serem antigas, ainda usam fogões a gás, pelo que, para os acender, são necessários fósforos ou isqueiros.

Professora Estagiária (PE): *E nas vossas casas? Também usam fósforos?*

Estudante (E) 1: *Sim! Eu uso.*

E2: *Na minha casa não! O fogão é elétrico, por isso só se carrega em botões!*

Os estudantes conheceram, manipulando, o material que lhes foi dado, resolveram e refletiram (sobre) tarefas que envolveram a construção de casas representativas das da Ribeira, aprendendo através do concreto (Rodrigues & Gazire, 2012).

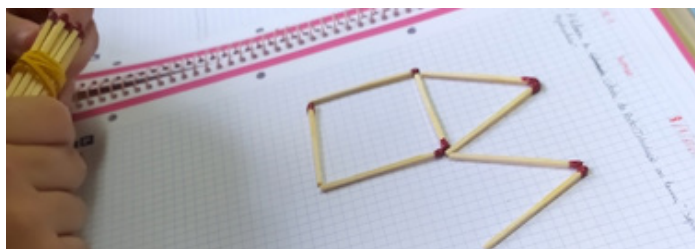


Figura 4: Processo de construção representativa de duas casas da Ribeira

Introdução do novo conteúdo matemático

Na tarefa seguinte, alguns estudantes demonstraram dificuldade em interpretar o enunciado, durante a construção e representação:

PE: *Com o conjunto de fósforos que vos foi distribuído, construam uma casa da Ribeira tal e qual como está aqui no quadro.*

E1: *Professora, mas com estes fósforos todos?*

PE (Apontando para a projeção): *Não. Apenas com os que necessitam para construir uma casa idêntica à que está representada no ecrã.*

Enquanto efetuavam as construções, a PE ia percorrendo a sala de aula, observando e verificando se todos cumpriam com sucesso as tarefas. A estrutura da sala estava em forma de “U”, proporcionando um melhor e individual acesso/acompanhamento, para se perceber o desenvolvimento do raciocínio matemático da turma e da construção de conhecimentos. Os estudantes partilhavam, dois a dois, uma mesa, comunicando as suas ideias colaborativamente. O *design* da sala foi determinante neste percurso de aprendizagem, permitindo à PE estimular a turma, para que encontrasse diversas estratégias de resolução, acompanhando-a, ou individualmente, ou em grupo, ao longo da exploração de cada tarefa (Fernandes, 2013).

À medida que os estudantes iam respondendo às questões orientadoras seguintes, as mesmas foram registadas no quadro e convertidas numa tabela (figuras 5 e 6).

PE: *Para construir uma casa, quantos fósforos usaste?*

E1: *Eu usei seis fósforos.*

PE: *Todos usaram seis fósforos?*

Vários estudantes: *Sim!*

PE: *Muito bem! E onde foram colocados os fósforos?*

Vários estudantes: *Quatro na base da casa a formar o quadrado e dois no telhado.*



Através das questões orientadoras, os estudantes contactaram progressivamente com novos conceitos matemáticos, juntamente com a exploração de tarefas significativas, aliadas a questões inspiradoras dos estudantes (Fernandes, 2013).

Na tarefa de construção de duas casas solicitada pela PE, foram apresentados dois raciocínios matemáticos distintos:

E2: *Eu usei 11 fósforos.*
PE: *Todos usaram 11?*
E3: *Eu não, usei 12.*
PE: *Quem será que tem razão?*

A PE deu tempo para os estudantes pensarem e E3 e E4 argumentaram as suas perspetivas, sugerindo que ambos podiam ter razão e enunciando como tinham interpretado e resolvido o desafio:

E4: *Eu acho que são 11, porque as casas da Ribeira têm uma parede junta, então só acrescentamos mais cinco fósforos.*
E3: *Pois... Eu pensei que a casa seguinte era feita noutra parede e pus duas: uma para a primeira casa e outra para a segunda casa e assim acrescentei mais seis fósforos, não era?*
PE: *Dessa forma está correto o que disseste. Mas se eu disser que as casas são geminadas, ou seja, estão construídas umas a seguir às outras, tendo uma parede em comum, qual deveria ser a resposta correta?*
E4: *Eu acho que tenho razão, pois usando os fósforos, essa parede é representada pelo fósforo comum às duas casas, e apenas se acrescentam cinco fósforos.*
PE: *Compreendeste(eram) a explicação do vosso colega e a diferença de serem casas geminadas?*
E3 e toda a turma: *Sim!*

Assim, não levantou qualquer questão, tendo compreendido a explicação. Esta situação inicial era crucial ser entendida por todos, pois apresentava-se como um conhecimento prévio para a resolução dos desafios seguintes.

Após o registo no quadro, foi solicitado que construíssem três casas. Todos usaram 16 fósforos, demonstrando terem compreendido a noção de casas geminadas e, intuitivamente, que deveriam acrescentar cinco fósforos sempre que se construía mais uma casa na sequência criada. Através do registo em tabela (figura 5), realizou-se o diálogo seguinte:

PE: *Se olharmos para esta sequência de números, 6, 11, 16..., podemos concluir alguma coisa? Existe algum tipo de relação entre o primeiro termo da sequência e o segundo?*
E1: *Sim. São sempre mais cinco.*

E os outros colegas concordaram.



PE: E entre o segundo e o terceiro?
E1 e os seus colegas, quase em uníssono: Também.
PE: Então o que podemos concluir?
E3: Acrescentamos sempre cinco unidades.
PE: Muito bem! Para construirmos uma casa, usámos seis fósforos, correto?
Vários estudantes: Sim!
PE: E para construirmos duas casas, usámos...?
E4: 11 fósforos.
PE: Ou seja, acrescentámos cinco fósforos. Então vou colocar aqui +5. E para construirmos três casas?
E5: 16 fósforos. Adicionámos mais cinco.
PE: Então vou escrever esta sequência numérica: +5+5. Concordam?
Todos anuíram, referindo: Sim, é sempre “+5”!

Os estudantes perceberam a construção da lei de formação desta sequência.

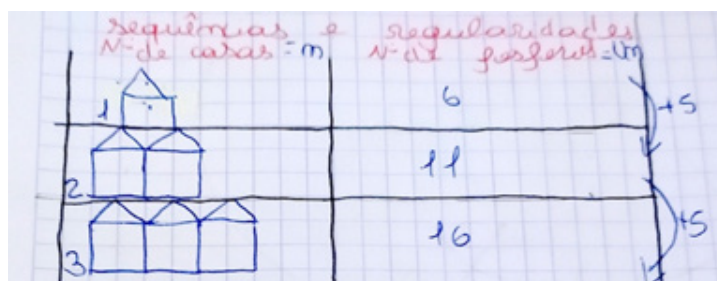


Figura 5: Registo da tabela construída

À medida que a turma ia registando no caderno diário, um estudante comentou:

E6: Professora, se forem quatro casas, usamos 21 fósforos!
PE: Explica como pensaste aos teus colegas.
E6: Então... como a professora disse que são casas geminadas, têm sempre uma parede em comum e são sempre mais cinco fósforos. Logo é só juntar “5” aos fósforos anteriores, que são 16.

Vários estudantes validaram a explicação, referindo que também pensaram e fizeram assim. Esse comentário foi valorizado com elogios e registado no quadro e no caderno diário dos estudantes. Este estudante, em particular, não costuma revelar interesse/motivação em participar espontaneamente e retrai-se quando é solicitado, além de possuir medidas universais de suporte à aprendizagem, de acordo com o Decreto-Lei n.º 54/2018 Foi, por isso, surpreendente a sua participação.

Posteriormente, a PE explicou que “termo” e “ordem do termo”, poderiam ser representados por e e n , respetivamente. Assim, quando se referiu que o número de casas era um, colocou-se $n = 1$; quando se referiu que o número de fósforos usados na construção de uma casa, registou-se e .



A PE questionou “Se eu quisesse saber quantos fósforos preciso para construir 20 casas, como é que poderia proceder?”. A maioria dos estudantes respondeu que teria de acrescentar sempre “+5” até chegar à vigésima casa.

PE: Não haverá uma forma mais económica de chegar a esse resultado?

Após algum tempo de espera de uma resposta, por parte da turma, a PE foi organizando a informação no quadro (tabela 1) e, de seguida, analisou a mesma em conjunto com a turma. As últimas coluna e linha foram construídas passo a passo com a turma.

Tabela 1: Tabela construída e analisada em grande grupo

N.º de casas ()	N.º de fósforos ()	Construção da lei geral
...	...	...

PE: O que aconteceu da primeira para a segunda casa?

E1: Acrescentámos “+5” fósforos.

A PE escreve “”.

PE: E da primeira para a terceira?

E2: Acrescentámos “+5” duas vezes.

A PE escreve “”.

PE: E da primeira para a quarta?

E3: Acrescentámos “+5” três vezes.

A PE escreve “”.

PE: Quantas vezes acrescentámos cinco fósforos na construção de duas casas?

E4: Uma vez.

A PE escreve “”.

PE: E na construção de três casas?

E5: Duas vezes.

A PE escreve “” e faz o mesmo para as quatro casas ().

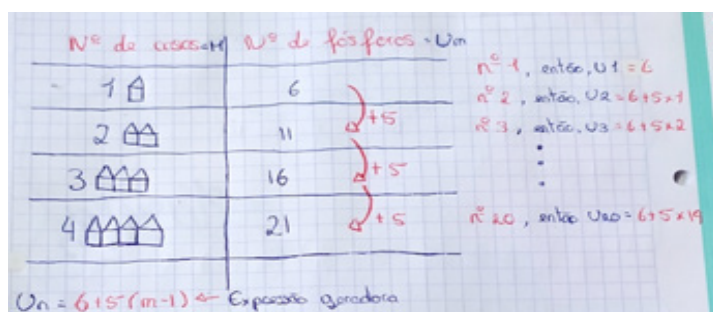
PE: E na construção de uma casa?

E6: Zero vezes.

A PE escreve “”.

Era essencial construir conhecimentos passo a passo, até à descoberta da expressão geradora, tal como as máximas do MS: menos é mais e “step by step” (Fernandes, 2017). Analisando

a tabela 1, concluiu-se que todos os termos tinham em comum o valor do primeiro e que se derivavam do termo anterior. O termo geral desta sequência é a expressão algébrica $U_n = 6 + 5(n-1)$, descoberta e construída pela turma, orientada pela PE, através da análise da tabela construída (figura 6).



Nº de casas	Nº de fósforos = U_n
1 	6
2 	11
3 	16
4 	21

$U_1 = 6$, então, $U_1 = 6$
 $U_2 = 6 + 5 \times 1$
 $U_3 = 6 + 5 \times 2$
 $\vdots$
 $U_{20} = 6 + 5 \times 19$

$U_n = 6 + 5(n-1)$ ← Expressão geradora

Figura 6: Construção da tabela, realizada por uma estudante

Um dos estudantes mencionou o seguinte:

E7: Ah, já percebi! O número de vezes que se repete o cinco é sempre o número de casas menos um!

Com base na explicação de E7, procedeu-se à resolução da tarefa proposta inicialmente: “Quantos fósforos são precisos para construir 20 casas da Ribeira?”. Um dos estudantes, aquando da resolução, apresentou à turma a seguinte estratégia:

E8: Eu fiz cinco vezes vinte () que é o mesmo que cinquenta mais cinquenta ($50 + 50$), que dá cem (100). Depois faço cem menos cinco e depois mais seis ($100 - 5 + 6$), que dá cento e um (101).

Considerou-se que toda a explicação tinha sido adequada, com o uso de linguagem rigorosa e cientificamente/matematicamente correta. Como os estudantes já sabiam resolver expressões numéricas, bastou substituir a incógnita por 20 ($n=20$). Entretanto, surgiu uma dúvida:

E9: Professora, não percebo o que é .

Foi necessário parar para clarificar um aspeto de representação à turma. Este pormenor de representação era desconhecido pela maioria dos estudantes, pois faltava a explicitação do sinal “.”, isto é, .

De seguida, analisaram-se os termos da sequência 6, 11, 16 e 21. Os estudantes concluíram que todos os termos terminavam ou em “1” ou em “6”, demonstrando raciocínio indutivo. Para desenvolver o raciocínio dedutivo, foi questionado à turma:



PE: *É possível construir uma sequência de casas com um total de 53 fósforos? Porquê?*

E1: *Não, porque só pode acabar em 1 ou 6!*

E2: *Com 53 não chega!*

PE: *Explica o teu raciocínio, por favor...*

E2: *Com 101 fósforos eu construía 20 casas... Como 53 é mais ou menos metade, seriam 10 casas, metade de 20! Então dá Por isso é que não chega! E também como termina em "3", por isso não pode ser!*

Para desenvolver a comunicação matemática, optou-se pela participação individual e usou-se uma ideia da supervisora institucional: num copinho com paus de gelado, com o nome de cada estudante, escolhia-se, aleatoriamente, um para participar.

Resolução de problemas matemáticos

Na segunda sessão, os estudantes realizaram dois desafios projetados na zona da Ribeira do Porto, retratando elementos característicos da mesma.

O Desafio dos Andares permitia o uso dos fósforos, pois envolvia questões relacionadas com a construção de andares de uma casa da Ribeira. À medida que os estudantes iam resolvendo no caderno, a PE ia acompanhando e retificando quais as estratégias usadas, assegurando que os estudantes com medidas de suporte à aprendizagem tinham um maior acompanhamento individualizado, para que todos realizassem o que lhes havia sido proposto. Alguns dos raciocínios matemáticos encontram-se expostos de seguida:

E1: *Professora, aqui, nesta sequência, adicionamos sempre mais três unidades ao termo anterior. Vai sempre de três em três. Então contei o número de fósforos que fui acrescentando até dar 21!*

E2: *Fiz a expressão geradora assim: primeiro pus o seis, porque uma casa com um andar tem seis fósforos, e depois pus o três, porque adicionamos sempre mais três fósforos, sempre que acrescentamos um andar.*

PE: *E porquê ?*

E2: *Porque acrescentamos três menos uma vez que a ordem do termo.*

A turma apresentou estratégias bastante diversificadas e corretas (figura 7), permitindo a sua exposição para a turma, como forma de sistematizar a resolução do primeiro desafio. As estratégias de resolução foram explicadas/partilhadas pelos estudantes.

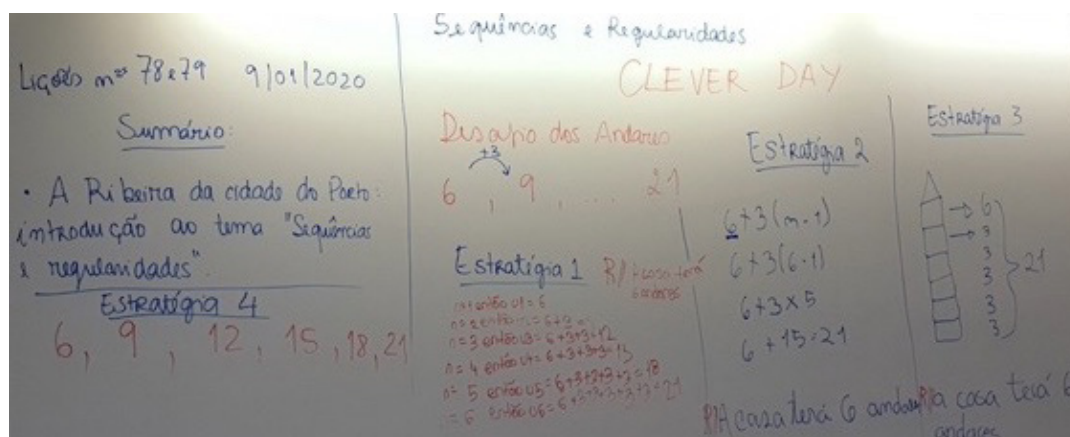


Figura 7: Exposição das estratégias (Clever Day) – Desafio dos Andares

Analisando a figura 7, a Estratégia 1 é uma estratégia de foro simbólico. O estudante que a apresentou conseguiu resolver este desafio por tentativa-erro, usando numericamente o operador aditivo “+3” até chegar ao 6.º andar, correspondente a 21 fósforos.

A Estratégia 2 envolve a aplicação direta de uma fórmula matemática – uso simbólico/abstrato –, previamente construída, que diz respeito à expressão geradora da sequência. Algebricamente, este estudante conseguiu calculá-la e, posteriormente, compreender que, para o resultado ser 21 (fósforos), era necessário substituir o número de andares () por “6”.

A Estratégia 3 é gráfica: este estudante usou o desenho pictórico/iconográfico, representando esquematicamente uma casa com um andar (seis fósforos) e acrescentando, de três em três, mais andares, até 21 fósforos.

A Estratégia 4 expõe a sequência numérica, registada pela PE, com uma regularidade de três em três, partindo do primeiro termo até chegar ao 21, como indicou um estudante: “é sempre de 3 em 3, começando no 6 e assim, dá 9, 12, 15, 18, e 21, e agora conta-se... e corresponde ao 6.º termo da sequência”. Esta estratégia também foi contabilizada, pois “devem-se valorizar as diferentes estratégias usadas pelas crianças ou sugeridas pelo professor após a discussão aberta sobre o assunto” (Fernandes, 2017).

Expostas pelo menos três estratégias de resolução diferentes e corretas para o mesmo tipo de desafio matemático, tal como é sugerido no MS, usou-se uma motivação extra – o *Clever Day* (significa que os estudantes apresentaram “raciocínios inteligentes”) –, visível no topo do quadro (figuras 7 e 8), que envolve o desenvolvimento de estratégias de resolução de cálculo e a capacidade de leitura e de resolução do desafio. Este momento confere a transformação do aspeto individual para o coletivo, permitindo a exposição, partilha e análise/reflexão das estratégias usadas. A capacidade do(a) professor(a) em valorizar essas estratégias, em particular, a contribuição oral dos estudantes, permite o desenvolvimento da sua comunicação matemática e o aumento da autoestima (Fernandes, 2019).



O Desafio do Restaurante já não permitia o uso dos fósforos. À medida que os estudantes iam resolvendo o desafio, a PE foi verificando as estratégias implementadas pela turma, se os estudantes com medidas de suporte à aprendizagem necessitavam de um acompanhamento mais individualizado e se todos realizavam o que lhes havia sido proposto e como o concretizavam. Os estudantes que terminavam antes do tempo, iam sempre sendo desafiados a tentar formular a expressão geradora das sequências.

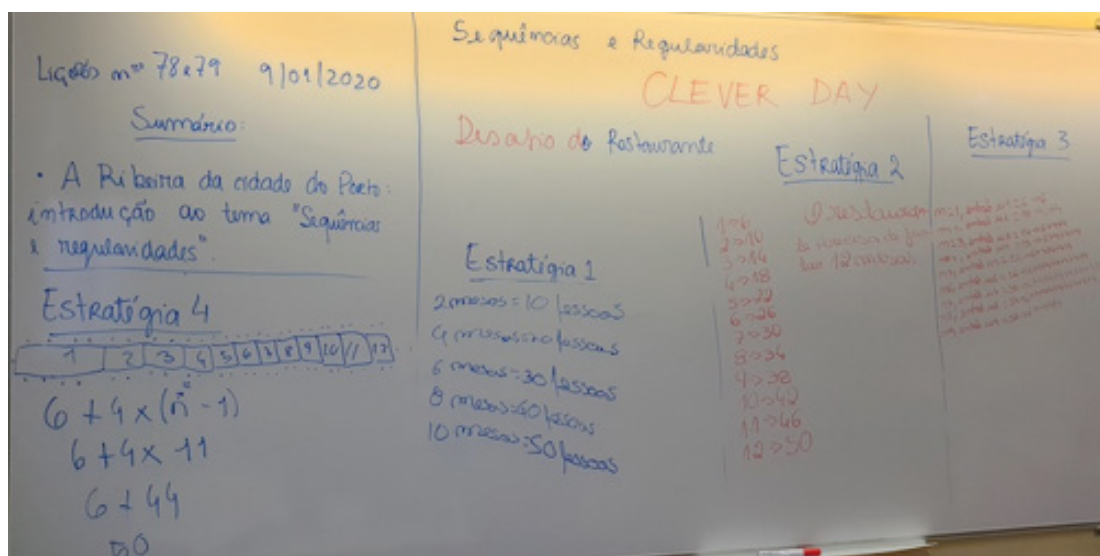


Figura 8: Exposição das estratégias (Clever Day) – Desafio do Restaurante

Analisando as estratégias usadas (figura 8), é possível compreender que na Estratégia 1 o estudante duplicou as mesas, adicionando sempre +10 (10 pessoas, para cada 2 mesas). Neste caso, esta estratégia de resolução, embora incorreta matematicamente, apresentou-se como sendo um raciocínio importante para explorar a forma correta da interpretação do problema. O estudante, ao explicar o seu raciocínio, apercebeu-se do erro de interpretação, compreendendo que as mesas tinham de estar juntas.

A Estratégia 2 possui um formato numérico – construção da sequência –, através da tentativa-erro. Verticalmente, construiu-se a sequência numérica de primeiro termo “6” e regularidade “+4”.

A Estratégia 3 é simbólica. O estudante resolveu este desafio por tentativa-erro, usando numericamente o operador aditivo “+4” até à 12.^a mesa, correspondente a 50 pessoas.

A Estratégia 4 é pictórica/iconográfica e representa esquematicamente as mesas juntas. O estudante que partilhou esta estratégia contou as mesas desenhadas, perfazendo um total de 12 mesas para 50 pessoas.

A Estratégia 5, junto à Estratégia 4, envolve a aplicação direta da expressão geradora – uso simbólico/abstrato. Algebricamente, este estudante determinou-a e compreendeu que, para o resultado ser 50 (pessoas), era necessário substituir o número de mesas () por “12”.



Sistematização/consolidação

No fim desta sessão, ocorreu um momento de esclarecimento de questões levantadas pelos estudantes ou provocadas pela PE. Nesse diálogo revisitaram-se ainda os objetivos da aula para se analisar se os mesmos tinham sido alcançados. Neste contexto, foi realizada a sistematização de conhecimentos e de estratégias, culminando com o registo das conclusões. Durante o debate, valorizou-se a comunicação matemática e a reflexão acerca das estratégias mais significativas, assim como o registo nos cadernos diários. Estes apontamentos são muito importantes, pois permitem a sistematização dos conhecimentos e das estratégias de forma coletiva, possibilitando ainda ao estudante um estudo posterior individual dos conteúdos abordados, criando-lhe mais autonomia na aprendizagem (Fernandes, 2013, 2017, 2019). Após a conclusão dos dois desafios, a PE mostrou a imagem com o típico estendal das casas da Ribeira do Porto, que contemplava uma síntese escrita nas peças de roupa dos conteúdos abordados (figura 9), tendo sido exposto no placar de cortiça da sala. O título foi posteriormente construído por três estudantes que apresentaram, durante esta sequência didática, gosto em caligrafar títulos no caderno diário.

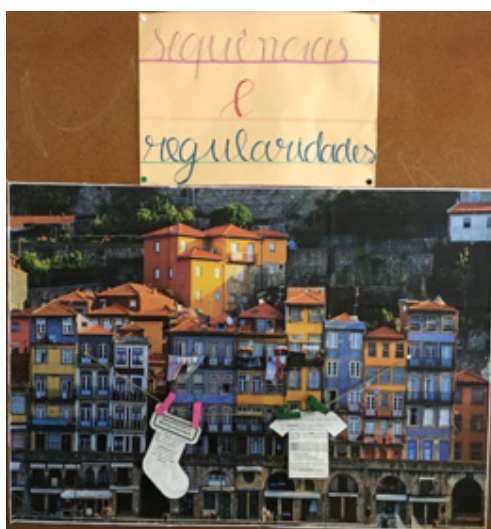


Figura 9: Estendal com peças de roupa com a síntese dos conteúdos abordados

Momento de avaliação

A avaliação (sessão 3) correspondeu ao corolário lógico de todo o processo de aprendizagem desenvolvido nas aulas desta sequência didática. O registo das atitudes e verbalizações dos estudantes, numa perspetiva de auto e heteroavaliação, permitiu a construção significativa do conhecimento individual (Fernandes, 2013, 2019). Esta evidência constatou-se nas respostas



ao guião de auto e heteroavaliação, no qual toda a turma refere que gostou da aula, considerando-a “*interessante*”, “*interativa*”, “*uma forma mais divertida e fácil de aprender as sequências/a Matemática*”, ajudando a “*conhecer melhor a Ribeira do Porto*”.

Face à pergunta *Qual(ais) o(s) aspeto(s) da aula que consideram ter(em) contribuído positivamente para a vossa aprendizagem?*, salientaram-se algumas avaliações: “aprendemos uma nova matéria da Matemática, de uma forma diferente... foi mais divertido e interessante”, “os fósforos ajudaram-me a perceber as sequências e a expressão geradora”, “foi bom perceber as diferentes estratégias usadas pela turma”, “gostei de ter partilhado a minha resolução com a turma e percebi que podem existir outras formas de resolver o mesmo problema”, o que expressa motivação e gosto pelo conteúdo matemático e pela forma como foi aprendido. Pelas respostas obtidas e observações efetuadas, considera-se que estes estudantes participaram ativamente, de forma individual e coletiva, na construção do seu conhecimento, através de uma abordagem concreta e com tempo, “*step by step*”, respeitando o ritmo de aprendizagem de cada um. Aprenderam pela prática manipulativa e partilharam as suas descobertas em grande grupo, desenvolvendo a comunicação matemática (Fernandes, 2017, 2019; Vygotsky, 1979). A grelha de observação (Apêndice A) permitiu recolher outras informações que integraram a avaliação. Nesta grelha, apresentam-se cinco parâmetros de avaliação formativa, a autoavaliação dos estudantes, recolhida nos dados obtidos do guião, e a avaliação formativa global, atribuída pela PE.

Conclusões

Perante uma turma do 6.º ano que evidenciava dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos abstratos e falta de autonomia, este estudo pretendeu analisar as potencialidades de uma proposta de aprendizagem matemática em contexto ao nível das atitudes dos estudantes e da compreensão de uma lei que rege o fenómeno na construção de sequências/regularidades, desenvolvendo o raciocínio indutivo e a comunicação matemática. Neste sentido, arquitetou-se uma sequência didática que abordou o conteúdo “Sequências e Regularidades” num ambiente contextualizado, onde estiveram presentes abordagens do MS e da MiC, o uso de materiais manipuláveis e a resolução de problemas. Esta proposta permitiu expor e refletir sobre boas práticas no ensino da Matemática.

De acordo com os objetivos inicialmente traçados, afirma-se que:

- O uso dos fósforos, de forma contextualizada, potenciou um contacto inicial do conteúdo matemático e a visualização, no concreto, dos conceitos que estavam a ser trabalhados, numa perspetiva crescente de abstração;
- Os estudantes revelaram atitudes positivas, proporcionando uma maior predisposição para aprender e gostar de aprender Matemática: tudo indica, pelos elementos recolhidos, que a autonomia dos estudantes melhorou, tornando-se mais empenhados e motivados;
- Alguns estudantes demonstraram maior facilidade em descobrir a lei de formação das sequências, permitindo envolver toda a turma num momento desafiador/motivador, ati-

vando competências de trabalho colaborativo, desenvolvendo o pensamento indutivo, que está na base da Álgebra.

Os estudantes aprenderam pela partilha, reflexão e valorização conjunta de diferentes estratégias e respostas ao mesmo problema, desenvolvendo a comunicação matemática e o raciocínio matemático, através do *Clever Day*.

Assim, as diferentes dimensões – a *humana*, a *conceptual* e a *pedagógico-didática* –, os estudantes revelaram alterações significativas, designadamente:

- Atitudes muito positivas perante os desafios propostos, mostrando vontade em resolvê-los, tecendo comentários favoráveis sobre o material usado e o contexto inovador usado, próximo do seu quotidiano;
- Pensamento algébrico mais apurado, pelo desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, pela oportunidade de observar, comunicar, manipular e construir sequências e regularidades, tecendo conjecturas e descobrindo as leis de formação das expressões geradoras;
- Conhecimentos e aprendizagens significativas e com sentido, definidas num contexto social criativo, pela descoberta e a construção e desenvolvimento da autonomia e de reflexões individuais, numa perspetiva social de partilha do conhecimento, por/com todos (Vygotsky, 1979).

Considera-se que este estudo apresentou uma experiência de ensino concreta, que poderá apoiar/melhorar futuras práticas educativas, na formação de professores, enriquecendo-os de forma pessoal e profissional.

Uma escola do séc. XXI necessita de sentir a Matemática como uma cultura e uma linguagem próprias, que se inter-relaciona com o dia a dia, numa realidade comum, e não apenas momentos de memorização e de aplicação direta de fórmulas. Houve necessidade de contextualizar e dar sentido às aprendizagens dos estudantes, valorizando as conquistas e a sua participação, incentivando, progressivamente, a sua curiosidade e capacidade de comunicar matematicamente, própria de um ambiente algébrico (Canavarro, 2007; Fernandes, 2017). Segundo Caraça (1989), a Matemática é uma ciência que deve estar ao alcance de todos, sendo necessário proporcionar um meio estimulante de resolução de problemas, pois a missão do(a) professor(a) passa por descobrir ambientes propícios para humanizar mais a Matemática (Fernandes, 2019).

Referências

- Albert, L. R., Bowen, C. & Tansey, J. (2009). Note Taking as Deliberate Pedagogy. In B. Kaur, Y. B. Har, & M. Kapur (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Yearbook 2009, Association of Mathematics Educators* (pp.69-88). Singapore: World Scientific.



- Alvarenga, D., & Vale, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 16(1), 27-56.
- Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do they Make Mathematics More "Real"? *For the learning of mathematics*, 13(2), 12-17.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A., Cabrita, I., Palhares, P. & Vale, I. (2007). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavaro (Org.), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE. Retrieved from <http://hdl.handle.net/10174/1416>.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. MA: Harvard University Press.
- Caraça, B. J. (1989). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (9.ª ed.). Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.
- Canavaro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81-118.
- Conselho Nacional de Educação. (2019). *Estado da Educação 2018* [PDF]. Retrieved from http://www.cnedu.pt/content/edicoes/estado_da_educacao/Estado_da_Educacao2018_web_26nov2019.pdf.
- Damião, H., Festas, I., Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e metas curriculares de Matemática para o ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Decreto-Lei n.º 54/2018, de 6 de julho. *Diário da República n.º 129/2018, Série I*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Dickinson, P., & Hough, S. (2012). Using realistic mathematics education in UK classrooms. *Centre for Mathematics Education, Manchester Metropolitan University*. Manchester: UK. Retrieved from https://mei.org.uk/files/pdf/rme_impact_booklet.pdf.
- Dinis, R. J. D. J. V., Teixeira, R. C., & Pacheco, S. M. (2019). Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 13, 5-36.
- Direção-Geral da Educação (2018). *Aprendizagens essenciais|Articulação com o perfil dos alunos 6.º ano|2.º ciclo|Matemática*. Lisboa: Diário da República.
- Eric, C. C. M. (2009). Mathematical Modelling as Problem Solving for Children in the Singapore Mathematics Classrooms. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 32(1), pp.36-61.
- Fernandes, D. (2006). *Aprendizagens algébricas em contexto interdisciplinar no ensino básico*. (Tese de Doutoramento em Didática). Universidade de Aveiro, Aveiro.
- Fernandes, D. (2013). Fases de apoio à prática educativa: aula de Matemática (texto policopiado). Porto: ESE/IPP.
- Fernandes, D. (2017). Sendas de Sucesso com o "método de Singapura" – Parte 1/3. *Ozafaxinars*, 70. Retrieved from https://www.cfaematosinhos.eu/Ed_ozafaxinars_n70.htm.
- Fernandes, D. (2018). Sendas de Sucesso com o "método de Singapura" – Parte 3/3. *Ozafaxinars*, 77. Retrieved from https://www.cfaematosinhos.eu/Ed_ozafaxinars_n77.htm.
- Fernandes, D. (2019). *UC Didática da Matemática do 2.º CEB II* (Apontamentos). Porto: ESE P. Porto.
- Kaur, B., & Har, Y. B. (2009). Mathematical problem solving in Singapore schools. In B. Kaur, Y. B. Har, & M. Kapur (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Yearbook 2009, Association of Mathematics Educators* (pp.3-13). Singapore: World Scientific.



- Marôco, J., Lourenço, V., Mendes, R. & Gonçalves, C. (2016). *TIMSS 2015 – Portugal. Volume 1: Desempenhos em Matemática e em Ciências*. Lisboa: IAVE. Retrieved from http://iave.pt/images/FicheirosPDF/Estudos_Internacionais/TIMSS/Relat_rio_TIMSS4.pdf.
- Martins, G. D., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J. V., Carrilo, J. L., Silva, L. & Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciências.
- Ministry of Education (2006). *Mathematics Syllabus: Primary*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. Retrieved from <http://ncm.gu.se/media/kursplaner/andralander/singaporegrund.pdf>.
- Piaget, J. (1975). *A formação do símbolo na Criança* (2.^a ed.). Rio de Janeiro: Zahar Editores/MEC.
- Ponte, J. P. (2005). O interaccionismo simbólico e a pesquisa sobre a nossa própria prática. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 1, 107-134.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Retrieved from [https://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/1994/1/Ponte-Branco-Matos%20\(Brochura_Algebra\)%20Set%202009.pdf](https://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/1994/1/Ponte-Branco-Matos%20(Brochura_Algebra)%20Set%202009.pdf).
- Rodrigues, F. C., & Gazire, E. S. (2012). Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 187-196. doi:10.5007/1981-1322.2012v7n2p187.
- Romberg, T. A. (2001). *Designing middle-school mathematics materials using problems set in context to help students progress from informal to formal mathematical reasoning*. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.465.9142&rep=rep1&type=pdf>.
- Romberg, T. A., & Meyer, M. (2001). *Mathematics in Context: A Middle School Curriculum for Grades 5-8, developed by the Mathematics in Context (MiC) project*. Briana Villarrubia Encyclopaedia Britanica 310 S. Retrieved from <http://mcc.edc.org/pdf/perspmathincontext.pdf>.
- Schleicher, A. (2019). *PISA 2018: Insights and Interpretations*. OECD 2019. Retrieved from <http://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf>.
- Singapore Math Inc. (2020). *What is Singapore Math?*. Retrieved from <https://www.singaporemath.com/what-is-singapore-math>.
- Teixeira, R. E. C. (2015). Ensino da Matemática: O Método de Singapura. *Atlântico Expresso*, 17.
- Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e linguagem* (Tradução: M. Resende). Lisboa: Antidoto.
- Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.



Apêndices

Apêndice A – Grelha de observação (avaliação formativa)

Grelha de Observação – Avaliação Formativa

Legenda: NC – Não Conseguiu; CP – Conseguiu Parcialmente;
CT – Conseguiu Totalmente; NO – Não Observado.

Alunos	Colabora e Participa nas tarefas propostas				Resolve tarefas de forma autónoma				Regista no caderno diário as resoluções de cada tarefa				Comunica utilizando, rigorosamente, linguagem matemática				Sabe determinar expressões geradoras de sequências numéricas				Autoavaliação	Avaliação da Professora Estagiária	Observações
	NC	CP	CT	NO	NC	CP	CT	NO	NC	CP	CT	NO	NC	CP	CT	NO	NC	CP	CT	NO			
A. M.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
A. T.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui totalmente (4)	4	
A. L.			X				X				X				X			CP	CT	X	Consegui parcialmente (3)	3	
B. V.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
B. N.			X				X				X				X			CP	CT		Não consegui (2)	4	
B. M.			X				X				X				X		X	CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	Participou notoriamente de forma correta e demonstrou um bom raciocínio matemático.
C. F.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui totalmente (4)	4	
C. S.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
D. A.			X				X				X				X			CP	CT	X	Consegui parcialmente (3)	3	
D. C.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
D. F.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	4	
F. N.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	4	Apresentou um raciocínio matemático muito interessante.
G. R.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui totalmente (4)	4	
I. G.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
M. F.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
M. D.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	4	
M. G.			X			X					X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
P. M.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui totalmente (4)	4	Demonstrou um grande conforto perante os conteúdos.
R. O.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui totalmente (4)	4	Melhorou a autonomia!
R. R.			X				X				X				X			CP	CT	X	Consegui parcialmente (3)	2	Estava mais interessado em manipular o material do que em efetuar a resolução e registo das tarefas.
R. I.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
R. F.			X				X				X				X			CP	CT	X	Não consegui (2)	2	
S. S.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	4	
T. M.			X				X				X				X			CP	CT		Consegui parcialmente (3)	3	
T. S.			X			X				X					X			CP	CT	X	Consegui parcialmente (3)	2	Estava mais interessado em manipular o material do que em efetuar a resolução e registo das tarefas.