



Algoritmo da decomposição da subtração: aprofundar conhecimentos através do uso de um manipulativo virtual

Subtraction decomposition algorithm: deepen knowledge through the use of a virtual manipulative

Nuno Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Portugal
nmartins@esec.pt
<https://orcid.org/0000-0001-8850-338X>

Cecília Costa

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal
CIDTFF - Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (Lab-DCT da UTAD), Portugal
mcosta@utad.pt
<https://orcid.org/0000-0002-9962-562X>

Ricardo Silva

Centro de Ciência Viva do Alviela, Portugal
rpratas@alviela.cienciaviva.pt

Fernando Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, UNICID, Portugal
Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, Portugal
fmlmartins@esec.pt
<https://orcid.org/0000-0002-1812-2300>

Resumo

A utilização de manipulativos virtuais em sala de aula proporciona ambientes geradores de uma aprendizagem mais efetiva da matemática. Com estas ferramentas os alunos recebem um *feedback* imediato das suas ações, envolvendo-os em processos de raciocínios válidos e levando-os a uma aprendizagem sólida e com significado. No 1.º Ciclo do Ensino Básico, em Portugal, ensina-se o algoritmo da decomposição da subtração antes do algoritmo padrão. É fundamental que o futuro professor tenha um conhecimento aprofundado dos procedimentos matemáticos envolvidos nos diversos algoritmos. Apresenta-se um estudo de natureza qualitativa, de índole interpretativo e com um *design* estudo de caso, realizado com alunos do 3.º ano da licenciatura em Educação Básica de uma Instituição de Ensino Superior portuguesa e teve como objetivo analisar como o uso de um manipulativo virtual específico permitiu aprofundar os conhecimentos destes alunos sobre o algoritmo da decomposição da subtração. O estudo baseou-se na resolução de um conjunto de tarefas com o auxílio da *applet Base Blocks Subtraction* (*National Library of Virtual Manipulatives*). Os resultados evidenciam que, durante a resolução das tarefas com o uso da *applet*, a terminologia



matemática usada pelos alunos foi melhorando, evitando, por exemplo, a recorrência sistemática a expressões relacionadas com mnemónicas. Por outro lado, o uso da *applet* permitiu que os alunos tomassem consciência das suas lacunas ao nível dos procedimentos do algoritmo, nomeadamente, do processo de decomposição de uma unidade de determinada ordem do aditivo, quando necessário.

Palavras-Chave: formação inicial de professores, manipulativos virtuais, *applets*, algoritmo da decomposição da subtração.

Abstract

The use of virtual manipulatives in the classroom provides environments that generate more effective learning in mathematics. With these tools, students receive immediate feedback on their actions, involving them in valid reasoning processes and leading them to solid and meaningful learning. In the 1st Cycle of Basic Education, in Portugal, the subtraction decomposition algorithm is taught before the standard algorithm. It is essential that the future teacher has, therefore, an in-depth knowledge of the mathematical procedures involved in the various algorithms. A qualitative study, of an interpretative nature and with a case study design, was carried out with students of the 3rd year of a degree in Basic Education from a Portuguese Higher Education Institution and aimed to analyze how the use of a specific virtual manipulative allowed to deepen the knowledge of these students on the subtraction decomposition algorithm. The study consisted of solving a set of tasks with the aid of the Base Blocks Subtraction applet (National Library of Virtual Manipulatives). The results show that, when solving tasks using the applet, the mathematical terminology used by students improved, avoiding, for example, the systematic recurrence of expressions related to mnemonics. On the other hand, the use of the applet allowed students to become aware of their shortcomings in terms of the algorithm's procedures, namely, the decomposition process of a higher order unit, if necessary.

Keywords: teacher training, virtual manipulatives, applets, subtraction decomposition algorithm.

Resumen

El uso de manipuladores virtuales en el aula proporciona entornos que generan un aprendizaje **más** efectivo en matemáticas. Con estas herramientas, los estudiantes reciben una retroalimentación inmediata sobre sus acciones, involucrándolos en procesos de razonamiento **válido y** llevándolos a un aprendizaje **sólido y significativo**. En el primer ciclo de educación primaria, en Portugal, el algoritmo de descomposición por resta se enseña antes que el algoritmo habitual. Es esencial que el futuro maestro tenga, tanto, un conocimiento profundo de los procedimientos matemáticos involucrados en los diversos algoritmos. Se realizó un estudio cualitativo, de naturaleza interpretativa y con un diseño de estudio de caso, con estudiantes del tercer año de un Grado en Educación Primaria de una institución de educación superior portuguesa y tuvo como objetivo analizar cómo el uso de un manipulador virtual específico permitió profundizar el conocimiento de estos estudiantes sobre el algoritmo de descomposición por resta. El estudio consistió en resolver un conjunto de tareas con la ayuda del applet Substracción de Bloques Base (Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales). Los resultados muestran que, al resolver tareas utilizando el applet, la terminología matemática utilizada por los estudiantes mejoró, evitando, por ejemplo, la recurrencia sistemática de expresiones relacionadas con la mnemotecnía. Por otro lado, el uso del applet permitió a los estudiantes conocer sus deficiencias en **términos de los** procedimientos del algoritmo, a saber, el proceso de descomposición de una unidad de orden superior, si es necesario.

Palabras clave: formación docente, manipuladores virtuales, applets, algoritmo de descomposición por resta.



Introdução

Em Portugal, o tema Números e Operações tem uma importante relevância no currículo de matemática, em particular, nos primeiros anos de escolaridade (MEC, 2013). O algoritmo da subtração, fazendo parte integrante desse tema, é um tópico onde os alunos do ensino básico, apresentam dificuldades de forma explícita e no qual lhes são ensinadas mnemónicas ou um conjunto de procedimentos sem sentido e sem qualquer justificação matemática (Martins & Ribeiro, 2013). De facto, a compreensão dos procedimentos associados quer ao algoritmo padrão - também conhecido como algoritmo da compensação - quer ao algoritmo da decomposição da subtração (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013, p. 18) será tanto maior quanto maior for a compreensão do sistema de numeração decimal bem como dos seus dois princípios: agrupar em conjuntos com um número de elementos igual ao valor da base e valor posicional dos algarismos (Shifter, Bastable, & Russell, 2016). Também o domínio dos princípios básicos como compor numa unidade de ordem superior ou decompor uma unidade de ordem superior revela-se fundamental para o entendimento dos procedimentos de qualquer um dos algoritmos (Ma, 2009; Martins, N., Lopes, Cravino, Costa, & Martins, F., 2018; Martins, N., Martins, F., Lopes, Cravino, & Costa, 2019).

A preparação de futuros professores para a integração adequada da tecnologia na sua prática letiva é um desafio com que as instituições de formação de professores se confrontam cada vez mais (Liu, 2016; OECD, 2018). Para esta preparação, as instituições, com a colaboração do seu corpo docente, precisam de ajudar os alunos a superar as lacunas existentes entre o conhecimento do conteúdo, a pedagogia e a tecnologia (Tondeur, Roblin, Braak, Voogt, & Prestridge, 2017).

Torna-se, portanto, fundamental que o futuro professor (assim como qualquer professor já em atividade) tenha um profundo conhecimento que lhe permita abordar tópicos constantes do currículo com os seus alunos, proporcionando-lhes um envolvimento em processos de raciocínios válidos e levando-os a uma efetiva compreensão dos procedimentos em causa (Martins & Ribeiro, 2013).

Com este estudo, pretende-se dar resposta à questão de investigação: de que forma é que o uso desta *applet*, integrada num processo de aprendizagem colaborativa, durante a realização de operações aritméticas relacionadas com o algoritmo da decomposição da subtração, promove o aprofundamento de conhecimentos dos alunos da formação inicial de professores sobre os conceitos e procedimentos matemáticos relacionados com esse algoritmo?

Contextualização teórica

A investigação sobre o papel e a eficácia de manipulativos virtuais, no ensino da matemática tem vindo a ser mais intensa pois, segundo vários autores (Clements & Sarama, 2002; Martins, S., 2020; Olkun, 2003; Shine et al., 2017; Steen, Brooks, & Lyon, 2006; Verdasca et al., 2020) behaviors, and interactions. Thirty-one (31, estes podem ser um aliado na aprendizagem de conceitos matemáticos. A investigação mostra ainda que o uso de manipulativos virtuais, em contexto de sala de aula, apresenta claros benefícios na aprendizagem de conceitos e procedimentos,



aumentando significativamente o conhecimento matemático dos alunos (Bouck, Working, & Bone, 2018; Clements & Sarama, 2007; Shine et al., 2017; Steen, Brooks, & Lyon, 2006; Verdasca et al., 2020). Também características como permitir ações simples de alterar, repetir, desfazer, salvar configurações e sequências de ações, estabelecer conexões, dar liberdade ao aluno para criar e resolver os seus próprios problemas, etc. são um apoio ao raciocínio matemático do aluno e ao seu desenvolvimento na compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos (Clements & McMillen, 1996). Young (2006) fez uma revisão da literatura sobre os benefícios das *applets* no ensino de matemática. Refere: (1) a sua disponibilidade na *internet* e, portanto, o seu acesso fácil e gratuito; (2) o seu foco em conceitos específicos; (3) a permissão para os alunos executarem ações que não são possíveis ou não são fáceis com manipulativos físicos, ou com lápis e papel; (4) o *feedback instantâneo e corretivo que dá aos alunos*, o que permite que estes que se ajustem à aprendizagem baseada em perguntas e à resolução de problemas; (5) as múltiplas representações que fornecem de um único conceito simultaneamente, portanto, a possibilidade de promoverem a transferência de conhecimento de ideias específicas para conhecimentos gerais; (6) a utilidade que têm para alunos com necessidades educativas especiais; (7) o aumento da motivação e a atenção nos alunos e nos professores.

Estudos relacionados

O uso de manipulativos virtuais ainda é relativamente recente, no entanto, a sua utilização, em sala de aula, tem vindo a aumentar (Cope 2015). A investigação com este tipo de manipulativos, em futuros professores do ensino básico, não é muito abundante, mas podemos destacar alguns estudos. Daher (2009) analisou a percepção, em futuros professores, do uso de *applets* no contexto da resolução de problemas. A maioria dos participantes salientou o papel facilitador, desta tecnologia, no esclarecimento do enunciado e da sua solução. Referiram também que as *applets* são ferramentas com as quais gostaram de trabalhar, porque eram mais encorajados a resolver problemas matemáticos com a sua utilização. Akkan e Çakir (2012) investigaram as opiniões de futuros professores sobre a utilização de manipulativos físicos e virtuais. Estes, na generalidade, preferiram os segundos devido a razões como: incluírem atividades extras, promoverem a economia de tempo, darem *feedback* permitindo, assim, uma certa independência, apresentarem atividades para os alunos construírem a informação por si mesmo, diminuir a possibilidade de se cometer erros, etc. Estes futuros professores também realçaram que o uso de manipulativos virtuais contribui para a compreensão dos conceitos matemáticos e o uso de linguagem matemática. Akkan e Çakir (2012) referem que os futuros professores ou mesmo os próprios professores precisam de ser motivados, encorajados e treinados na sua formação inicial ou contínua, para usar efetivamente este tipo de ferramenta. Martins et al. (2018) realizaram um estudo com alunos da formação inicial de professores que teve por objetivo analisar o papel do uso da *applet Base Blocks Addition* na compreensão dos procedimentos inerentes ao algoritmo da adição e identificar as lacunas de conhecimentos que a *applet* permite colocar a descoberto. Os resultados evidenciaram que, durante a resolução das tarefas, a terminologia matemática usada



pelos alunos nem sempre foi a mais adequada e que estes se confrontaram com dificuldades ao nível do conhecimento dos conteúdos envolvidos, dificuldades que, inicialmente, não supunham ter como, por exemplo, nos procedimentos algorítmicos ou no uso da terminologia correta. No entanto, o trabalho desenvolvido usando a *applet* permitiu que melhorassem quer a terminologia usada, evitando a recorrência sistemática a expressões relacionadas com mnemónicas, quer a compreensão dos princípios dos procedimentos do algoritmo, nomeadamente, a composição em uma unidade de ordem superior. O estudo de Martins et al. (2019), também realizado com alunos da formação inicial de professores, teve por objetivo analisar como o uso da *applet Base Blocks* permitiu aprofundar os conhecimentos desses alunos ao nível dos Princípios Fundamentais de um Sistema de Numeração (PFSN). Os resultados evidenciaram que, durante a resolução das tarefas com a *applet*, a terminologia matemática usada pelos alunos foi melhorando ao longo da intervenção. Por outro lado, o uso da *applet* permitiu-lhes tomar consciência das lacunas ao nível do conhecimento dos conteúdos relacionados com os PFSN, tendo essas, durante a experiência, sido colmatadas. Assim, o trabalho desenvolvido usando a *applet* e o modelo de prática de sala de aula em que estiveram inseridos, permitiu que esses alunos aprofundassem os conhecimentos quer da terminologia usada, quer do conteúdo específico abordado. Finalmente destacamos o estudo de Freitas (2019). Embora tenha sido realizado com alunos do ensino básico é também pertinente salientá-lo, visto que estes serão o público alvo dos futuros professores. A investigação foi desenvolvida com uma turma do 2.º ano em que foi analisada a contribuição de um aplicativo para *tablets*, com base no material multibásico, para a compreensão das expressões “composição em uma unidade de ordem superior” e “decomposição de uma unidade de ordem superior” ao realizar operações envolvendo os algoritmos da adição e subtração. Concluiu-se que a simples manipulação dos objetos virtuais na realização de agrupamentos e desagrupamentos e a troca de informações entre colegas permitiu uma nova forma de pensar e de fazer matemática entre os alunos.

Aprendizagem colaborativa

A aprendizagem colaborativa assistida por computadores (CSCL) tem vindo a merecer a atenção da comunidade científica nos últimos anos (Jeong & Hmelo-Silver, 2016). CSCL pode ser definida como o uso de computadores para facilitar a aprendizagem em grupo (McWhaw, Schnackenberg, Sclater, & Abrami, 2003). A integração do computador na aprendizagem colaborativa, possibilita estruturar discussões e fomentar interações que levem a aprendizagens significativas e minorar discussões pouco construtivas (Foot, Tolmie, & Thomson, 2003). Alguns dos benefícios de usar a CSCL incluem um aumento da responsabilização dos alunos na construção do seu conhecimento, fomentar a participação, iniciativa e autonomia e o melhor desempenho académico e da comunicação com os pares através da discussão de conceitos e significados envolvidos nas tarefas (Brandon & Hollingshead, 1999).

O projeto de investigação de Simão, Flores, Morgado, Forte, e Almeida (2009) procurou estudar o contributo da aprendizagem colaborativa na formação de professores para o seu de-



envolvimento profissional. Uma das conclusões retiradas do estudo foi que os contextos e processos colaborativos proporcionam o desenvolvimento da competência técnico-profissional dos professores. Gianotto e Diniz (2010) focaram-se também na formação de professores, neste caso de Biologia, recorrendo a CSCL para aferir o seu contributo para a construção da sua identidade profissional e do conhecimento. Concluíram que foi positivo o contributo da CSCL para que ocorressem mudanças na perceção do processo de ensino e de aprendizagem, acerca do papel do professor e do valor da CSCL como recurso pedagógico no ensino e na aprendizagem da Biologia. Ralston, Tretter, e Brown (2017) conduziram um estudo em que recorreram à aprendizagem colaborativa para, através de um conjunto de estudos de caso, analisar o impacto das tarefas propostas e propor uma reorganização curricular na *University of Louisville's J. B. Speed School of Engineering* que incluía tarefas de aprendizagem colaborativa. Retnowati, Ayres, e Sweller (2017) realizaram um estudo comparativo sobre a resolução de problemas individualmente e de forma colaborativa, concluindo que a aprendizagem colaborativa pode ser benéfica para os alunos nas condições em que decorreu o estudo.

Metodologia

O estudo aqui apresentado faz parte de um outro mais alargado (Martins, 2020) e insere-se na problemática da integração da tecnologia, na formação inicial de professores do ensino básico. É uma investigação de natureza qualitativa de índole interpretativa e *design* estudo de caso (Creswell, 2009). Teve como propósito analisar como o uso de um manipulativo virtual específico (a *applet Base Blocks Subtraction*) permite aprofundar o conhecimento sobre os procedimentos envolvidos no algoritmo da decomposição da subtração (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013, p. 18), em futuros professores do ensino básico, num ambiente de aprendizagem colaborativa.

A investigação descrita foi desenvolvida numa unidade curricular de Matemática com 24 alunos do 3.º ano, de um curso de Educação Básica de uma instituição de ensino superior portuguesa. Dois dos autores, para além de desempenharem o papel de investigadores, eram também os docentes da unidade curricular.

A sessão que se apresenta, decorre na sequência de outras, onde os alunos trabalharam com uma metodologia semelhante. As *applets* usadas nessas sessões, tinham uma estrutura similar à apresentada neste artigo e foram trabalhados conteúdos como o sistema de numeração, quer na base decimal, quer em bases diferentes da decimal e o algoritmo da adição. Como tal, estes alunos já tinham algum conhecimento quer na forma de trabalhar quer na utilização e integração das *applets*.

O professor desempenhou o papel de mediador na resolução das tarefas e discussões, acompanhando de perto todos os grupos evitando responder diretamente às questões colocadas pelos alunos, tentando sempre que possível devolver perguntas ou fazer outras e dar pistas, com o intuito que fossem os próprios alunos a tentar construir as suas respostas.

A sessão teve a duração de 2 horas, sendo que os 30 minutos finais foram reservados a uma discussão em grande grupo sobre o trabalho desenvolvido.

O algoritmo da decomposição da subtração

O procedimento algorítmico do algoritmo da decomposição da subtração, é o seguinte: começa-se, na ordem zero, por comparar o valor do aditivo e do subtrativo. Se o valor do aditivo for superior ou igual ao do subtrativo, então retira-se ao aditivo o valor do subtrativo obtendo-se a diferença correspondente a essa ordem (Figura 1). Caso contrário, procede-se à decomposição de uma unidade de ordem imediatamente superior no aditivo, de forma a que, ao reagrupar as unidades nessa ordem, o valor do aditivo seja superior ao valor do subtrativo (Figura 2). De seguida, retira-se ao valor do aditivo o valor do subtrativo, obtendo-se assim a diferença dessa ordem (Figura 2). Segue-se, uma análise e procedimento semelhante para as ordens seguintes. O algoritmo termina quando se attingir a ordem maior e a diferença final for obtida.

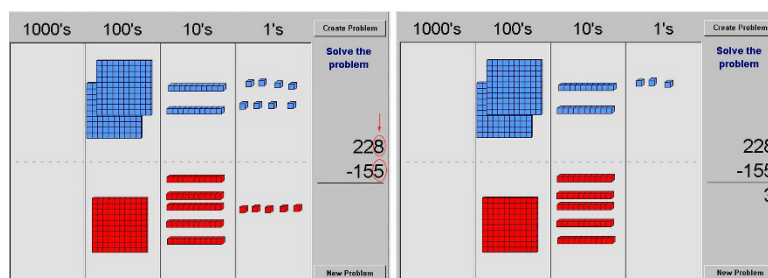


Figura 1: Exemplo do início algoritmo da decomposição.

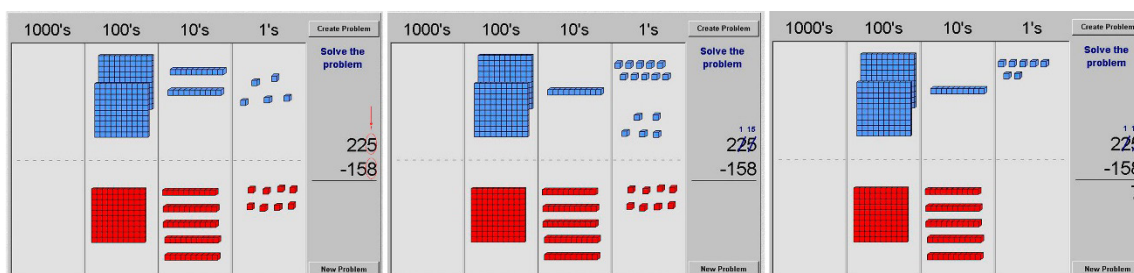


Figura 2: Exemplo do início algoritmo da decomposição.

Em síntese pode-se referir que o procedimento algorítmico pode ser descrito da seguinte forma:

Começando na ordem menor e seguindo para a ordem maior, ao valor da ordem do aditivo retirar o valor dessa mesma ordem do subtrativo. Se o valor de uma determinada ordem do aditivo foi inferior ao valor correspondente do subtrativo, procede-se à decomposição de uma unidade de ordem superior no aditivo, de forma a que ao reagrupar as unidades nessa ordem o aditivo seja superior ao subtrativo. De seguida, na ordem em que se está a trabalhar, ao aditivo separa-se o subtrativo obtendo-se assim a diferença.



O design da sessão

A sala onde decorreu a sessão era espaçosa o suficiente para que os alunos se pudessem posicionar de forma a garantir que existe espaço suficiente para o uso simultâneo de computadores e outras ferramentas necessárias. Ao mesmo tempo garantiu-se a distância suficiente, para que o volume das interações orais não condicionasse a prestação dos restantes grupos. A sala tinha também condições técnicas que permitia a projeção do ecrã do computador, usado na apresentação, durante as discussões coletivas, facilitando, assim, o acompanhamento da explicação do grupo que apresentou, aos colegas.

Os alunos da turma foram agrupados de acordo com as condições da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) (Vygotsky, 1978) cujos níveis de discrepância ótima foram estabelecidos pelos resultados da aplicação do questionário. Optou-se por expor o relato de apenas um grupo e não dos diversos grupos, para se apresentar uma análise detalhada da forma estes alunos fizeram uso desta *applet*. Para a seleção do grupo, teve-se em consideração a perceção média mais alta que os alunos tinham sobre o conhecimento matemático, resultante da resposta ao questionário (Martins, N., Sampaio, Costa, & Martins, F., 2017). Este questionário envolve 31 itens sobre diferentes dimensões do conhecimento, dos quais três dizem respeito ao conhecimento do conteúdo e que foram os considerados para a seleção do grupo, que é constituído por duas alunas (A e B). Esta consideração teve em conta o facto do âmbito da análise deste estar focada exclusivamente na dimensão do conhecimento do conteúdo matemático.

Todos os grupos procederam à gravação do ecrã dos seus computadores bem como do som exterior para captação dos seus diálogos. Estes registos gravados permitem também que o aluno possa ficar com uma cópia para poder refletir sobre o que foi feito (resolução e discussão das tarefas tanto individuais como coletivas). Este recurso poderá ser usado para compreender os conteúdos matemáticos explorados assim como a integração da tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem.

Desenvolvimento da sessão

Após a distribuição da tarefa, a sessão decorreu com os alunos a serem auxiliados pelo professor e pelo professor-investigador que foram monitorizando as respostas que iam surgindo. Estes percorriam os diversos grupos, fazendo questões e esclarecendo dúvidas, tendo por objetivo que os alunos tomassem consciência dos seus conhecimentos e dificuldades e desenvolvessem competências pedagógicas e didáticas de modo a que compreendessem como a tecnologia pode ser integrada na aula de matemática, auxiliando-os no aprofundamento da compreensão dos procedimentos algorítmicos.

A tarefa proposta consistiu na realização de duas operações de subtração:

- (i) $637 - 215$
- (ii) $743 - 208$



recorrendo ao algoritmo da decomposição da subtração. De salientar que a operação em (i) não implica a decomposição de uma unidade de ordem superior, ao contrário da operação em (ii). As resoluções destas operações tiveram como base a utilização e interação com a *applet Base Blocks Subtraction* do repositório do *National Library of Virtual Manipulatives*¹.

Esta *applet* tem a particularidade de distinguir, por cores, o aditivo (azul) do subtrativo (vermelho) o que facilita a sua manipulação. Apresenta também a potencialidade da decomposição automática de uma unidade, quando esta é arrastada para a ordem inferior, bem como a sua composição quando se agrupam um número de unidades num valor igual à base.

Para cada uma das operações, os alunos deveriam:

- a) mencionar os objetos que foram usados (cubinhos, barras, placas, cubos) e porquê, bem como a razão do local onde estão posicionados;
- b) explicar como foi resolvida, passo a passo, a situação, usando terminologia matemática adequada;
- c) explicar o significado do resultado obtido e a sua relação com a resposta ao enunciado.

A escolha desta *applet* deveu-se à relação entre os conceitos matemáticos envolvidos e os procedimentos exigidos na compreensão de um sistema de numeração.

A parte final da sessão foi reservada a uma discussão em grupo turma. Foi indicado, pelo professor, um grupo para apresentar a forma como resolveu as tarefas, iniciando-se, assim, a discussão, com uma duração de cerca de 30 minutos. O critério da escolha, esteve relacionado com a avaliação por observação direta efetuada pelos professores, através do acompanhamento que foi sendo feito durante a resolução das tarefas, cujas resoluções seriam as mais pertinentes para a apresentação na discussão coletiva. Ao grupo que a iniciava era solicitado que partilhasse o modo como resolveram as tarefas propostas, explicando todos os raciocínios e procedimentos matemáticos, bem como todas as representações. Aos restantes grupos pedia-se que fizessem uma análise crítica do que tinha sido apresentado, sugerindo correções, acrescentando aspetos em falta ou resoluções alternativas – orquestrada pelo professor, de forma a garantir a qualidade matemática das intervenções, mediar a interação entre pares e sistematizar as aprendizagens matemáticas. Deste modo, esperava-se que a turma participasse ativamente para que se partilhassem e discutissem as diferentes formas de solucionar a tarefa e se compreendessem efetivamente todos os procedimentos e raciocínios matemáticos.

Recolha e análise de dados

A recolha dos dados foi efetuada durante uma sessão de duas horas, no ano letivo 2017/2018. Foram utilizadas diferentes fontes, tais como: os registos escritos, individuais e de

¹ http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_155_g_2_t_1.html

Nota: devido à recente política de desativação da tecnologia necessária para o funcionamento das *applets* Java nos *browsers*, o *link* deve ser acedido diretamente no *Internet Explorer* ou no *Edge*, selecionando, posteriormente, “abrir com o *Internet Explorer*”, na opção “mais ferramentas”.



grupo, efetuados pelos alunos aquando da realização das tarefas; o registo e observações do professor e o diário de bordo do professor-investigador; as gravações do áudio e das imagens dos ecrãs dos computadores em que os alunos trabalharam, recorrendo a software próprio para o efeito, FlashBack Express. Antes da intervenção, os alunos responderam a um questionário (Martins, N., Sampaio, Costa, & Martins, F., 2017) sobre as suas perceções do conhecimento do conteúdo matemático e cujas respostas individuais se revelaram, em média, no nível 3, numa escala situada entre 1 e 5.

A análise dos dados passou pelo cruzamento entre os registos escritos, as gravações de áudio dos alunos e vídeo da captação dos ecrãs dos computadores sobre os seguintes itens:

- Princípios fundamentais de um sistema de numeração:
 - (i) Agrupar em conjuntos de elementos igual ao valor da base decimal;
 - (ii) Valor posicional.
 - (iii) Procedimentos envolvidos no algoritmo da decomposição da subtração:
- Decomposição de uma unidade de ordem superior.
- Terminologia matemática usada.

Apresentação dos resultados

Os alunos começaram por efetuar a operação (i) com a representação, na *applet*, das quantidades correspondentes ao aditivo e subtrativo, que fizeram sem qualquer dificuldade, solicitando, depois, o início da realização da subtração pretendida (Figura 3).

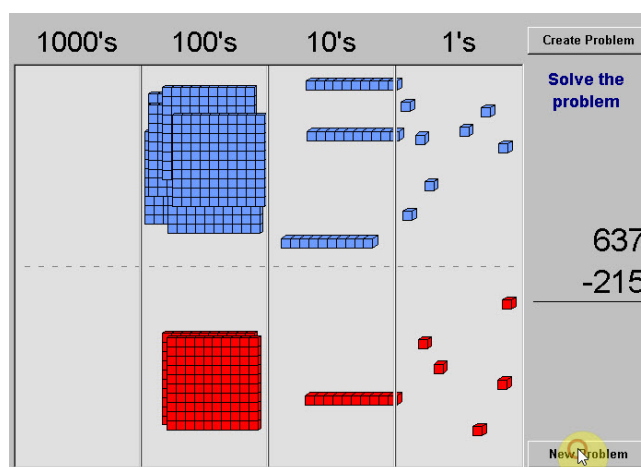


Figura 3: Interação com a applet, relativa à alínea (i), pelo par.

Durante a realização da subtração na *applet*, a aluna A foi descrevendo oralmente a manipulação realizada, numa tentativa de melhorar, através da prática, o uso de terminologia matemática adequada:

Aluna A: Agora iremos movimentar por arrastamento da parcela inferior para a parcela superior, na ordem zero. Como não sobrou nenhum cubinho na parcela inferior poderei seguir para a parcela... (corrigindo de imediato), para a ordem seguinte, movimentando por arrastamento da parcela inferior para a parcela superior (Figura 4). (...) Tendo obtido assim o resultado final (Figura 4).

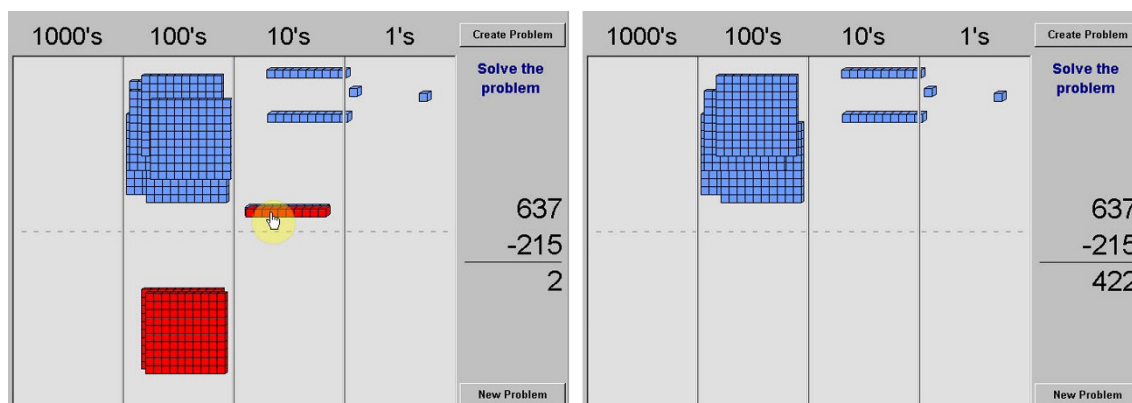


Figura 4: Interação com a *applet*, relativa à alínea (i), pelo par (continuação).

Enquanto a aluna A fez a manipulação da *applet*, a aluna B foi construindo a resposta escrita à operação (i) debatendo-se com uma dúvida:

Aluna B: Eu não sei se é parcelas... parcelas não é na soma?

Aluna A: Aqui também será parcela superior e parcela inferior?

Aluna B: Não, é o subtrativo e o...

Aluna A: Mas quando só falas em representar por parcelas, é só...

Aluna B: Mas eu acho que parcelas é só da soma.

Aluna A: Ah, que se utiliza esse termo?

Aluna B: Sim – (sem terem certeza acerca da terminologia matemática correta, decidem pedir ajuda ao professor).

Aluna A: Nós, no caso da subtração, também podemos falar em parcelas?

Aluna B: Ou é só para a soma? Na adição?

Professor: Parcelas é só na adição.

Aluna B: É o subtrativo, que é o de baixo e o...

Professor: Sim, e o?...

Aluna B: Aditivo!

Aluna A: Aditivo e subtrativo?

Professor: Sim.



Este excerto de diálogo é exemplificativo da procura de melhorias por parte das alunas no uso de terminologia matemática adequada, conseguida pelo esforço colaborativo e discussão entre o par e com o acompanhamento do professor. Uma vez identificada a falha, as alunas reviram o que já tinham escrito antes de prosseguirem (Figura 5):

ADITIVO
a) NO PARCELA SUPERIOR REPRESENTAÇÃO: 7 UNIDADES NÃO
AGRUPADAS, UTILIZANDO 7 CUBINHOS; 3 DEZENAS, UTILIZANDO
3 BARRAS; 6 CENTENAS, UTILIZANDO 6 PLACAS.
SUBTRATIVO
NO PARCELA INFERIOR REPRESENTAÇÃO: 5 UNIDADES NÃO
AGRUPADAS, UTILIZANDO 5 CUBINHOS; 1 DEZENA, UTILIZANDO
1 BARRA; 2 CENTENAS, UTILIZANDO 2 PLACAS.

Figura 5: Resposta à alínea (i), a), pelo par.

É possível identificar, na resposta das alunas, a forma como relacionaram as quantidades com o significado matemático da sua representação na *applet*, no entanto, continuaram a cometer algumas incorreções (Figura 6):

b) 1º REPRESENTAÇÃO NO PARCELA SUPERIOR 7 UNIDADES
NÃO AGRUPADAS, 3 DEZENAS E 6 CENTENAS.
2º REPRESENTAÇÃO NO SUBTRATIVO 5 UNIDADES NÃO AGRUPADAS,
1 DEZENA E 2 CENTENAS.
3º NA ORDEM 0 MOVIMENTAÇÃO POR ARRASTAMENTO AS
UNIDADES DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, SOBRANDO
2 UNIDADES.
4º NA ORDEM 1 MOVIMENTAÇÃO POR ARRASTAMENTO 1
UNIDADE DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, SOBRANDO
2 UNIDADES.
5º NA ORDEM 2 MOVIMENTAÇÃO POR ARRASTAMENTO 2 UNIDADES
DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, TENDO SOBRAO 4
UNIDADES.
NOTA QUANDO MOVIMENTAÇÃO POR ARRASTAMENTO DO SUBTRATIVO
PARA O ADITIVO, ESTAMOS A ANULAR A QUANTIDADE MOVIMENTADA.
c) $(7 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^2) - (5 \times 10^0 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^2) =$
 $637 - 215 = 422$
4 CONJUNTOS DE 100
2 CONJUNTOS DE 10
2 UNIDADES NÃO AGRUPADAS

Figura 6: Resposta à alínea (i), b) e c), pelo par.

As alunas referem-se aos objetos como conjuntos de 10 ou conjuntos de 100, ao invés de grupos de 10 ou grupos de grupos de 10 (dependendo da ordem), não vincando, por isso, a formação de grupos de 10 - um dos princípios base de um sistema de numeração - e não explicando o significado do resultado obtido, neste caso, o resto, diferença ou excesso, considerando suficiente apresentarem uma expressão matemática.

Para a alínea (ii) voltaram a representar as quantidades correspondentes ao aditivo e ao subtrativo sem qualquer dificuldade, solicitando, na *applet*, o início da realização da subtração pretendida (Figura 7), que concluíram rapidamente (Figura 7). Confrontando o que escrevem com a manipulação da *applet*, pode afirmar-se que demonstram compreender os procedimentos envolvidos no algoritmo da decomposição da subtração.

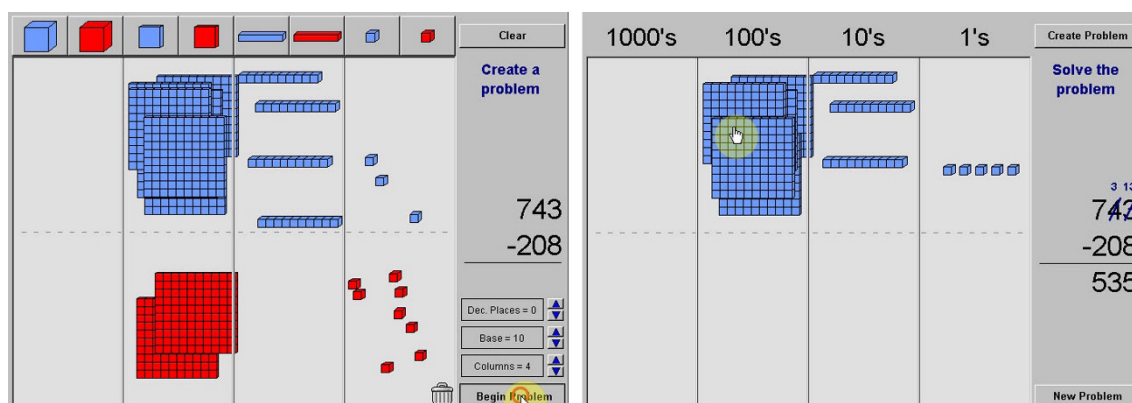


Figura 7: Interação com a applet, relativa à alínea (ii), pelo par.

O que foi referido em relação ao registo escrito para a alínea (i) é igualmente válido para a alínea(ii), já que as alunas se limitaram a replicar o formato da resposta, modificando as quantidades envolvidas nos diferentes passos (Figuras 8 e 9). Esta opção de repetir o formato de resposta para ambas as alíneas, levou a que tivessem cometido as mesmas incorreções. No que diz respeito à terminologia matemática, as incorreções que identificaram anteriormente, de forma clara, são corrigidas. As alunas também mostram compreender o procedimento da decomposição de uma unidade de ordem superior (Figura 9, 4.º ponto).

a) NO SUBT. ADITIVO ZERO REPRESENTAÇÃO: 3 UNIDADES
NÃO AGROPADAS, UTILIZANDO 3 CUBINHOS; 4 DEZENAS,
UTILIZANDO 4 BARRAS; 7 CENTENAS, UTILIZANDO 7
PLACAS -
NO SUBTRATIVO REPRESENTAÇÃO: 8 UNIDADES NÃO AGROPADAS
UTILIZANDO 8 CUBINHOS; 0 DEZENAS, UTILIZANDO 0 BARRAS;
2 CENTENAS, UTILIZANDO 2 PLACAS -

Figura 8: Resposta à alínea (ii), a) pelo, par.



b) 1º NO ADITIVO REPRESENTAMOS 3 UNIDADES NÃO AGRUPADAS, 4 DEZENAS E 7 CENTENAS.
2º NO SUBTRATIVO REPRESENTAMOS 3 UNIDADES NÃO AGRUPADAS, 0 DEZENAS E 2 CENTENAS.
3º NA ORDEM 0 JOVIMENTAMOS POR ARRASTAMENTO 3 UNIDADES DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, ANULANDO ESSAS MESMAS UNIDADES.
4º DECOMPOZEMOS UMA UNIDADE DE ORDEM 1 PARA A ORDEM INFERIOR.
5º NA ORDEM 0 JOVIMENTAMOS POR ARRASTAMENTO 5 UNIDADES DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, ANULANDO 5 UNIDADES. RESTANDO 5 UNIDADES.
6º NA ORDEM 1 JANTIVAMOS AS 3 UNIDADES DO ADITIVO.
7º NA ORDEM 2 JOVIMENTAMOS POR ARRASTANDO 2 UNIDADES DO SUBTRATIVO PARA O ADITIVO, ANULANDO ESSA MESMA QUANTIDADE. RESTANDO 5 UNIDADES.

c) $(3 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^2) - (8 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^2) =$
 $= 743 - 208 = 535$
5 CONJUNTOS DE 100
3 CONJUNTOS DE 10
5 UNIDADES NÃO AGRUPADAS.

Figura 9: Resposta à alínea (ii), b) e c), pelo par.

Os últimos trinta minutos da sessão foram dedicados à discussão em grupo turma. De entre os 12 pares existentes na turma, foi escolhido um, para dar início à discussão que acompanhou a explicação da sua resolução das tarefas com a demonstração da manipulação na *applet*. Para a operação (i) começaram por explicar como obtiveram a representação do aditivo e do subtrativo: “No aditivo colocámos sete unidades na ordem 0, que representam sete cubinhos; três dezenas na ordem 1, que representam três barras e seis centenas na ordem 2, que representam seis placas. No subtrativo colocámos cinco unidades na ordem 0, que representam cinco cubinhos; uma dezena na ordem 1, que representam uma barra e duas centenas na ordem 2, que representam duas placas”.

A forma como relacionaram os objetos usados com o seu significado matemático não foi correta, o que obrigou o professor a interromper para corrigir a terminologia usada pelas alunas, sugerindo que deveriam verbalizar “usámos três barras para representar três dezenas”.



Ao descreverem a realização da subtração na *applet*, o par que deu início à discussão, cometeu algumas incorreções na terminologia matemática empregue, como, por exemplo, ao dizer “depois restaram duas unidades na parcela do aditivo” ou “até arrastarmos todos e anularmos os do subtrativo com os do aditivo”. O professor opta por não fazer as correções de imediato, esperando pela discussão em grande grupo para o fazer.

Quanto ao significado do resultado obtido, a explicação das alunas focou-se apenas na quantidade “quatrocentos e vinte e dois, em que o dois representa duas unidades soltas, o dois a seguir na ordem 1, representa dois grupos de dez e o quatro representa quatro grupos de grupos de dez. O professor relembra a terminologia matemática adequada, “unidades não agrupadas, não unidades soltas”, para de seguida pedir que expliquem o significado do resultado e a sua relação com a situação problemática original. Uma vez que não conseguem, é dada a oportunidade aos restantes grupos de participarem surgindo, desta forma, os termos resto e diferença, a que o professor acrescentou excesso. De referir que o par acompanhado neste estudo, não se mostrou muito participativo na discussão, no entanto foi registando os contributos da discussão, mostrando, assim, reconhecimento da sua importância para colmatar falhas e procurar melhorias.

Ao apresentarem a operação (ii) o par teve em conta as indicações anteriores, identificando corretamente os objetos usados e o seu significado matemático. Já a explicação da resolução da tarefa volta a ser feita com algumas incorreções, algumas delas criticadas pelos restantes pares da turma, outras apontadas pelo professor. Relativamente ao que foi dito pelo par apresentante, a turma questiona a expressão “anular os do subtrativo”; a discussão de sugestões de melhoria, mediada pelo professor, leva a que cheguem à conclusão que deveriam corrigir para “retirámos uma unidade ao aditivo e uma unidade ao subtrativo”.

Concluída a intervenção da turma, o professor recordou a importância de existir concórdia entre a manipulação realizada, as representações obtidas e o seu significado matemático. De seguida foi discutida uma expressão usada pelo par apresentante, “é impossível a três retirar oito”, com o professor a realçar que o aditivo, neste caso, corresponde a setecentas e quarenta e três unidades, quantidade à qual se pode retirar oito unidades sem qualquer limitação, além de que “mais tarde, a maneira como dizem, vai dar origem a um conflito com a aprendizagem de números inteiros relativos”. A encerrar a discussão em torno da alínea (ii), o professor questionou a turma acerca de mais uma expressão usada pelo par: “movimentámos por arrastamento uma barra da ordem 1 para a ordem 0, o que está a acontecer aqui?” A turma não tem qualquer dúvida na resposta, identificando de forma correta a decomposição de uma unidade de ordem superior.

Em síntese, as alunas demonstraram compreender os procedimentos inerentes ao algoritmo da decomposição da subtração. A manipulação e interação com *applet* possibilitou-lhes visualizar e obter um *feedback* imediato das suas ações permitindo-lhes, deste modo, executarem ações simples como experimentar, corrigir, conjecturar e repetir. O constante diálogo que foram mantendo com o par, facilitou, também, o aprofundamento da compreensão de procedimentos e conceitos fundamentais, como os princípios de funcionamento de um sistema de numeração, não só no que respeita ao agrupamento em conjuntos de elementos igual ao valor da base, como também ao conceito de valor posicional. Quanto à terminologia matemática usada, constata-se que houve uma evolução, perceptível pela análise feita nesta secção, com base nos registos escritos e nos diálogos



entre pares nela apresentados. Para a evolução quer no aprofundamento dos conhecimentos, quer na terminologia, o momento da discussão em grupo turma, deu também um contributo bastante importante, pois para além de uma sistematização de todo o processo, permitiu ainda ajustamentos nos procedimentos e correções na terminologia que ainda permaneciam desajustados.

Desta análise, podemos afirmar que este ambiente de aprendizagem colaborativo permitiu, aos alunos, explorar conceitos e ideias matemáticas, suportadas pelo contributo da *applet* escolhida.

Discussão dos resultados

As ferramentas digitais, em particular os manipulativos virtuais, têm vindo a ser utilizadas no processo de ensino e de aprendizagem também como forma de proporcionar outras formas de abordagens aos conteúdos curriculares. Estudos como os de Lin, Shao, Wong, Li e Niramitranon (2011), de Moyer-Packenham, Ulmer e Anderson (2012), Martins et al., (2018, 2019) e Freitas (2019) alegam que os manipulativos virtuais são benéficos para a compreensão de conceitos matemáticos. A sua rápida difusão, acesso facilitado e consequente integração nas práticas letivas levou investigadores a analisarem e a tentarem descrever o tipo de conhecimento que os futuros professores e professores precisam para ensinar com tecnologia (Groth, Spickler, Bergner, & Bardzell, 2009). Preparar futuros professores para integrarem este tipo de ferramentas nas suas práticas é um foco essencial para as instituições do ensino superior que os formam (Chai, Koh, & Tsai, 2010).

Os resultados apresentados corroboram os dos estudos de Lin, Shao, Wong, Li e Niramitranon (2011), Moyer-Packenham, Ulmer e Anderson (2012), Martins et al., (2018, 2019) e de Freitas (2019). De facto, há evidências de que os alunos não só aprofundaram os conceitos trabalhados como também melhoraram a forma de se expressarem, tentando usar uma terminologia matemática mais correta, como demonstram os diálogos e os registos escritos protagonizados pelo par, em é possível verificar que procuram sempre usar a terminologia mais correta.

Por outro lado, a atuação do professor, durante a discussão em grupo turma, ao promover a comunicação matemática, com o intuito de criar, para os alunos, situações propícias ao desenvolvimento, justificação e argumentação de ideias matemáticas (Ulleberg & Solem, 2018) contribuiu para que se atingissem os objetivos de aprendizagem. Durante as interações entre alunos e professor, este procurou garantir o uso de linguagem matemática adequada, correção na explicitação de conceitos e ideias matemáticas, orientando, sempre que necessário, a discussão, para situações mais pertinentes (Lampert, Beasley, Ghouseini, Kazemi, & Franke, 2010).

Também a intencionalidade de fomentar a interação entre alunos e professores no contexto de aprendizagem colaborativa (Meirinhos & Osório, 2017), contribuiu para a promoção de aprendizagens ativas e significativas por parte dos alunos, tirando partido das opções tecnológicas tomadas (Paniagua & Istance, 2018). Considera-se que, para tal, também teve um papel relevante a monitorização e orquestração das discussões pelo professor (Ponte, 2017; Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011; Ulleberg & Solem, 2018) e o modo como foi feita a sistematização da discussão no final da sessão.



Conclusões

Os cursos de formação de professores ministrados por instituições do ensino superior, têm como desafio preparar os seus alunos para serem capazes de, no futuro, ensinarem, um dado conteúdo específico, a partir de uma estrutura de conhecimento integrado. Como tal, este estudo também teve como objetivo paralelo proporcionar a futuros professores e professores, a oportunidade de experienciar situações que envolvam tópicos que irão lecionar usando, como suporte para a compreensão e aprofundamento, um manipulativo virtual num ambiente de aprendizagem colaborativo.

Como resposta à questão de investigação, consideramos que a integração da *applet Base Blocks Subtraction*, num processo de aprendizagem colaborativa, contribuiu para que os alunos aprofundassem e desenvolvessem conceitos fundamentais relacionados com os procedimentos inerentes ao algoritmo da decomposição da subtração. O recurso, tão usual, a mnemónicas desprovidas de significado, foi evitado e, tentou-se ir à compreensão dos processos, mesmo os mais elementares, do algoritmo e todos os procedimentos que lhe são inerentes. De facto, a integração da *applet*, revelou-se estratégica para os alunos terem não só uma perceção visual desses processos e procedimentos, mas também dos envolvidos nos princípios fundamentais de um sistema de numeração, o que lhes permitiu aprofundar o seu conhecimento do tópico abordado. O ambiente de aprendizagem colaborativo em que se desenrolou a sessão, permitiu que os alunos participassem ativamente na construção do seu conhecimento, adquirindo informação através da compreensão, alcançando, assim, aprendizagens significativas e, que se espera, mais duradouras.

Agradecimentos

Ao Instituto de Telecomunicações que financiou parcialmente este trabalho pela FCT/MCTES através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado por fundos comunitários no âmbito do projeto UIDB/50008/2020. Este trabalho também é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto UID/CED/00194/2019.

Referências

- Akkan, Y. and Çakir, Z. (2012). Pre-Service Classroom Teachers' Opinions on Using Different Manipulatives in Mathematics Teaching. *The Journal of Instructional Technologies & Teacher Education*. 1 (1), 68–83.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M.C. (2013). Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico - Matemática, Caderno de Apoio - 1.º Ciclo, Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bouck, E. C., Working, C., & Bone, E. (2018). Manipulative Apps to Support Students With Disabilities in Mathematics. *Intervention in School and Clinic*, 53(3), 177–182. <https://doi.org/10.1177/1053451217702115>
- Brandon, D. P., & Hollingshead, A. B. (1999). Collaborative learning and computer-supported groups. *Communication education*, 48(2), 109-126.

- Chai, C. S., Koh, J. H. L., & Tsai, C. C. (2010). Facilitating preservice teachers' development of Technological, Pedagogical, and Content Knowledge (TPACK). *Educational Technology & Society*, 13(4), 63–73.
- Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking Concrete Manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 270-279.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2002). Teaching with computers in early childhood education: Strategies and professional development. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 23, 215-226.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the *Building Blocks* project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 136–163.
- Cope, L. (Spring 2015). Math manipulatives: Making the abstract tangible. *Delta Journal of Education*, 5(1), 10-19.
- Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Los Angeles: Sage.
- Foot, H., Tolmie, A., & Thomson, J. (2003). Computer support for collaborative learning of child pedestrian skills. In Gillies, R., & Asman, A. (Eds.) *Cooperative Learning* (pp. 187-205). Routledge.
- Freitas, R. C. (2019). Contribuições do aplicativo multibase em tablets para a compreensão do “vai um” e “empresta um” em operações de adição e subtração. *Revemat*, 14(1), 1-19.
- Gianotto, D. E. P., & da Silva Diniz, R. E. (2010). Formação inicial de professores de Biologia: a metodologia colaborativa mediada pelo computador e a aprendizagem para a docência. *Ciência & Educação (Bauru)*, 16(3), 631-648.
- Groth, R., Spickler, D., Bergner, J., & Bardzell, M. (2009). A Qualitative Approach to Assessing Technological Pedagogical Content Knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(4), 392-411. Waynesville, NC USA: Society for Information Technology & Teacher Education. Retrieved October 6, 2019.
- Heath, G. D., (2002) Using Applets in Teaching Mathematics. *Mathematics and Computer Education*. 36(1), 43-52.
- Jeong, H., & Hmelo-Silver, C. E. (2016). Seven affordances of computer-supported collaborative learning: How to support collaborative learning? How can technologies help?. *Educational Psychologist*, 51(2), 247-265.
- Lampert, M., Beasley, H., Ghouseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010). Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In *Instructional explanations in the disciplines*, 129-141. Springer, Boston, MA.
- Lin, C.-P., Shao, Y.-J., Wong, L.-H., Li, Y.-J., & Niramitranon, J. (2011). The impact of using synchronous collaborative virtual tangram in children's geometric. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10(2), 250-258.
- Liu, S. H. (2016). Teacher education programs, field-based practicums, and psychological factors of the implementation of technology by pre-service teachers. *Australasian Journal of Educational Technology*, 32(3), 65–79. <https://doi.org/10.14742/ajet.2139>
- Martins, N. (2020). *Um modelo de prática pedagógica de articulação entre conteúdo, pedagogia e tecnologia na formação inicial de professores*. (Tese de Doutorado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro).
- Martins, N., Lopes, B., Cravino, J., Costa, C., & Martins, F. (2018). O uso de manipulativos virtuais na compreensão do algoritmo da adição. In Lopes, R. P., Pires, M. V., Castanheira, L., Silva, E. M. Santos, G., Mesquita,

- C., & Vaz, P., (Eds.), *Livro de atas do 3.º Encontro Internacional de Formação na Docência*, INCTE 2018 (pp. 966-978). Bragança, Portugal: Instituto Politécnico de Bragança (ISBN: 978-972-745 241-5).
- Martins N., Martins F., Lopes B., Cravino J., & Costa C. (2019). The Use of Applets in Understanding Fundamental Mathematical Concepts in Initial Teacher's Training. In: Tsitouridou M., A. Diniz J., Mikropoulos T. (Eds.), *Technology and Innovation in Learning, Teaching and Education. TECH-EDU 2018*. Communications in Computer and Information Science, vol 993. Springer, Cham.
- Martins, F., & Ribeiro, C. M. (2013). Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino & I. S. Simões (Eds.), *Atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 192-200). Leiria: ESECS.
- Martins, N., Sampaio, P., Costa, C., & Martins, F. (2017). A perceção do M-TPACK de futuros professores: um estudo exploratório. In Pires, M. V., Mesquita, C., Lopes, R. P., Santos, G., Cardoso, M., Sousa, J., Silva, E., & Teixeira, C. (Eds.) (2017). *Livro de atas do 2.º Encontro internacional de formação na docência*, INCTE 2017 (pp. 74-86). Bragança, Portugal: Instituto Politécnico de Bragança. ISBN: 978-972-745-222-4. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10198/4960>
- Martins, S. (2020). *Applets como artefactos de mediação semiótica na formação inicial de professores na Licenciatura em Educação Básica*. Quadrante, 29(1), 74-96.
- Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/512>
- McWhaw, K., Schnackenberg, H, Sclater, J., & Abrami, P. (2003). From co-operation to collaboration: Helping students become collaborative learners. In Gillies, R., & Asman, A. (Eds.) *Cooperative Learning* (pp. 79-96). Routledge.
- MEC. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.
- Meirinhos, M., & Osório, A. (2017). Criação de comunidades virtuais de aprendizagem colaborativa para a formação contínua de professores. *Revista Internacional de Tecnologías en la Educación*, 4(1).
- Moyer-Packenham, P. S., Ulmer, L. A., & Anderson, K. L. (2012). Examining pictorial models and virtual manipulatives for third-grade fraction instruction. *Journal of Interactive Online Learning*, 11(3), 103-120.
- Olkun, S. (2003). Comparing computer versus concrete manipulatives in learning 2D geometry. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 22(1), 43-56.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2018). *The future of education and skills: Education 2030*. Paris: OECD.
- Disponível em: [https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20\(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf)
- Paniagua, A., & Istance, D. (2018), "The importance of innovating pedagogy: Overview and key messages", in *Teachers as Designers of Learning Environments: The Importance of Innovative Pedagogies*, OECD Publishing, Paris.
- <https://doi.org/10.1787/9789264085374-3-en>
- Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33-56). Lisboa: APM.
- Ralston, P. S., Tretter, T. R., & Brown, M. K. (2017). Implementing Collaborative Learning across the Engineering Curriculum. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, 17(3), 89-108.
- Retnowati, E., Ayres, P., & Sweller, J. (2017). Can collaborative learning improve the effectiveness of worked examples in learning mathematics?. *Journal of educational psychology*, 109(5), 666.

- Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problema synthesis. In *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Shifter, D., Bastable, V., & Russell, S. J. (2016). Making sense of addition and subtraction algorithms. NCTM.
- Shin, M., Bryant, D. P., Bryant, B. R., McKenna, J. W., Hou, F., & Ok, M. W. (2017). Virtual Manipulatives: Tools for Teaching Mathematics to Students With Learning Disabilities. *Intervention in School and Clinic*, 52(3), 148–153.
- <https://doi.org/10.1177/1053451216644830>
- Simão, A., Flores, M., Morgado, J., Forte, A., & Almeida, T. (2009). *Sísifo*. Revista de Ciências de Educação, 8, 61-74.
- Steen, K., Brooks, D., & Lyon, T. (2006). The impact of virtual manipulatives on first grade geometry instruction and learning. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24, 373-391.
- Tondeur, J., Roblin, N., van Braak, J., Voogt, J., & Prestridge, S. (2017). Preparing beginning teachers for technology integration in education: Ready for take-off? *Technology, Pedagogy and Education*, 26, 157–177.
- Ulleberg, I., & Solem, I. H. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norge*, 12(1), Art-3, 21, sider. <https://doi.org/10.5617/adno.5607>
- Verdasca, J., Neves, A., Fonseca, H., Fateixa, J., Procópio, M., & Magro-C, T. (2020). *Melhorar aprendizagens em matemática pelo uso intencional de recursos digitais: O Hypatiamat como intervenção preventiva na CIM do Ave* [PDF].
- Disponível em: <http://pnpse.min-educ.pt/estudo4>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Full-Text. (N.D.). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-92784-6>