



Materiais Manipuláveis na aprendizagem da matemática: uso do Tabuleiro Decimal na compreensão dos sentidos da adição

Manipulative materials in learning mathematics: using the Decimal Board to understand the meanings of addition

Rita Neves Rodrigues

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Portugal
ritanevesrodrigues@hotmail.com

Virgílio Rato

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, Portugal
virgilor@esec.pt

Fernando Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, NIEFI, UNICID, Portugal
Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, Portugal
fmimartins@esec.pt
<https://orcid.org/0000-0002-1812-2300>

Resumo:

A importância da utilização dos materiais manipuláveis como auxílio das aprendizagens matemáticas é um tema fulcral e visado nos estudos científicos da especialidade. Por outro lado, a utilização destes materiais proporciona aos alunos que sintam, toquem e manipulem, passando das representações ativas para as representações visuais e/ou simbólicas, evoluindo do concreto para o abstrato. Através do contacto com 25 alunos do 1.º ano de escolaridade, no âmbito do estágio da prática educativa, foram detetadas dificuldades ao nível da compreensão dos sentidos da adição. As dificuldades relacionadas com o sentido de número e a diminuta compreensão dos significados das operações aritméticas, nomeadamente na adição, constituem, segundo diversos autores, as grandes dificuldades sentidas pelos alunos, na área da matemática. Deste modo, surgiu a seguinte questão de investigação: De que modo o uso do Tabuleiro Decimal influencia a compreensão dos alunos sobre os sentidos da operação aritmética adição e os princípios fundamentais do sistema de numeração decimal? Assim, tornou-se pertinente o desenvolvimento de um estudo qualitativo, de índole interpretativa e com um design investigação-ação. A análise dos dados recolhidos evidencia uma melhoria na compreensão dos alunos sobre os sentidos da adição, os princípios do sistema de numeração decimal e a composição em uma unidade de ordem superior. Estas evidências sugerem que a utilização do Tabuleiro Decimal foi um artefacto que auxiliou a promoção dessas aprendizagens matemáticas.

Palavras-chave: 1.º Ciclo do Ensino Básico; materiais manipuláveis; sentidos da adição; aprendizagem.



Abstract:

The importance of the use of concrete manipulatives as an aid to mathematical learning is a central theme and targeted in scientific studies of the specialty. On the other hand, the use of these materials allows the pupils to feel, touch and manipulate, moving from active representations to visual and/or symbolic representations, evolving from concrete to abstract. During the accomplishment of the training inserted in the educational practice in the first year of primary education with 25 students, we noticed that the students had some difficulties in the understanding of addition meanings. The difficulties related to the notion of the number sense and little understanding of arithmetic operations meanings, namely addition, represent, according to several authors, the great difficulties felt by the pupils in Mathematics. Thus, the following research question arises: Does the use of the Decimal Board influence students' understanding (ou knowledge) of the meanings of arithmetic addition and the fundamental principles of decimal number system? Thereby, it became relevant the development of a qualitative study, of interpretative nature and with an action research design. The analysis of the collected data shows an improvement in understanding the addition meanings, the principles of decimal number system and the composition in a superior order unity. These evidences suggest that the use of the Decimal Board was an artifact that helped promote these mathematical learnings.

Keywords: Primary school; manipulative materials; addition meanings; learning.

Resumen:

La importancia del uso de materiales manipulativos como ayuda al aprendizaje de la matemática es un tema indispensable y concernido en los estudios científicos. Por otro lado, el uso de materiales permite a los estudiantes sentir, tocar y manipular, pasando así de representaciones activas a visuales y/o simbólicas, evolucionando del concreto al abstracto. Al realizar la pasantía en el 1.º de educación primaria con 25 alumnos, fue posible comprender algunas dificultades, sentidas por los estudiantes, en términos de comprensión de los significados de la adición. Las dificultades relacionadas con el sentido del número y de los significados de las operaciones aritméticas, concretamente la adición, constituyen, según varios autores, las grandes dificultades que sienten los estudiantes en el área de las matemáticas. Así, surgió la siguiente pregunta: ¿El uso del Tablero Decimal influye en la comprensión de los estudiantes sobre los significados de la operación aritmética de adición y los principios fundamentales del sistema de numeración decimal? Así, se hizo relevante el desarrollo de un estudio cualitativo, de naturaleza interpretativa y con un diseño de investigación-acción. El análisis de los datos recopilados muestra una mejora en la comprensión de los significados de la adición, de los principios del sistema de numeración decimal y de la composición en una unidad de orden superior. Estas evidencias sugieren que el uso del Tablero Decimal fue un artefacto que ayudó a promover estos aprendizajes matemáticos.

Palabras clave: Educación primaria; materiales manipulativos; significados de adición; aprendizaje.

Introdução

As dificuldades relacionadas com o sentido de número, a ausência da compreensão dos significados das operações e o reduzido desenvolvimento do cálculo mental, constituem as



principais dificuldades sentidas na área da matemática nos primeiros anos de escolaridade (Dias, Santiago, & Martins, 2017; Pires, Colaço, Horta, & Ribeiro, 2013). Segundo Castro e Rodrigues (2008, p. 11), por sentido de número entende-se a “compreensão global e flexível dos números e das operações” procurando estabelecer relações entre estes, em contextos diversificados, que não só a escola, mas ao longo da vida. Comumente, professores e alunos recorrem a mnemónicas aquando do ensino dos algoritmos das operações aritméticas, tentando camuflar as dificuldades sentidas e a falta de compreensão sobre os raciocínios aí envolvidos (Marques, Rato, & Martins, 2018). Como referem diversos autores (Correia, 2018; Marques, 2018; Pratas, Rato, & Martins, 2016), e consta no documento do Ministério da Educação e Ciência (MEC), Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013), o ensino da matemática deve ocorrer partindo de algo concreto para, gradualmente, se chegar ao abstrato. O conceito de material didático abrange inúmeras definições e incorpora diferentes tipos de materiais, consoante as suas características e finalidades. Optou-se por considerar a definição proposta por Aires e Almeida (2019) que definem material didático como todo aquele que auxilia o processo de ensino e de aprendizagem, sendo este manipulável, quando permite a manipulação por parte dos alunos.

A utilização de materiais didáticos permite concretizar os mais diversos conteúdos abstratos da matemática e, assim, ajudar a ultrapassar algumas das dificuldades iniciais sentidas nesta disciplina (Botas & Moreira, 2013; Rocha & Teixeira, 2018).

Estudos desenvolvidos até ao momento sugerem que a utilização de artefactos nas práticas letivas permite aos alunos desenvolver as suas noções matemáticas e apropriar-se dos conceitos matemáticos aprendidos (Aires & Almeida, 2019; Clements & Samara, 2009; Lopes & Leivas, 2017; Santos & Sobrinho, 2016). Para além das potencialidades já referidas para a utilização de materiais didáticos na prática letiva, Catarino e Soares (2018) concluem que a utilização deste tipo de recursos incute nas crianças o gosto de aprender e de se formarem como cidadãos conscientes do mundo que os rodeia. Os alunos, ao utilizarem um qualquer material manipulável, encontram-se a desenvolver representações ativas, gerando modelos ilustrativos e, posteriormente, construindo significados e conceitos (Araújo, 2014). Pinto e Canavarro (2012) concluem, num estudo que pretende avaliar o papel das representações na resolução de problemas de matemática no 1.º ano de escolaridade, que a utilização de representações ativas possibilita a concretização do raciocínio matemático, subjacente à resolução dos problemas propostos aos alunos. As mesmas autoras afirmam que, por vezes, só realizando representações ativas é que os alunos ficam aptos a resolver problemas matemáticos.

Aquando da realização do estágio no âmbito da prática educativa, foi possível acompanhar os alunos de uma turma do 1.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) percebendo as suas principais dificuldades na área da matemática. Frequentemente, os alunos cometiam lapsos na resolução de adições, não efetuando, quando necessário, por exemplo, a composição de unidades numa unidade de ordem superior. Na realização de tarefas, era habitual os alunos apresentarem dificuldades na decisão de qual a operação a utilizar, adição ou subtração, demonstrando que não compreendiam os sentidos inerentes a cada tarefa.



Deste modo e dadas dificuldades observadas nesta turma, referentes à compreensão dos princípios do sistema de numeração decimal e aos sentidos da operação adição, efetuou-se uma pesquisa na literatura sobre o material didático mais adequado para ajudar os alunos a colmatar estas dificuldades.

Assim, com base na literatura (e.g., Kim & Albert, 2014; Marques, Rato & Martins, 2018; Saengpun & Inprasitha, 2012) acerca dos materiais manipuláveis utilizados no ensino da matemática, considerou-se que, o Material Multibásico (em inglês, *multibase arithmetic blocks* (MAB)), ao contrário de outros materiais manipuláveis, seria o mais adequado para trabalhar a compreensão dos conceitos matemáticos referidos. Na literatura, diversos autores (Jeannotte & Corriveau, 2019; Kim & Albert, 2014; Klllogjeri & Klllogjeri, 2015; Ontario Ministry of Education, 2006b) constatarem que o MAB se constitui como um artefacto pertinente para auxiliar a promoção de aprendizagens efetivas relacionadas com o tema Número e Operações no ensino básico. Este artefacto permite a representação concreta de conteúdos abstratos, privilegia os princípios fundamentais do sistema de numeração decimal e permite auxiliar a resolução de situações problemáticas envolvendo as operações aritméticas, nomeadamente a operação adição. No entanto, devido à falta deste material no local de estágio, a professora estagiária com base, principalmente, nas características do MAB, construiu o artefacto: o Tabuleiro Decimal.

Assim, o estudo aqui apresentado tem por objetivo analisar a influência do uso do Tabuleiro Decimal na compreensão dos alunos sobre os sentidos da operação aritmética adição. E, consequentemente, responder à questão de investigação subjacente a este estudo: De que modo o uso do Tabuleiro Decimal influencia a compreensão dos alunos sobre os sentidos da operação aritmética adição e os princípios fundamentais do sistema de numeração decimal?

Contextualização teórica

As aulas de matemática, bem como das restantes áreas do saber, devem proporcionar momentos de aprendizagem proveitosos para a vida futura em sociedade e todas as suas exigências (Loureiro, 2014). Segundo um estudo realizado por Oliveira e Courela (2013), a inovação curricular assenta em três componentes principais, sendo uma delas, a utilização de materiais concretos. Esta utilização permite aos alunos adquirirem competências essenciais para a sua vida futura, nomeadamente, tornarem-se mais autónomos, sentirem-se confiantes para tomar decisões e envolverem-se na sua própria aprendizagem (Catarino & Soares, 2018). Contente (2012) refere que, particularmente no ensino das operações adição e subtração, a utilização de materiais concretos, quando mobilizado no contexto certo e da melhor forma, torna-se um recurso imprescindível.

De entre os inúmeros materiais concretos que existem à disposição do professor, este deve ter a capacidade de selecionar o mais adequado, não só ao conteúdo a lecionar, mas ao próprio aluno. Ponte e Serrazina (2000) referem que, antes dos alunos passarem ao registo simbólico das operações adição e subtração, estes devem criar os seus próprios procedimentos com auxílio de materiais concretos. Pratas et al. (2016) salientam, num estudo que visa



analisar o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição, que “é desejável que os materiais manipuláveis surjam inicialmente de modo a permitir a percepção do objeto concreto, caminhando no sentido da abstração” (pp. 37 – 38). Um estudo realizado por Lopes e Leivas (2017) conclui que os materiais concretos constituem uma ferramenta importantíssima na resolução de problemas envolvendo a operação aritmética adição. A utilização de artefactos no ensino é um tema muito abordado nos estudos já publicados, que o consideram uma mais valia para qualquer que seja a faixa etária (Catarino & Soares, 2018; Loureiro, 2014; Pratas et al., 2016). Aires e Almeida (2019) concluem que a utilização de materiais didáticos no ensino é imprescindível, nomeadamente na área da matemática. Os mesmos autores salientam que, para além desta utilização facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos mais abstratos, atribuindo-lhes significado, também alicia e cativa os alunos para a aprendizagem em geral, e a matemática, em particular. Outro estudo realizado por Santos e Sobrinho (2016) conclui também que a utilização de materiais concretos no ensino permite aos alunos, não só os aprender os conceitos matemáticos abordados, mas também, compreender “o porquê de estudá-los” (p. 159).

A interpretação incorreta dos enunciados, a escolha errada de estratégias de resolução, a interpretação de resultados e a explicação dos seus raciocínios, constituem as principais dificuldades dos alunos no que toca à resolução de problemas com os sentidos das operações adição e subtração (Vieira, 2016). Assim, é imprescindível clarificar e proporcionar aos alunos ferramentas para que compreendam os princípios do sistema de numeração decimal, desde o seu primeiro contacto com as operações aritméticas, de modo a que as resoluções, e todos os passos intermédios, sejam compreendidos e resolvidos sem precisarem de recorrer a mnemónicas (Brou, Rato, & Martins, 2014; Marques et al., 2018).

De acordo com os documentos oficiais que regem a educação matemática em Portugal, os Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013) e as Aprendizagens Essenciais (DGE, 2018) referentes à disciplina de matemática do 1.º ano do 1.º CEB, os sentidos da operação adição definem-se como “juntar” e “acrescentar”. Segundo as metas curriculares, no final do ano letivo, o aluno deve ser capaz de “Resolver problemas: Resolver problemas de um passo envolvendo situações de juntar ou acrescentar” (MEC, 2013).

Segundo Ponte e Serrazina (2000), os sentidos da operação adição, podem definir-se por “combinar” ou “mudar juntando” duas ou mais quantidades”. Uma situação em que existem duas ou mais quantidades que são transformadas numa só, define-se como a ação de “combinar”. Quando existe uma quantidade que é aumentada, a ação é a de “mudar juntando”.

Martins (2011), num estudo cujo objetivo é estudar o sentido das operações nos alunos do Ensino Básico, refere que, na escola, os alunos tendem a efetuar somente as operações pedidas, de acordo com os valores apresentados nos enunciados, obtendo um resultado numérico, não interpretando corretamente a situação. Assim, o ensino da matemática deve procurar que os alunos compreendam os sentidos das operações inerentes a cada tarefa, devendo estas, apresentar situações próximas da realidade dos alunos (Ontario Ministry of Education, 2006a). Deste modo, cada aluno encontra, nos conhecimentos aprendidos em sala de aula, significado para os problemas reais do seu quotidiano.



Metodologia

Descrição da metodologia de investigação

O estudo aqui apresentado desenvolve-se partindo de uma investigação mais alargada incluída no Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB. Esta investigação é de natureza qualitativa, de índole interpretativa e design investigação-ação (Bogdan & Biklen, 2013).

Este estudo desenvolveu-se segundo uma abordagem qualitativa, considerando que, foi desenvolvido no contexto natural dos seus participantes, o principal agente de recolha de dados foi o próprio investigador e estes foram recolhidos de um modo totalmente descritivo, através de narrações multimodais (NM). Este método de recolha de dados, as NM, permitiu a narração fidedigna do decorrer de cada intervenção e o acesso às perceções dos grupos, através do que dialogavam entre pares.

De acordo com as características de uma investigação-ação (Cohen, Manion & Morrison, 2007), também no decorrer deste estudo, o respetivo plano de ação sofreu diversas alterações. À medida que era realizada uma sessão, a mesma era alvo de reflexão, por parte dos investigadores, com o objetivo de alterar pequenos aspetos, melhorando a intervenção para produzir melhores resultados junto dos participantes. O modo como eram apresentadas as alíneas, o número de tarefas apresentadas, ou até mesmo a leitura dos enunciados, foram alguns dos aspetos melhorados ao longo de todas as sessões realizadas.

Contexto do estudo

O presente estudo foi realizado numa turma do 1.º ano do 1.º CEB constituída por 25 alunos. Os alunos desta turma demonstravam inúmeras dificuldades na compreensão dos sentidos das operações, bem como, nos princípios de numeração decimal. Aquando da realização de situações problemáticas, os alunos referiam que tinham dificuldade em selecionar a operação aritmética que deveriam recorrer para resolver a tarefa, demonstrando uma falta de compreensão acerca dos sentidos das operações. Também ao nível dos princípios do sistema de numeração, os alunos demonstravam não compreender a necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior, não contabilizando, na maior parte das vezes, esta unidade aquando da apresentação da solução da operação. Estas dificuldades tornaram-se ainda mais claras através da análise das resoluções dos alunos, na fase inicial do estudo.

Através dos resultados das tarefas da Fase Inicial deste estudo, realizadas pelos 25 alunos participantes, foram estabelecidos os níveis de discrepância ótima de cada um e agruparam-se em 11 pares e 1 trio de acordo com as condições da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) (Vygotsky, 1980). As resoluções apresentadas pelos alunos na fase inicial, foram analisados de acordo com os descritores apresentados no Quadro 1 (ver a secção Recolha e Análise de dados). Assim, considerando o desempenho dos alunos na execução das etapas, foi atribuído um nível de 1 a 3.



Depois de estabelecidos os níveis de discrepância ótima de cada aluno, procurou-se formar pares de alunos, atendendo à teoria da ZDP, com diferentes níveis de conhecimento, colocando um aluno com um nível de conhecimento superior, com um aluno com um nível de conhecimento inferior. De acordo com a teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1980), os alunos, ao desenvolverem o seu trabalho em parceria com colegas de níveis de conhecimento diferentes do seu, tendem a desenvolver aprendizagens colaborativas e efetivas.

Assim, todos os grupos foram formados por um aluno situado no nível 1 e outro situado no nível 2 de conhecimento. Deste modo, o grupo constituído pelo aluno A e pelo aluno B, foi o selecionado, uma vez que, era constituído por dois dos alunos que participaram em todas as sessões e era representativo dos restantes grupos envolvidos no estudo.

Tabuleiro Decimal

Como referido anteriormente, devido à falta de recursos do local de estágio da professora estagiária, tornou-se imprescindível a construção de um material manipulável, o Tabuleiro Decimal (Figura 1).

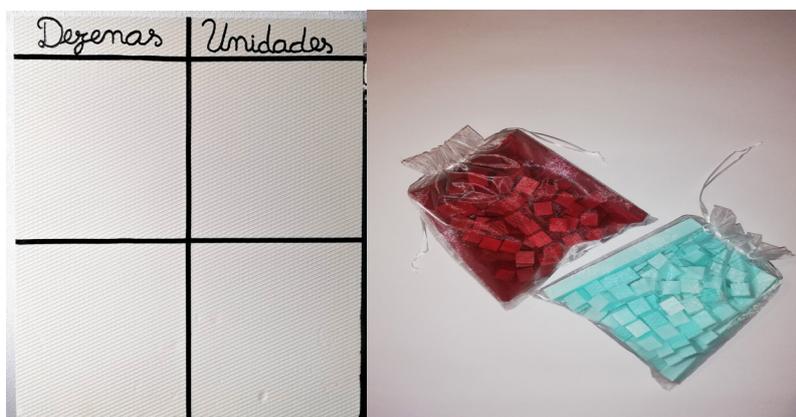


Figura 1: Tabuleiro Decimal e respetivas peças.

Este material foi construído segundo os princípios do Material Multibásico (MAB). Deste modo, o Tabuleiro Decimal encontra-se dividido em duas colunas permitindo a representação de duas ordens, a das dezenas e a das unidades. Cada uma das colunas, das unidades e das dezenas, encontra-se dividida a meio, de modo a poder-se separar as quantidades de cada parcela aquando da representação vertical da operação aritmética adição. A cada Tabuleiro Decimal estão associados dois sacos (Figura 1), um com peças vermelhas e outro com peças azuis, que contêm, respetivamente, cem cubinhos (cada um representando uma unidade), e dez barras (cada uma representando uma dezena).



Aquando das resoluções de situações problemáticas que envolvessem uma adição com o sentido juntar no Tabuleiro Decimal, era esperado que os alunos colocassem as duas quantidades iniciais, o adicionando e o adicionador, em cada uma das parcelas do Tabuleiro Decimal (Figura 2 (a)). De seguida, os alunos deveriam juntar estas duas quantidades (Figura 2 (b)).

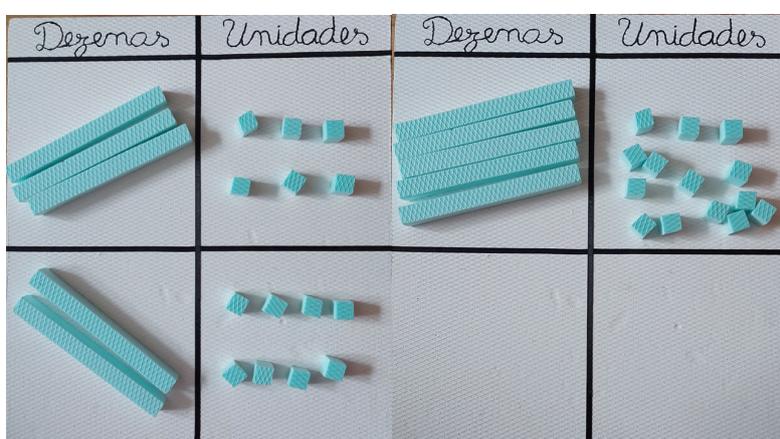


Figura 2: **a)** Exemplo de uma adição ($36+28$) representada no Tabuleiro Decimal;
b) Exemplo da adição das duas quantidades no Tabuleiro Decimal.

Seguidamente, os alunos deveriam verificar se existiam unidades suficientes para compor uma unidade de ordem superior, e efetuar esta representação (Figura 3 (a)).

Por último, os alunos deveriam movimentar a barra (dezena resultante da composição de unidades numa unidade de ordem superior) para a coluna das dezenas, chegando, assim, ao resultado da adição (64) (Figura 3 (b)).

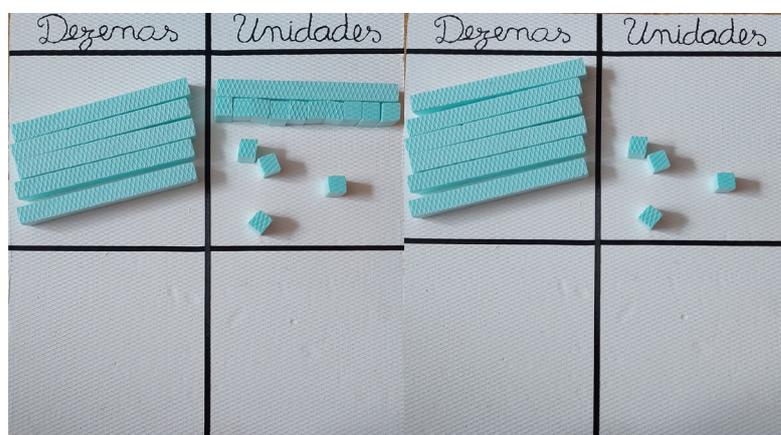


Figura 3: **a)** Representação da composição de unidades numa unidade de ordem superior no Tabuleiro Decimal;
b) Representação do resultado da adição no Tabuleiro Decimal.



Na resolução de situações problemáticas que envolvessem o sentido de acrescentar da adição, os alunos deveriam começar por representar a quantidade inicial (24) (Figura 4 (a)).

De seguida, e na mesma parcela, os alunos deveriam acrescentar a segunda quantidade da operação adição à primeira já representada (Figura 4 (b)).

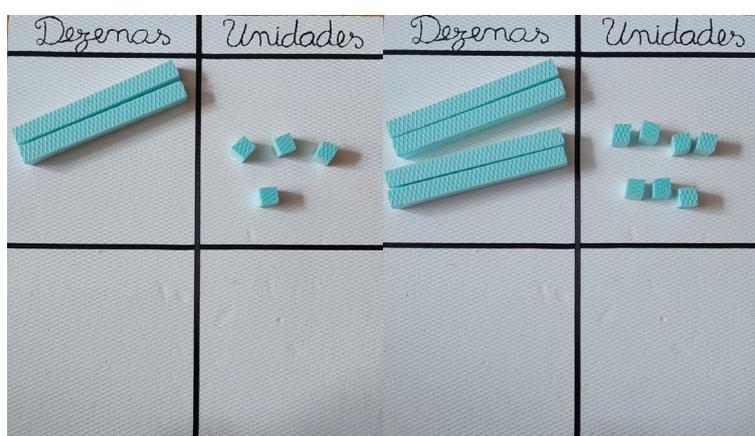


Figura 4: **a)** Representação da quantidade inicial da adição (24) no Tabuleiro Decimal;
b) Representação das duas quantidades da adição (24+23) no Tabuleiro Decimal.

Como, neste exemplo, não é necessário compor unidades numa unidade numa unidade de ordem superior, já está representada a solução da adição (47).

Como é possível verificar nos exemplos apresentados acima, a manipulação do Tabuleiro Decimal, e das respetivas peças, permite aos alunos compreender os conceitos de juntar e acrescentar (os sentidos das operações), bem como, a composição de unidades numa unidade de ordem superior (princípios do sistema de numeração decimal).

Design do estudo

O estudo foi organizado em três momentos diferentes: Fase inicial; Fase de intervenção e Fase final.

Na Fase inicial, cada aluno resolveu individualmente duas situações problemáticas (ver subsecção seguinte), relativas a cada um dos sentidos das operações adição, sentido de acrescentar e sentido de juntar, com o objetivo de mapear as dificuldades dos alunos e determinar o seu nível de discrepância ótima, como descrito anteriormente.

Entre a fase inicial e a primeira sessão da fase de intervenção, houve uma fase de exploração, em que os alunos puderam explorar livremente o Tabuleiro Decimal. Esta foi a sessão onde os alunos, nos pares já definidos, tiveram a oportunidade de contactar pela primeira vez com o Tabuleiro Decimal, bem como com as respetivas peças. Nos momentos iniciais da ses-



são, os alunos puderam manipular livremente as peças e dialogar entre pares acerca do que achavam daquele material. Rapidamente referiram que as barras correspondiam às dezenas e os cubinhos às unidades. De modo a que alunos pudessem explorar um pouco mais o Tabuleiro Decimal e as suas funções, foram sugeridos alguns números que os alunos deveriam representar (4; 10; 35; 56) e, por último, algumas adições que deveriam resolver (3+6; 12+5; 34+7; 46+8). No final da sessão, os alunos puderam representar números e resolver adições à sua escolha.

Na Fase de intervenção, foram realizadas três sessões, a sessão de exploração, a sessão relativa ao sentido de juntar e a sessão relativa ao sentido de acrescentar, que decorreram de um modo semelhante. Em cada uma das sessões, os alunos trabalharam com os pares definidos na fase inicial, resolvendo adições e situações problemáticas referentes a cada um dos sentidos das operações adição (ver subsecção seguinte), através do uso do Tabuleiro Decimal. No início de cada sessão, a professora estagiária/investigadora leu o enunciado da folha de exploração, esclarecendo todas as dúvidas existentes e realçando os objetivos de cada tarefa.

Tendo em conta que, na sessão da fase de intervenção com o sentido de juntar, os alunos demonstraram facilidade em resolver adições no Tabuleiro Decimal, optou-se por alterar ligeiramente a folha de exploração. A folha de exploração da primeira sessão (sentido de juntar) era constituída por três adições e uma situação problemática, no entanto, como se considerou desnecessária a resolução, por parte dos alunos, de mais adições, visto que se demonstraram aptos a realizá-las, optou-se por, na folha de exploração da segunda sessão (sentido de acrescentar), apresentar somente duas situações problemáticas.

No final de cada situação problemática resolvida, um dos doze grupos era selecionado para apresentar a sua resolução à restante turma, seguindo-se uma discussão em grande grupo. Aquando da resolução, por parte dos grupos, de cada tarefa, a professora estagiária deslocava-se pela sala, verificando as suas propostas de resolução. A seleção do grupo que apresentaria a sua proposta à turma, era feita de acordo com as propostas apresentadas pelos grupos à professora estagiária e pela sua capacidade de explicação das mesmas. O Tabuleiro Decimal foi somente utilizado na fase de intervenção.

A fase final decorreu de modo semelhante à fase inicial, com os alunos a resolverem duas situações problemáticas individualmente (ver subsecção seguinte). Os resultados desta fase foram igualmente analisados segundo os métodos utilizados na fase inicial e de acordo com os critérios apresentados no Quadro 1 (ver a secção “Recolha e Análise de dados”).

Tarefas

Durante este estudo, foi apresentado aos alunos um total de cinco tarefas, por intermédio de folhas de exploração. Segundo Ponte (2005), cada tarefa apresentada pode classificar-se como problema, considerando que, o seu grau de desafio matemático é elevado e o seu grau de estrutura é fechado.



Como descrito anteriormente, na fase inicial, os alunos resolveram duas situações problemáticas referentes a cada um dos sentidos da adição (juntar e acrescentar).

1. A Isabel adora revistas de banda desenhada. No natal a mãe ofereceu-lhe 35 e o pai ofereceu-lhe mais 29. Quantas revistas é que a Isabel recebeu ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.
2. O Samuel tinha uma coleção com 32 carrinhos. No seu aniversário o Luís ofereceu-lhe 27 carrinhos. Com quantos carrinhos ficou a coleção do Samuel?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 5: Enunciados das tarefas da fase inicial.

Na fase de intervenção com o sentido de juntar da adição, os alunos resolveram uma situação problemática envolvendo este mesmo sentido.

Na sala de aula da Cátia existem 39 livros de matemática e 24 livros de português. Quantos livros existem nesta sala?

Figura 6: Enunciado da tarefa com o sentido de juntar

Na fase de intervenção com o sentido de acrescentar da adição, foram apresentadas aos alunos duas tarefas com este mesmo sentido, devido às alterações efetuadas e explicadas anteriormente.

- No início do almoço estavam 47 alunos a almoçar. Até ao fim do almoço chegou um grupo de 32 alunos. Quantos alunos estavam a almoçar no final?
- Na festa de aniversário da Francisca estavam 34 crianças. Passado um bocado chegaram 28 crianças. Quantas crianças foram ao todo à festa de aniversário da Francisca?

Figura 7: Enunciado das tarefas com o sentido de acrescentar.

Na fase final, à semelhança da fase inicial, os alunos resolveram duas situações problemáticas referentes a cada um dos sentidos da adição (juntar e acrescentar).

1. Na cantina da EB1 Norton de Matos existem 37 bananas e 29 laranjas. Quantas peças de fruta existem ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.
2. O Tomás tinha 40 lápis no seu estojo, mas pouco antes de terminar a aula, guardou mais 34 que tinha emprestado ao Gonçalo. Quantos lápis tem, agora, o Tomás no seu estojo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 8: Enunciado das tarefas da fase final.



Recolha e análise de dados

A recolha de dados deste estudo foi elaborada através da observação participante da professora estagiária, de narrações multimodais (NM), de registos áudio e fotográficos, da redação de notas de campo e dos documentos produzidos pelos alunos. Através de todos os dados recolhidos nas duas sessões de intervenção, foi possível construir uma NM de cada uma destas, perfazendo o total de duas NM. Os episódios narrados em cada NM descrevem os momentos mais importantes de cada sessão. A elaboração de cada narração multimodal implica a consulta de um protocolo onde constam indicações precisas de todos os passos a realizar. Estas indicações remetem-se à recolha de dados, à elaboração e à validação das narrações multimodais (Lopes, Viegas, & Pinto, 2018).

Durante este estudo, os alunos utilizaram representações ativas, aquando da manipulação do Tabuleiro Decimal (Bruner, 1999, referido em Santos, 2015), representações visuais, usando figuras e esquemas, representações simbólicas, com símbolos numéricos, e ainda, representações verbais, quando utilizaram a sua linguagem natural para expressar uma ideia (Montenegro, Costa, & Lopes, 2017).

Todos os dados recolhidos foram analisados de acordo com os critérios apresentados no Quadro 1.

Nível 1	Nível 2	Nível 3
A explicação demonstra limitados conhecimentos acerca dos conceitos matemáticos envolvidos ou não responde.	A explicação demonstra alguns conhecimentos acerca dos conceitos matemáticos envolvidos e contém pequenas incorreções.	A explicação demonstra um pleno conhecimento acerca dos conceitos matemáticos envolvidos.

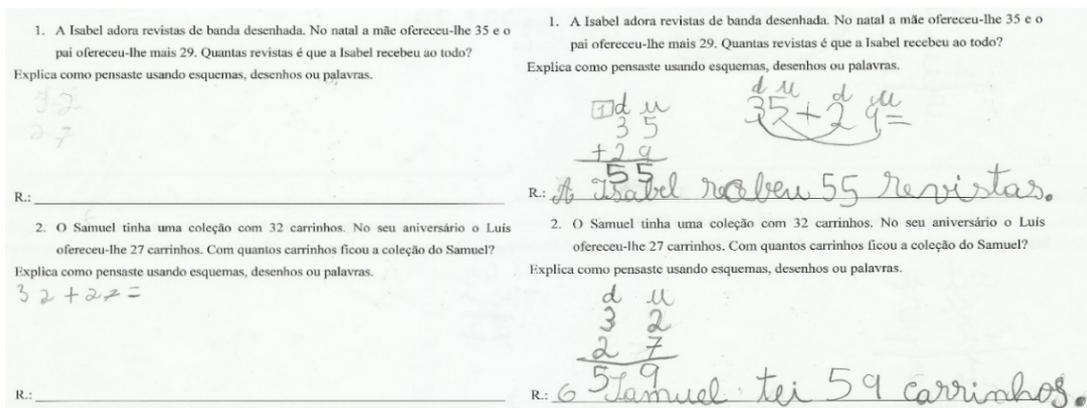
Quadro 1: Critério com três níveis de conhecimento (Pratas et al., 2016, p. 36)

Apresentação e discussão de resultados

Os resultados deste estudo, bem como a sua discussão, serão apresentados segundo as três fases em que o estudo está estruturado. Assim, primeiramente serão apresentados os resultados da Fase Inicial, depois os da Fase de intervenção com o sentido de juntar, posteriormente os da Fase de intervenção com o sentido de acrescentar e, por último, os resultados da Fase Final.

Fase inicial

Como se pode observar na Figura 9, o aluno A, na tarefa relativa ao sentido de juntar da adição, deixou a folha de exploração em branco, encontrando-se, assim, no nível 1 de acordo com os critérios estabelecidos.



1. A Isabel adora revistas de banda desenhada. No natal a mãe ofereceu-lhe 35 e o pai ofereceu-lhe mais 29. Quantas revistas é que a Isabel recebeu ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.:
$$\begin{array}{r} 35 \\ + 29 \\ \hline 64 \end{array}$$

2. O Samuel tinha uma coleção com 32 carrinhos. No seu aniversário o Luis ofereceu-lhe 27 carrinhos. Com quantos carrinhos ficou a coleção do Samuel?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.:
$$32 + 27 =$$

1. A Isabel adora revistas de banda desenhada. No natal a mãe ofereceu-lhe 35 e o pai ofereceu-lhe mais 29. Quantas revistas é que a Isabel recebeu ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.:
$$\begin{array}{r} d \quad u \\ 35 \\ + 29 \\ \hline 55 \end{array}$$
 Isabel recebeu 55 revistas.

2. O Samuel tinha uma coleção com 32 carrinhos. No seu aniversário o Luis ofereceu-lhe 27 carrinhos. Com quantos carrinhos ficou a coleção do Samuel?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

R.:
$$\begin{array}{r} d \quad u \\ 32 \\ - 27 \\ \hline 59 \end{array}$$
 Samuel tem 59 carrinhos.

Figura 9: Resoluções dos alunos A e B na fase inicial.

Na tarefa relativa ao sentido de acrescentar da adição, o aluno apresenta a adição correta, no entanto, não apresenta qualquer resolução, encontrando-se, também, no nível 1 de acordo com os critérios estabelecidos.

O aluno B, na tarefa relativa ao sentido de juntar, utiliza representações simbólicas, apresentando a adição correta, no entanto não adiciona a dezena, resultante da adição das unidades, às restantes dezenas. Apresenta uma resposta adequada à tarefa, de acordo com o valor que encontrou (Figura 9), encontrando-se, assim, no nível 2 de acordo com os critérios estabelecidos.

Na segunda tarefa, o aluno B efetua os cálculos corretamente, no entanto, apresenta um sinal de subtração no lugar do sinal de adição.

O resultado obtido e a resposta estão corretas de acordo com o enunciado, situando-se no nível 2, de acordo com os critérios estabelecidos.

Fase de intervenção

A fase de intervenção decorreu ao longo de duas sessões, cada uma correspondente a um sentido da adição. Assim, na subsecção “Sentido de juntar”, serão apresentadas e discutidas as resoluções dos dois alunos referentes à situação problemática com sentido de juntar. Na subsecção “Sentido de acrescentar” serão apresentadas e discutidas as resoluções dos dois alunos nas duas situações problemáticas propostas, com o sentido de acrescentar.

Sentido de juntar

Nesta fase de intervenção com o sentido de juntar, os dois alunos, depois de utilizarem representações ativas na manipulação do Tabuleiro Decimal (Figura 10), representaram corretamente as duas quantidades da adição nas respetivas parcelas do Tabuleiro Decimal.



Figura 10: Representação das duas quantidades no Tabuleiro Decimal.

Depois de representarem as três dezenas e nove unidades na primeira parcela e as duas dezenas e quatro unidades na segunda parcela, juntaram a segunda quantidade com a primeira, desenhando setas para indicar este passo, como se pode verificar na resolução do aluno A. Aqui, os alunos utilizaram, tanto representações visuais, como simbólicas.

De seguida, os alunos transformaram dez cubinhos, dos treze resultantes da adição, numa barra, como se pode ver na Figura 11, efetuando desta forma a representação da composição em uma unidade de ordem superior.

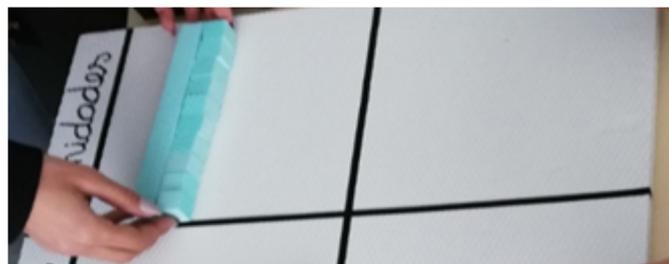


Figura 11: Representação da composição de dez cubinhos numa barra no Tabuleiro Decimal.
Por último, os dois alunos deram resposta à tarefa, de forma correta.

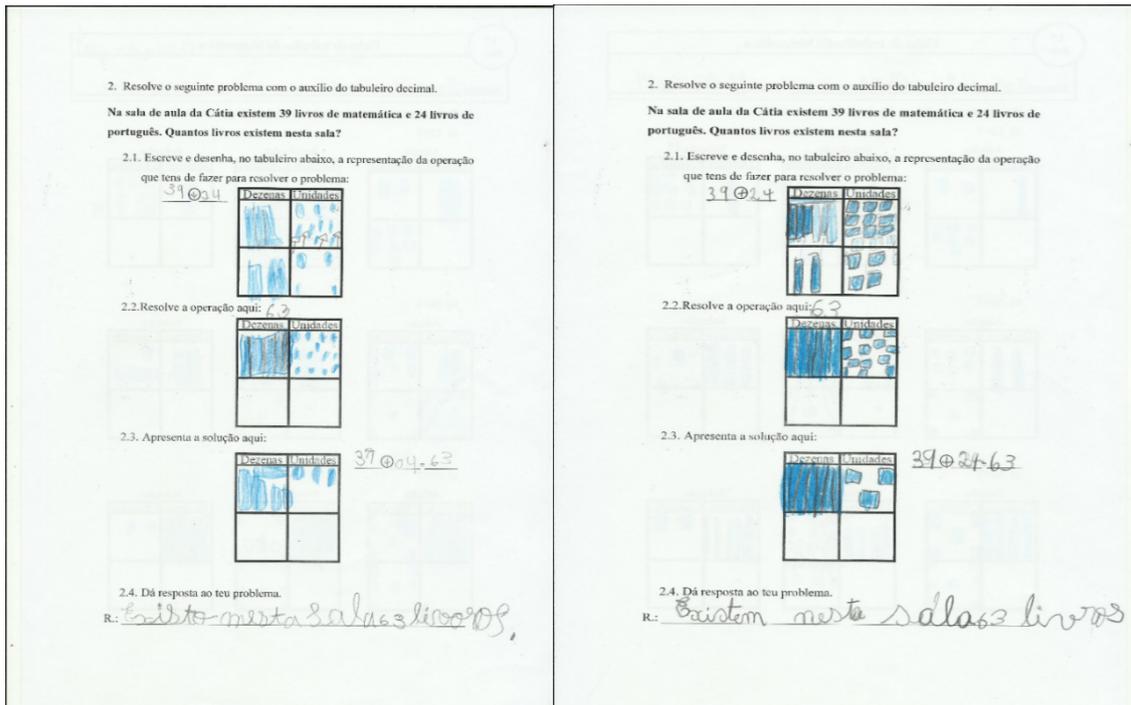


Figura 12: Resoluções dos alunos A e B da tarefa da fase de juntar.

Sentido de acrescentar

Na folha de exploração desta sessão com o sentido de acrescentar, ao contrário da anterior, existia uma alínea (com a representação do Tabuleiro Decimal) onde era pedido que os alunos representassem a quantidade inicial da tarefa (47) (Figura 13 (a)). De seguida, a professora estagiária/investigadora realçou o facto da segunda quantidade ser adicionada depois à quantidade inicial, devendo assim ser adicionada a esta quantidade, já representada no Tabuleiro Decimal (Figura 13 (b)).

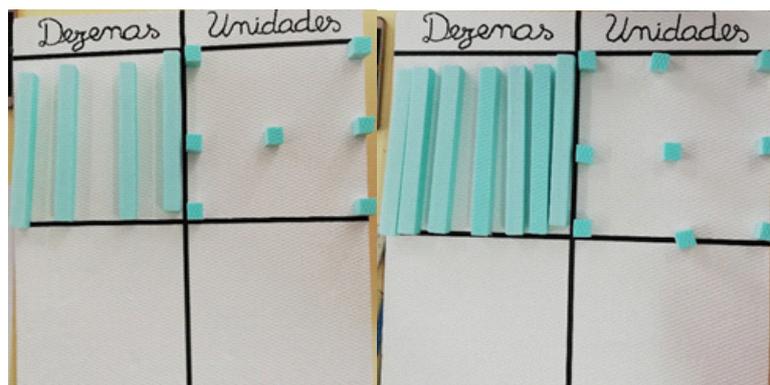


Figura 13: **a)** Representação da quantidade inicial da adição no Tabuleiro Decimal;
b) Representação da quantidade inicial com a quantidade acrescentada no Tabuleiro Decimal.

Assim, o aluno A e o aluno B apresentaram, através de representações visuais e simbólicas, corretamente a quantidade “47”, desenhando quatro barras, na ordem das dezenas e sete cubinhos, na ordem das unidades.

Como é possível verificar na Figura 15, os dois alunos representaram a quantidade “32” na mesma parcela da quantidade inicial, realçando a sua compreensão acerca do sentido de acrescentar da adição.

Como não foi necessário agrupar unidades numa dezena, ou seja, efetuar a composição em uma unidade de ordem superior, a alínea 1.3., destinada a esta representação, foi deixada em branco pelos alunos.

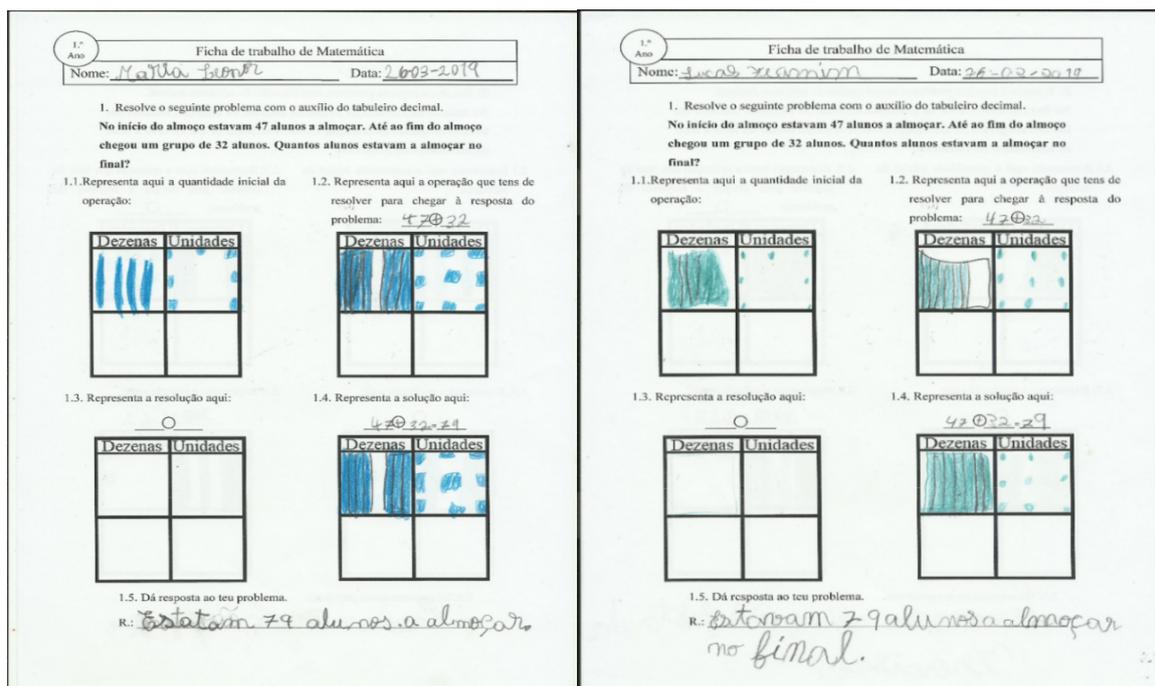


Figura 14: Resoluções dos alunos A e B da primeira tarefa da fase de acrescentar.

Depois de representarem a solução da adição na alínea 1.4., os dois alunos responderam corretamente à tarefa.

A resolução da segunda tarefa decorreu de acordo com a da primeira. Começou-se pela leitura da mesma, seguiu-se a identificação da quantidade inicial (Figura 15 (a)) e da quantidade a acrescentar (Figura 15 (b)), e por último, a resolução da adição e conseqüente escrita da resposta final.

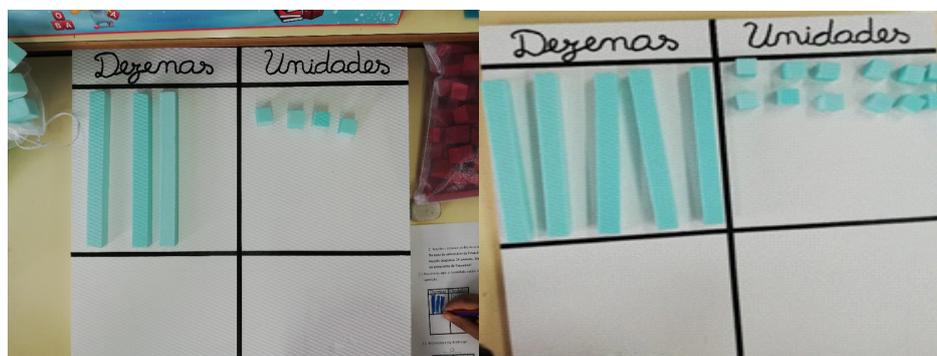


Figura 15: a) Representação da quantidade inicial da adição no Tabuleiro Decimal; b) Representação da quantidade inicial com a quantidade acrescentada no Tabuleiro Decimal.



Enquanto os grupos tentavam resolver a adição necessária à resolução da tarefa, um aluno da turma questionou “Podemos ter doze unidades?” (na coluna das unidades), ao que todos os alunos afirmaram que não, e que deveriam agrupar dez desses doze cubinhos numa barra, efetuando a composição em uma unidade de ordem superior. O mesmo aluno afirma, de seguida, que “Não podemos ter uma dezena nas unidades!” ao que, prontamente, o aluno A responde “É por isso que eu vou pôr uma seta para passar para ali!”, referindo-se à passagem da barra para a coluna das dezenas.

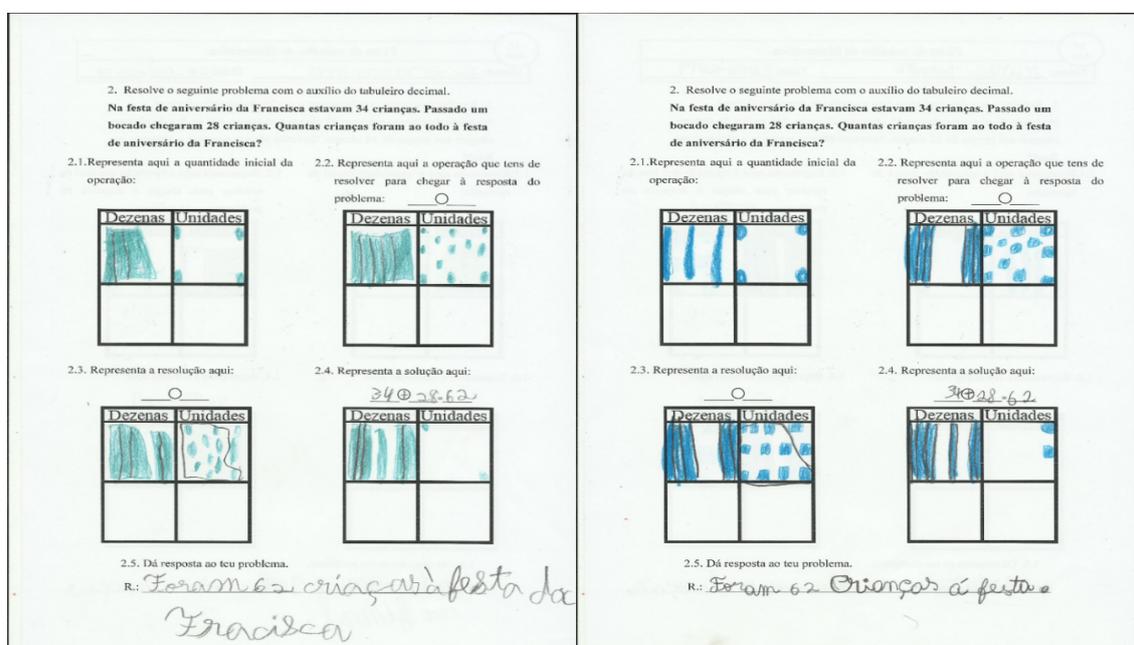


Figura 16: Resoluções dos alunos A e B da segunda tarefa da fase de acrescentar.

Como é possível verificar na Figura 16, o aluno A, apesar de o ter afirmado, não representou essa seta. Ainda assim, os dois alunos, “rodearam” os dez cubinhos que foram agrupados numa barra e, aquando da apresentação da solução da adição, apresentam o número correto de barras e cubinhos, perfazendo a quantidade “62”. Os dois alunos elaboraram uma resposta correta no contexto da tarefa.

Fase final

A fase final, tal como a fase inicial, consistiu na resolução individual de tarefas envolvendo os sentidos das operações, trabalhados na fase de intervenção.

Os dois alunos referidos neste estudo, demonstraram evolução, tanto nos sentidos das operações como nos princípios da numeração decimal, de acordo com os critérios previamente definidos.



1. Na cantina da EB1 Norton de Matos existem 37 bananas e 29 laranjas. Quantas peças de fruta existem ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

$$\begin{array}{r} 1\ 37 \\ +\ 29 \\ \hline 66 \end{array}$$

R.: existem 66 peças de fruta.

2. O Tomás tinha 40 lápis no seu estojo mas, pouco antes de terminar a aula, guardou mais 34 que tinha emprestado ao Gonçalo. Quantos lápis tem, agora, o Tomás no seu estojo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

$$\begin{array}{r} 40 \\ +\ 34 \\ \hline 74 \end{array}$$

R.: O Tomás tem 74 lápis no estojo.

1. Na cantina da EB1 Norton de Matos existem 37 bananas e 29 laranjas. Quantas peças de fruta existem ao todo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

$$\begin{array}{r} 29 + 37 = 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ +\ 29 \\ \hline 66 \end{array}$$

R.: Existem 66 peças de fruta ao todo.

2. O Tomás tinha 40 lápis no seu estojo mas, pouco antes de terminar a aula, guardou mais 34 que tinha emprestado ao Gonçalo. Quantos lápis tem, agora, o Tomás no seu estojo?
Explica como pensaste usando esquemas, desenhos ou palavras.

$$\begin{array}{r} 40 + 34 = 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ +\ 34 \\ \hline 74 \end{array}$$

R.: O Tomás tem agora 74 lápis no estojo.

3. A turma do 1ª leu 47 livros na 1ª sessão de leitura. Na 2ª sessão leu 36 livros.

Figura 17: Resoluções do grupo na fase final (aluno A e B).

Os alunos optaram por apresentar representações simbólicas, apresentando a adição necessária à resolução da tarefa, alinhando verticalmente as ordens das unidades e das dezenas das duas parcelas (Figura 13). Enquanto que o aluno B coloca a indicação da ordem das dezenas e das unidades, por cima de cada uma delas, o aluno A apresenta somente o cálculo. Os dois alunos apresentam uma solução correta para a adição. O aluno A optou por colocar um “1” próximo da coluna das dezenas, enquanto que o aluno B colocou “16” ao lado da coluna das unidades e “+1” junto da coluna das dezenas.

As representações dos dois alunos, relativas à resolução da segunda tarefa, foram semelhantes à da primeira. Tendo em conta que, nenhum dos alunos apresentou qualquer erro de cálculo ou na interpretação de resultados e que resolveram as duas situações problemáticas corretamente, mostrando que compreenderam os sentidos da adição inerentes, considera-se que o aluno A progrediu do nível 1 para o nível 3 e, o aluno B, do nível 2 para o nível 3, de acordo com os critérios previamente estabelecidos.

Na fase final deste estudo, os dois alunos mostraram-se aptos para realizar adições, compreendendo os seus sentidos e aplicando corretamente os princípios do sistema de numeração decimal.

Consideramos que os dados apresentados neste estudo, corroboram as conclusões do estudo realizado por Contente (2012). Ao nível dos princípios do sistema de numeração decimal, os alunos, com a manipulação do Tabuleiro decimal, reconheceram a necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior (compor dez cubinhos numa barra) e de movimentar esta unidade resultante para a ordem correspondente (a ordem das dezenas). Através da análise dos resultados da Fase Final é perceptível que os alunos criaram os seus próprios procedimentos, aplicando corretamente os conhecimentos aprendidos e resolvendo as situações problemáticas propostas corretamente, o que vai ao encontro dos resultados do estudo de Ponte e Serrazina (2000). Depois da manipulação do Tabuleiro Decimal, os alunos demonstraram que compreendiam



as resoluções inerentes a cada operação aritmética, compreendendo os passos intermédios para a sua resolução, sem necessidade de recorrerem a mnemónicas, corroborando os resultados do estudo de Brou et al. (2014).

Conclusões

Começamos por elaborar uma resposta à questão de investigação: De que modo o uso do Tabuleiro Decimal influencia a compreensão dos alunos sobre os sentidos da operação aritmética adição e os princípios fundamentais do sistema de numeração decimal?

Tendo em conta os resultados apresentados e discutidos acima, considera-se que o Tabuleiro Decimal influenciou a compreensão dos alunos acerca dos sentidos da operação aritmética adição e dos princípios fundamentais do sistema de numeração decimal. Esta influência é evidenciada pela demonstração de compreensão, por parte dos alunos, da necessidade de compor unidades numa unidade de ordem superior (agrupar dez cubinhos numa barra) e adicioná-la à ordem correta (das dezenas), aquando da sua manipulação do Tabuleiro Decimal. As diversas situações problemáticas resolvidas com recurso ao Tabuleiro Decimal, também permitiram aos alunos, uma melhor perceção da operação a utilizar e qual o seu sentido, como é possível verificar através das diferentes representações que elaboraram consoante os sentidos envolvidos.

A utilização de materiais concretos em sala de aula, quando utilizados adequadamente, permitem concretizar os conceitos mais abstratos da matemática, envolvendo os alunos na sua própria aprendizagem, permitindo que eles sintam e manipulem livremente os materiais, sendo orientados com o objetivo de ficarem aptos para compreender, posteriormente, os conceitos abstratos (Santos & Sobrinho, 2016). O uso de materiais manipulativos permite o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, a criação de um contexto inerente aos conceitos matemáticos e a possibilidade dos alunos testarem, reverem e confirmarem as suas ideias (Ontario Ministry of Education, 2006b)

Tendo em conta que os alunos, principalmente em idades menores, possuem uma capacidade de abstração mais limitada, é essencial tornar estes conceitos concretos. Na disciplina de Matemática esta concretização é facilitada pela utilização de materiais didáticos (Aires & Almeida, 2019; Kllogjeri & Kllogjeri, 2015; Ontario Ministry of Education, 2006b). Para além destes benefícios da utilização dos materiais concretos, este tipo de material suscita nos alunos uma enorme curiosidade e interesse, fazendo com que cultivem o seu gosto pela escola, e particularmente, pela matemática (Catarino & Soares, 2018). Assim, é exigido que o professor tenha conhecimento acerca dos materiais existentes, das suas potencialidades e do modo mais correto para utilizá-los na promoção da aprendizagem de conceitos matemáticos. Só assim é possível aplicar a utilização de um manipulativo concreto no contexto certo e da melhor forma (Contente, 2012). Para que o ensino e a aprendizagem com auxílio de artefactos sejam otimizados, é necessário que o professor possua um elevado domínio nas diferentes dimensões do conhecimento didático da matemática (Ponte, 2012; Viseu & Menezes, 2014), optando pelas estratégias, práticas letivas e materiais manipuláveis, mais adequados a cada conteúdo matemático.



Agradecimentos

Este trabalho é financiado pela FCT/MCTES através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado por fundos comunitários no âmbito do projeto UIDB/EEA/50008/2020.

Referências

- Aires, A., & Almeida, F. (2019). Materiais didáticos na educação pré-escolar: tarefas para trabalhar a matemática. In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, E. M. Silva, G. Santos, R. Patrício, & L. Castanheira (Eds.), *Atas do IV Encontro Internacional de Formação na Docência* (pp. 336-347). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.
- Araújo, D. (2014). *As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas* (Relatório Final do Mestrado em EPE e Ensino do 1.º CEB, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal). Acedido em: <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/7980>
- Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação Qualitativa em Educação* (12.ª Ed). Porto: Porto Editora.
- Botas, D., & Moreira, D. (2013). Recurso de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 26(1), 253-286.
- Brou, H., Rato, V., & Martins, F. (2014). A modelação matemática como prática de sala de aula no ensino da subtração. In H. Pinto, M. Dias, & R. Munõz (Orgs.), *Atas da III Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 73-79). Leiria: ESECS - Instituto Politécnico de Leiria.
- Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados: Textos de Apoio para Educadores de Infância*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Catarino, P., & Soares, J. (2018). Utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de conceitos matemáticos nos primeiros anos. In R. P. Lopes, M. V. Pires, L. Castanheira, E. M. Silva, G. Santos, C. Mesquita, & P. F. Vaz (Eds.), *Atas do III Encontro Internacional de Formação na Docência* (pp. 540-550). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.
- Clements, D. H. & Samara, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math*. Nova Iorque: Routledge
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6.ª ed). Nova Iorque: Routledge.
- Contente, I. (2012). *A utilização de materiais didáticos no ensino da matemática do 1º ciclo do Ensino Básico* (Relatório Final do Mestrado em EPE e Ensino do 1.º CEB, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Beja). Acedido em: <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/3910>
- Correia, J. (2018). Labmath: “Hands-on activities” Mãos à obra!. In A. Rodrigues, A. Barbosa, A. Santiago, A. Domingos, C. Carvalho, C. Ventura, C. Costa, H. Rocha, J. M. Matos, L. Serrazina, M. Almeida, R. Teixeira, R. Carvalho, R. Machado, & S. Carreira (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 203-204). Coimbra: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra.
- Dias, S., Santiago, A., & Martins, F. (2017). Ensino do algoritmo “usual” da subtração: uma proposta didática sem mnemónicas. In M. V. Pires, C. Mesquita, R. P. Lopes, G. Santos, M. Cardoso, J. Sousa, E. Silva, & C. Teixeira (Eds.), *Atas do II Encontro Internacional de Formação na Docência* (pp. 294-302). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.
- Direção-Geral de Educação. (2018). *Aprendizagens essenciais: articulação com o perfil dos alunos*. Lisboa: MEC.



- Jeannotte, D., & Corriveau, C. (2019). Interactions between pupils' actions and manipulative characteristics when solving an arithmetical task. In U. T. Jankvist, M. Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 443-450). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Kim, R., & Albert, L. (2014). The History of Base-Ten-Blocks: Why and Who Made Base-Ten-Blocks?. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5 (9), 356-365. Acedido em: https://www.researchgate.net/publication/287024619_The_history_of_base-ten-blocks_Why_and_who_made_base-ten-blocks
- Klllogjeri, P. & Klllogjeri, L. (2015). Dynamic Models for Addition and Subtraction. *Open Access Library Journal*, 2(9), 424-427.
- Lopes, T., & Leivas, J. (2017). Contar nos dedos: a conceitualização de número e a operação da adição. *Revista Pedagogia em foco*, 12(7), 157-174. Acedido em: https://www.researchgate.net/publication/318279699_CONTAR_NOS_DEDOS_A_CONCEITUALIZACAO_DE_NUMERO_E_A_OPERACAO_DA_ADICAO
- Lopes, J., Viegas, C., & Pinto, A. (2018). *Melhorar práticas de ensino de ciências e tecnologia – Registrar e investigar com narrações multimodais*. Lisboa: Edições Sílabo.
- Loureiro, J. (2014). *Estratégias para abordar o sentido de número e das operações recorrendo a materiais manipuláveis no contexto do 1.º ano do Ensino Básico* (Relatório Final do Mestrado em EPE e Ensino do 1.º CEB, Escola Superior de Educação de Santa Maria do Instituto Superior Politécnico Gaya). Acedido em: <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/20051>
- Marques, A. (2018). *A Modelação Matemática como Ambiente de Aprendizagem e o uso do Material Multibásico na Divisão Inteira: uma experiência de ensino no 3.º ano do 1.º CEB* (Relatório Final do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra). Acedido em: <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/25226>
- Marques, A., Rato, V., & Martins, F. (2018). A modelação matemática e a divisão no 3.º ano do 1.º CEB. In R. P. Lopes, M. V. Pires, L. Castanheira, E. M. Silva, G. Santos, C. Mesquita, & P. F. Vaz (Eds.), *Atas do III Encontro Internacional de Formação na Docência* (pp. 553-563). Bragança: Instituto Politécnico de Bragança.
- Martins, J. (2011). *O sentido das operações nos alunos do ensino básico* (Relatório Final do Mestrado em Didática e Inovação no Ensino das Ciências, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve). Acedido em: <https://sapientia.ualg.pt/handle/10400.1/3087>
- Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática: Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017). Transformações de representações visuais de múltiplos e divisores de um número. *Comunicações Piracicaba*, 24(1), 55-68.
- Oliveira, I. & Courela, C. (2013). Mudança e inovação em educação: o compromisso dos professores. *Revista Interações*, 9(27), 97-117.
- Ontario Ministry of Education. (2006a). *Number Sense and Numeration, Grades 4 to 6 - Addition and Subtraction (Vol. 2)*. Toronto: Queens Printer for Ontario.
- Ontario Ministry of Education. (2006b). *A Guide to Effective Instruction in Mathematics, Kindergarten to Grade 6- Classroom Resources and Management (Vol. 3)*. Toronto: Queens Printer for Ontario.
- Pinto, M. E., & Canavarró, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Atas da I Jornada de Investigação em Educação* (pp. 681-703). Évora: Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora.



- Pires, A., Colaço, H., Horta, M. H., & Ribeiro, C. M. (2013). Desenvolver o Sentido de Número no Pré-Escolar. *EXEDRA*, 7(1), 120-135.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Pratas, R., Rato, V., & Martins, F. (2016). Modelação Matemática como prática de sala de aula: o uso de manipulativos virtuais no desenvolvimento dos sentidos da adição. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 35-48). Évora: Universidade de Évora.
- Rocha, H., & Teixeira, T. (2018). O professor e a aula de matemática. In A. Rodrigues, A. Barbosa, A. Santiago, A. Domingos, C. Carvalho, C. Ventura, C. Costa, H. Rocha, J. M. Matos, L. Serrazina, M. Almeida, R. Teixeira, R. Carvalho, R. Machado, & S. Carreira (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 357-362). Coimbra: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra.
- Saengpun, J. & Inprasitha, M. (2012). Development of a Child's Semiotic Activity with the Help of Psychological Tools: A Vygotsky's Cultural-Historical Perspective. *Scientific Research*, 3(5), 424-427.
- Santos, L. (2015). Representações Matemáticas. In L. Santos, M. V. Pires, R. T. Ferreira, A. Domingos, C. Martins, H. Martinho, I. Vale, N. Amado, S. Carreira, & T. Pimentel (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 3-5). Bragança: SPIEM.
- Santos, N., & Sobrinho, J. (2016). Materiais Manipuláveis no âmbito do Ensino de Matemática: Contribuições para a Prática Pedagógica. *Revista FSA*, 13(3), 145-161. Acedido em: <http://www4.fsanet.com.br/revista/index.php/fsa/article/view/1064>
- Vieira, A. (2016) *A aprendizagem da adição e subtração através da resolução de problemas* (Relatório Final do Mestrado em EPE e Ensino do 1.º CEB, Escola Superior de Educação de Instituto Politécnico de Setúbal). Acedido em: <https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/17040>
- Viseu, F. & Menezes, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 347-375. Acedido em: <https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/2435>
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge MA: Harvard University Press.