desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Hibridização dos números triangulares: uma análise preliminar e *a priori* e a visualização por meio do *software GeoGebra*

Hybridization of triangular numbers: a preliminary and *a priori* analysis on visualization using the software GeoGebra

Francisco Evamar Barros
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
fco.evamar@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8568-7854

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
Bolsista de Produtividade do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq – PQ2
fregis@ifce.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
milenacarolina24@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4446-155X

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, Brasil
re.passosm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1966-7097

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD, Portugal
pcatarino23@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6917-5093

Resumo:
O presente escrito discute as duas primeiras fases da Engenharia Didática, amparada à teoria de ensino, Teoria das Situações Didáticas, com o viés de *desenvolver um estudo acerca do processo de hibridização dos números triangulares, através de situações didáticas de ensino com base nas duas primeiras fases da Engenharia Didática*. Considerado ausente em muitos conteúdos explorados na área de ensino e em História da Matemática, o objeto de estudo, referente aos números híbridos triangulares, é apresentado nesta pesquisa, de forma a discutir algumas propriedades matemáticas, além de evidenciar alguns elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática. Indubitavelmente, são exploradas duas situações-problema, relacionadas à forma de visualização desses números por meio de softwares e, sobre a sua função geradora, amparadas às fases da teoria de ensino, destacando ainda possíveis com-

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

portamentos dos estudantes em cursos de formação inicial de professores. É válido ressaltar que são analisados determinados elementos, diante de uma possível análise *a posteriori* da Engenharia Didática.

Palavras-chave: Engenharia Didática; Ensino; Números híbridos triangulares; software; Teoria das Situações Didáticas.

Abstract:
This paper discusses the first two phases of Didactic Engineering, supported by the teaching theory, Theory of Didactic Situations, with the aim of developing a study about the hybridization process of triangular numbers, through teaching didactic situations based on the first two Didactic Engineering phases. Considered absent in many contents explored in the area of teaching and in the History of Mathematics, the object of study, referring to triangular hybrid numbers, is presented in this research, in order to discuss some mathematical properties, in addition to highlighting some epistemological, cognitive elements and didactic. Undoubtedly, two problem situations are explored, related to the way of visualizing these numbers through software and, regarding their generating function, supported by the phases of teaching theory, highlighting possible behaviors of students in initial teacher training courses. It is worth noting that certain elements are analyzed, in view of a possible posterior analysis of Didactic Engineering.

Keywords: Didactic Engineering; Teaching; Triangular hybrid numbers; software; Theory of Didactic Situations.

Resumen:
Este artículo discute las dos primeras fases de la Ingeniería Didáctica, apoyada por la teoría de la enseñanza, Teoría de situaciones didácticas, con el objetivo de desarrollar un estudio sobre el proceso de hibridación de números triangulares, a través de la enseñanza de situaciones didácticas basadas en las dos primeras. Fases de ingeniería didáctica. Considerado ausente en muchos contenidos explorados en el área de la enseñanza y en la Historia de las Matemáticas, el objeto de estudio, referido a los números híbridos triangulares, se presenta en esta investigación, para discutir algunas propiedades matemáticas, además de resaltar algunos elementos cognitivos y epistemológicos. y didáctico. Sin lugar a dudas, se exploran dos situaciones problemáticas, relacionadas con la forma de visualizar estos números a través del software y, con respecto a su función generadora, respaldadas por las fases de la enseñanza de la teoría, destacando los posibles comportamientos de los estudiantes en los cursos iniciales de capacitación docente. Vale la pena señalar que se analizan ciertos elementos, en vista de un posible análisis posterior de la Ingeniería Didáctica.

Palabras clave: Ingeniería didáctica; Enseñanza; Números híbridos triangulares; software; Teoría de situaciones didácticas.

Introdução

Indubitavelmente, são encontrados em *locus* acadêmico, uma certa gama de trabalhos destacando a dificuldade dos estudantes durante o processo de transição da escola para a uni-

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

versidade (Alves & Catarino, 2018; Alves, 2016). Tão logo, investigações referentes à Didática da Matemática, estão chegando ao Brasil com estudos relacionados ao ensino e pesquisa em Matemática, pondo em experimentação a utilização de diferentes metodologias (Alves, 2018).

Assim, temos o interesse de abordar dois conteúdos matemáticos, pouco estudados na literatura na área de ensino, os números híbridos e os números triangulares, promovendo um contato dos estudantes com algumas propriedades matemáticas, estudadas na História da Matemática em cursos de formação inicial de professores.

Com base nisso, temos então a problemática dessa pesquisa, sendo justificada pela pergunta norteadora: *como desenvolver um estudo sobre o processo de hibridização dos números triangulares, realizando situações didáticas de ensino que ocasione a investigação de definições e propriedades matemáticas, explorando os números híbridos triangulares numa perspectiva epistemológica?"*. Assim, traçamos o nosso objetivo geral, a saber: *desenvolver um estudo acerca do processo de hibridização dos números triangulares, através de situações didáticas de ensino com base nas duas primeiras fases da Engenharia Didática (ED).*

Ainda assim, visando realizar uma preparação, modelização e concepção de sequências didáticas de ensino, diante de uma perspectiva sistemática, temos então a aplicação da Engenharia Didática, enfatizando as suas duas primeiras etapas. Assim, na primeira etapa é realizado um levantamento dos referenciais teóricos referente ao objeto de estudo matemático, analisando a construção do conteúdo de forma cognitiva, didática e epostemológica. Na segunda etapa são elaborados situações didáticas de ensino, ocorendo ainda uma concepção em torno dos possíveis comportamentos dos estudantes. Durante a criação dessas situações de ensino, são então elaboradas situações-problema, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, descrevendo os elementos relevantes de uma possível situação didático-metodológica.

Para o presente artigo, os números estudados serão os números figurados, que tiveram sua origem com os pitagóricos com a tentativa de unir geometria e aritmética buscando uma relação intrínseca entre a natureza, segundo Eves (1969) os membros da sociedade pitagórica enxergavam tais números como entes matemáticos de propriedades místicas, mas a essência desses números sugere que são sequências numéricas formados a partir de figuras geométricas organizadas por pontos, de modo que, a medida que a sequência aumenta, os pontos podem ser organizados novamente formando uma nova figura que tem os mesmo componetes da figura anterior porém com dimensões maiores.

Os números figurados, constituem uma infinidade de sequências numéricas, visto que podemos ter uma para cada figura geométrica conhecida, bastando, para isto, ter o número de componentes desta figura como vértices, arestas faces e células, e em que dimensão esta será escrita. Assim, podemos ter números figurados relacionados a figuras geométricas em uma dimensão arbitrária. Vale ressaltar, que as figuras utilizadas são polítopos, e em sua maioria regulares, salvo algumas exceções. Neste trabalho, destacaremos os números triangulares ou seja, a sequência em que os números representam pontos que, quando organizados de forma equidistante, formam triângulos.

Por outro lado, tem-se o estudo sobre a generalização de três conjuntos numéricos: complexos, duais e hiperbólicos, transformando-os em apenas um número, denominado por números

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

híbrido, que nos possibilita em associá-lo com os números triangulares. Com isso, tem-se o objeto matemático utilizado nesta pesquisa, os números híbridos triangulares.

A utilização de recursos computacionais como forma de facilitar o processo de ensino e aprendizagem, estão ocupando cada vez mais espaço na sociedade atual, permitindo alterações no sistema de ensino (Orzechowski & Lopes, 2016). Com isso, serão utilizados, neste trabalho, os *softwares* GeoGebra e o vMaxima, visando uma melhor compreensão das atividades elaboradas. Não obstante, temos que segundo Gabbi e Leivas (2014), "entendemos que partir do conhecimento adquirido do software GeoGebra e seu emprego na construção de conceitos geométricos pode tornar as aulas dinâmicas e atrativas".

Na secção a seguir, é realizada uma contextualização teórica, em torno dos números triangulares e dos números híbridos, elencando os aspectos históricos e matemáticos desses dois assuntos. Seguimos com a discussão da metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho, Engenharia Didática, e da teoria de ensino, Teoria das Situações Didáticas. Por fim, temos os resultados da pesquisa, dos quais são aplicadas a primeira e segunda fase da Engenharia Didática, elaborando duas situações-problema fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, elencando os elementos existentes para uma possível aplicação da análise *a posteriori*.

Contextualização teórica

Números Triangulares

Para abordarmos os números triangulares, lembramos que as sequências recorrentes podem ser apresentadas de três maneiras básicas, são elas: recorrência, apresetando um número em função de seus anteriores; uma fórmula para o termos geral, relacionando com um número da sequência com a ordem em que ele se encontra; e, por fim a função geradora, que apresenta uma função do tipo $F(x)=c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2+\cdots+c_nx^n,|x|<1$ em que $c_0,c_1,c_2,...,c_n,...$ são os termos da sequência desejada.

Para a sequência numérica (1,3,6,10,...), em que seus números podem ser organizados usando-se a seguinte descrição: $T_1=1,T_2=3,T_3=6,...$ (Alves, Neto, & Maia, 2012), observamos que, para $n\in\bullet$ e $n>0$:

$$\begin{aligned}
&T_1=1\\
&T_2=3=1+2=T_1+2\\
&T_3=6=3+3=T_2+3\\
&\vdots\\
&T_{n+1}=T_n+(n+1),T_1=1
\end{aligned}$$

Tal organização, identifica a recorrência desses números e, quando convertidos em pontos sugere (Figura 1).

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

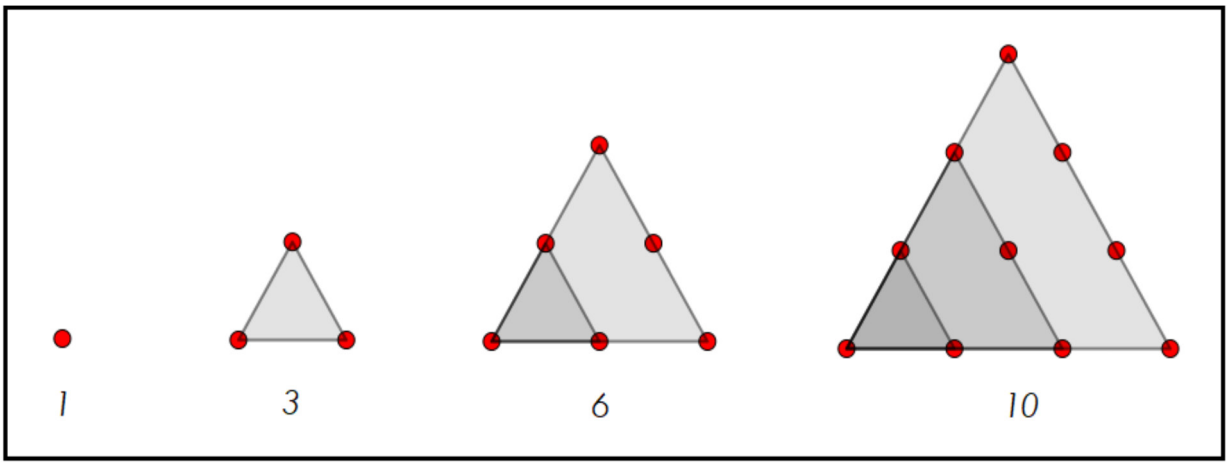

Figura 1. Os quatro primeiros números triangulares. Fonte: Elaborado pelos autores

Ainda em relação a figura, percebemos que:

$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 1+2$$
$$T_3 = 1+2+3$$
$$\vdots$$
$$T_n = 1+2+\cdots+n$$

Assim, temos: $T_n = \underbrace{(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)}_{\frac{n}{2}\ vezes}$, ou seja: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, que é a fórmula para um termo qualquer da sequência dos números triangulares.

Para a função geradora, precisamos de uma recorrência em que os termos são números triangulares. Para isso, de acordo com (Deza & Deza, 2012), tomaremos a recorrência: $T_{n+1} = T_n + (n+1)$ e observamos que: $T_{n+2} = T_{n+1} + (n+2)$ e $T_{n+3} = T_{n+2} + (n+3)$. Assim, temos que:

$$T_{n+3} - T_{n+2} = T_{n+2} + (n+3) - T_{n+1} - (n+2)$$
$$T_{n+3} = 2 \cdot T_{n+2} - T_{n+1} + 1 \quad (\mathrm{I})$$

Por outro lado, fazendo $T_{n+2} - T_{n+1}$, temos:

$$T_{n+2} - T_{n+1} = T_{n+1} + (n+2) - T_n - (n+1)$$
$$T_{n+2} = 2 \cdot T_{n+1} - T_n + 1 \quad (\mathrm{II})$$

Por fim, temos que: $(II) - (I)$ é:

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

$$T_{n+3} - T_{n+2} = 2T_{n+2} - T_{n+1} + 1 - \left(2T_{n+1} - T_n + 1\right)$$
$$T_{n+3} = 3T_{n+2} - 3T_{n+1} + T_n$$
$$T_{n+3} - 3T_{n+2} + 3T_{n+1} - T_n = 0 \quad (III)$$

Assim, a função $F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + \cdots$, em que $c_n = T_{n+1}$ pode ser escrita como $\frac{f(x)}{g(x)} = F(x)$, em que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_mx^m$ com $n < m$ então $f(x) = g(x) \times F(x)$.
Com isso, vemos que:

$$a_0 = b_0c_0$$
$$a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$$
$$a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$$
$$a_n = b_0c_n + \cdots + b_nc_0$$
$$0 = b_0c_{n+1} + \cdots + b_{n+1}c_0$$
$$\vdots$$
$$0 = b_0c_{n+2} + b_1c_{n+1} + b_2c_n + b_3c_{n-1} + \cdots + b_{n+2}c_0 = b_0T_{n+3} + b_1T_{n+2} + b_2T_{n+1} + b_3T_n$$

Então, $b_i = 0$ para $i > 3$ e, com base na recorrência (III), podemos afirmar que $g(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1-x)^3$, pois seus termos são os coeficientes que aparecem na recorrência. Logo, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, pois $n < m$ e, $a_0 = 1.1 = 1, a_1 = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0, a_2 = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$. Sendo assim, $f(x) = 1$ e $F(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$, que é a função geradora para os números triangulares. Porém, seus termos aparecem como $F(x) = T_1 + T_2x + \cdots + T_nx^{n-1}$, para que os termos se apresentem com os expoentes correspondendo a posição do número, basta considerar $f(x) \cdot x$ ou seja $F(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$. Para comprovar essa afirmação, usaremos o *software vMáxima* para apresentar a função dada (Figura 2).

desenvolvimento
curricular
e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

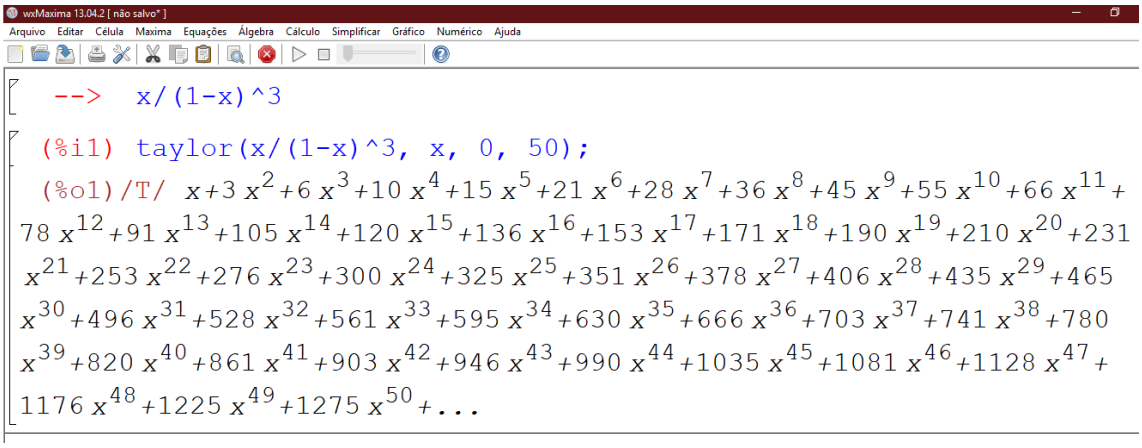

Figura 2. Função geradora dos números triangulares no *software vMáxima*.
Fonte: Elaborado pelos autores

Por fim, apresentaremos os comandos no *software geogebra,* que exibem a sequência de números triangulares, para que o estudante seja capaz de entender a estrutura utilizada para cada fase da montagem da figura. Diante disso, separaremos em três fases básicas, são elas: o ponto inicial, a lista gerada por esse ponto formando uma sequência linear diante do eixo x, e, por fim, a lista gerada a partir da lista anterior que forma um triângulo de pontos. Para isso, temos a Figura 3:

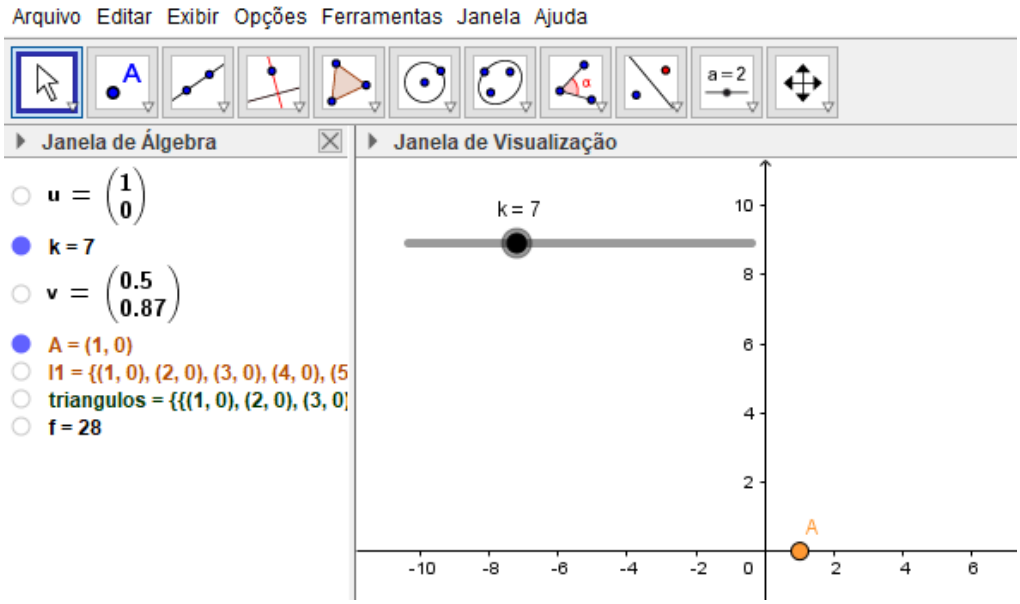

Figura 3. Ponto A para a construção dos números triagulares no *software geogebra*.
Fonte: Elaborado pelos autores

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

O primeiro passo da montagem de uma sequência de números triangulares, é o ponto A, de coordenadas $(1,0)$ e o botão deslizante *k*. O objetivo do ponto A, é ter um objeto pelo qual se pode gerar uma lista de objetos semelhantes, já o botão deslizante k, tem por finalidade gerar o k-ésimo número de tal lista. O segundo passo é criar uma lista através desse ponto, usando os comandos "sequência", "transladar" e inserindo o objeto, no caso o ponto A. Vale lembrar que, devemos criar um vetor $u = (1,0)$, por onde a sequência gerada pelo objeto "ponto A" será tranladado, gerando a seguinte Figura 4.

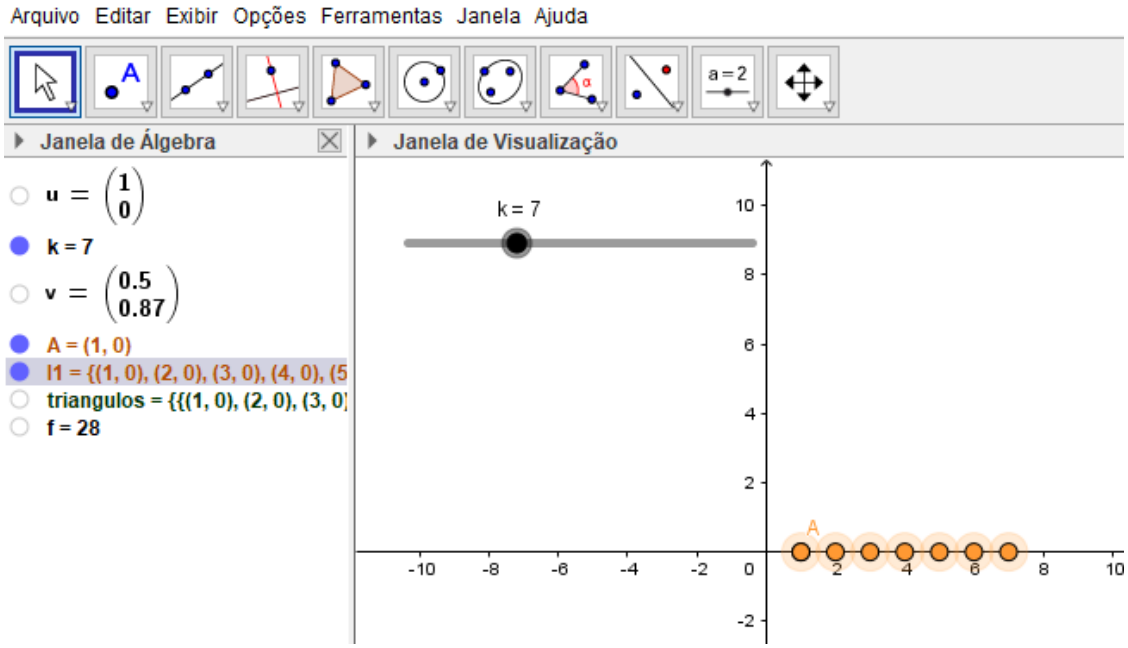

Figura 4. Lista de pontos para a construção de números triangulares com o *software geogebra*.
Fonte: Elaborado pelos autores

Esta lista corresponde a base do triângulo. Observe que o número de pontos já depende de k, então deveremos criar outra lista, que transladará por outro vetor, e usando outro objeto, no caso a lista de pontos. Vale lembrar que, deveremos utilizar outro comando, chamado de "parte da lista", pois cada termo criado deverá ter um ponto a menos que a anterior, para gerar o triângulo, assim temos a próxima e última Figura 5.

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

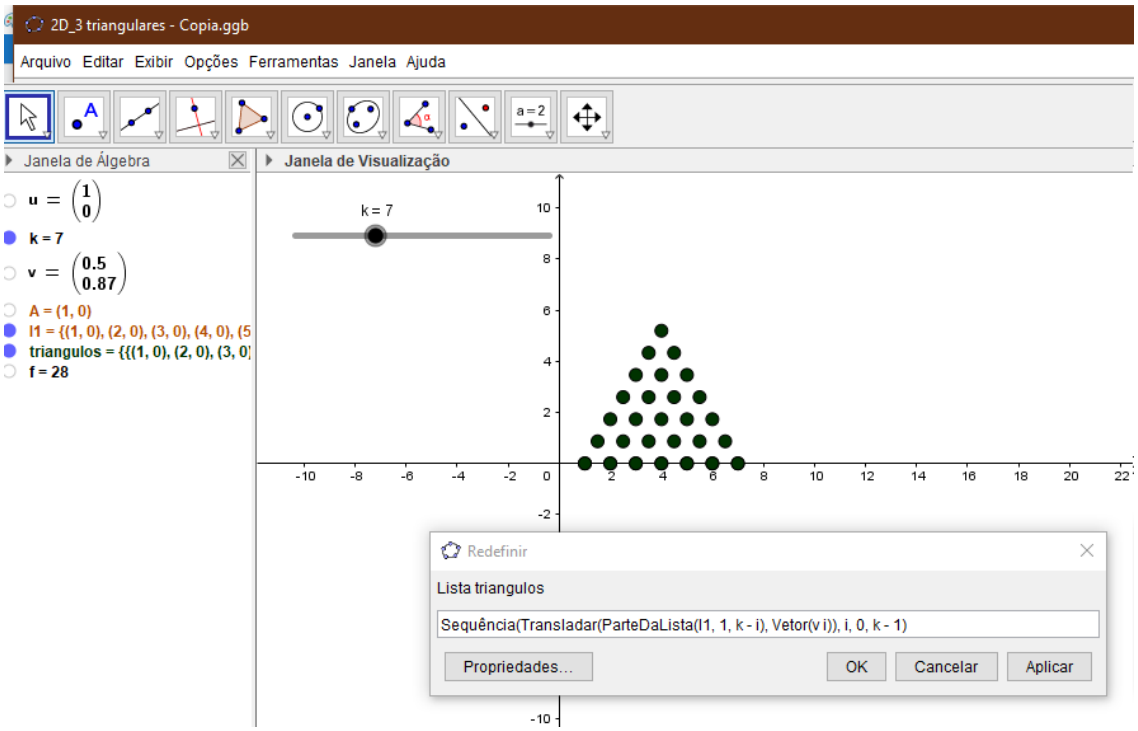

Figura 5. Visualização dos números triagulares via *software geogebra.*
Fonte: Elaborado pelos autores

Desta maneira, temos a visualização da sequência de números triangulares apresentadas pelo *software geogebra*, que pode ainda ter uma fórmula escrita usando o botão deslizante k, e a fórmula para o termo geral, para mostrar que, de fato, o número de pontos que aparecem, correspondem a sequência desejada.

Números Híbridos

Os números híbridos representam um conjunto dado pela junção de outros três conjuntos, sendo eles: complexos, duais e hiperbólicos. Esses números foram combinados entre si, resultando em novas definições e propriedades inerentes a eles. Apresentado primordialmente por Özdemir (2018), onde esse optou por chamá-los de números híbridos, em vez de, números generalizados.

Definição 1. Um número híbrido é definido por:

$$\mathrm{K} = \{a + bi + c\varepsilon + dh; i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1\},$$

sendo a, b, c e d números reais.

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

A partir disso, é possível realizar algumas operações com os números híbridos, tais como: igualdade entre números híbridos, adição, subtração, multiplicação por escalar e o produto dos números híbridos. É possível ainda apresentar outras propriedades inerentes, tais como: conjugado do número híbrido, caráter, norma e forma matricial.

Este conjunto vem sendo estudado recentemente nos trabalhos de Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Szynal-Liana (2019; 2018) através do processo de hibridização de sequências lineares recorrentes e, por Carvalho (2019) como uma alternativa de visualização desses números por meio de *softwares*.

Metodologia

A metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho foi a Engenharia Didática, sendo justificada pelo fato dessa estudar os processos de ensino e aprendizagem de determinado objeto matemático (Almouloud, 2007). Surgida no início dos anos 80, como uma metodologia para investigar a Didática da Matemática, a Engenharia Didática, valoriza então as práticas do professor, observando como as pesquisas podem ser utilizadas em processos que estudam o processo de ensino e aprendizagem de determinado objeto matemático (Santos & Alves, 2017).

Essa metodologia é então dividida em dois níveis, microengenharia e macroengenharia, onde a primeira refere-se aos fenômenos que ocorrem em sala de aula; Já a segunda, preocupa-se com os fenômenos existentes no processo de ensino e aprendizagem (Artigue, Douady & Moreno, 1995). Assim, essa pesquisa utiliza a microengenharia, com o viés de desenvolver teoremas e propriedades referente aos números híbridos figurados para cursos de formação inicial de professores, explorando o processo evolutivo de conteúdos em História da Matemática.

Desse modo, o professor deve realizar planejamentos, de acordo com as quatro fases dessa metodologia, sendo elas: análise preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Vieira, Alves e Catarino (2019), relatam que "na primeira fase, a fase das análises preliminares, são levantados os referenciais teóricos da pesquisa, para que possam prosseguir os estudos em relação ao conteúdo matemático abordado". É interessante que, a partir do objetivo da pesquisa e do objeto de estudo, sejam pesquisados em livros e artigos, que tratam do conteúdo matemático em questão. Só depois, é que devem ser selecionados determinados teoremas e propriedades, para serem abordados posteriormente, realizando assim uma transposição didática do conteúdo selecionado. Santos e Alves (2017), afirmam ainda que nesta fase três elementos devem ser considerados, os de ordem epistemológica, observando a evolução histórica do objeto de estudo; didática, referente à maneira como o conteúdo é repassado aos estudantes e cognitiva, caracterizada diante da análise das atividades propostas, observando o conhecimento dos estudantes em relação à temática.

A segunda fase, concepção e análise *a priori*, segundo Alves, Vieira, Silva e Mangueira (2019):

> *"A segunda etapa denominada análise a priori e construção da situação didática é o momento de responder às questões levantadas na fase anterior, a partir das variáveis que irão permitir ao pesquisador/professor subsídios para a construção da situação didática e, a partir da vivência, por*

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

> *parte do aluno, superar os obstáculos encontrados no processo de aprendizagem"* (Alves, Vieira, Silva, & Mangueira, 2019, p. 12).

Nessa etapa são determinadas as varíaveis referente ao objeto de estudo, podendo ser macrodidáticas, relacionadas à estrutura geral da Engenharia Didática, ou microdidáticas, referente ao local da Engenharia. Com base nisso, será utilizada, nessa pesquisa, a variável microdidática, observando os elementos de uma situação específica (Oliveira & Alves, 2018).

Recomenda-se ainda que nesse momento os conceitos que serão investigados sejam abordados em forma de situações-problema, tornando o estudante como membro ativo do processo de ensino e aprendizagem. À vista disso, sente-se a necessidade de utilizar uma teoria de ensino, sendo portanto, selecionada a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986). Ressalta-se ainda que nessa etapa, são considerados possíveis comportamentos dos estudantes, em torno das situações didáticas de ensino, para então serem utilizadas posteriormente.

Uma sequência didática, é definida por Pannuti (2004) como:

> *"A sequência didática é uma outra modalidade organizativa que se constitui numa série de ações planejadas e orientadas com o objetivo de promover uma aprendizagem específica e definida. Essas ações são seqüenciais, de forma a oferecer desafios com o grau de complexidade crescente, para que as crianças possam colocar em movimento suas habilidades, superando-as e atingindo novos níveis de aprendizagem"* (Pannuti, 2004).

A terceira fase, experimentação, é o momento em que serão aplicadas as situações didáticas de ensino, realizando registros fotográficos, gravações de áudios, filmagens, entrevistas e etc. Almouloud e Silva (2012) afirmam que

> *"consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos apresentar os objetivos e condições da realização da pesquisa, estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação"* (Almouloud & Silva, 2012).

É importante notar que nesse momento deve-se estabelecer o contrato didático, sendo portanto, os comportametnos esperados dos estudantes pelos professores e vice-versa. Deve-se haver ainda um acordo entre o professor e os estudantes, durante as situações didáticas de ensino ocorridas em sala de aula (Brousseau, 1986).

A última fase, análise *a posteriori* e validação, diante dos dados coletados na fase anterior, são realizados confrontos desta fase, com a concepção e análise *a priori*, comparando os resultados esperados com os obtidos. Alves (2018) relata ainda que

> *"A análise a posteriori permite prever se o meio, se o cenário demarcado para o desenvolvimento das sequências, permitiu a determinação de informações representativas e não secundárias para a investigação"* (Alves, 2018).

A validação pode ocorrer de forma interna ou externa, onde na primeira são analisados somente os dados em que foi aplicada a Engenharia Didática. Na validação externa são levados

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

em consideração as turmas em que utilizaram a Engenharia Didática, e as que não utilizaram tal metodologia, comparando os resultados obtidos com os esperados.

A teoria de ensino utilizada, Teoria das Situações Didáticas, estuda as ações voltadas ao conhecimento e as relações entre o professor e os estudantes vivenciadas em sala de aula (Brousseau, 1986). O objeto de estudo utilizado nessa pesquisa, envolve a interação entre os três elementos do triângulo didático, estudado por Brousseau (1986), sendo portanto sustentado por três pilares, professor, aluno e o saber (Figura 6).

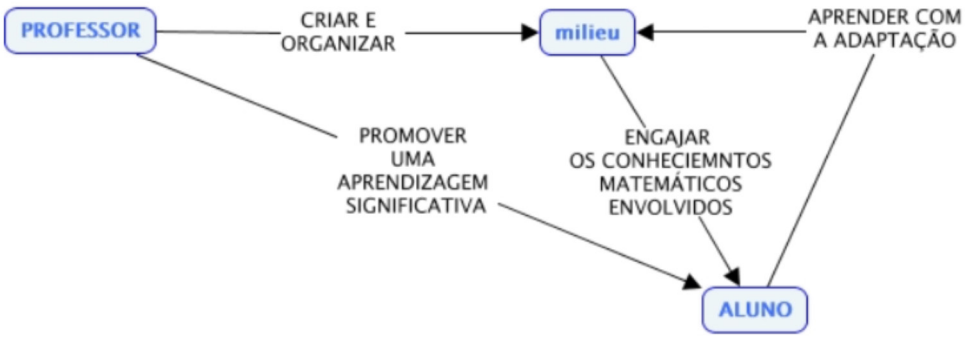

Figura 6. Triângulo didático. Fonte: (Santos & Alves, 2018, p. 203)

Esse processo possui como desafio proposto ao professor elaborar situações de ensino, sem então revelar a intenção de ensinar aos estudantes, evoluindo na construção de seus próprios conhecimentos. Assim, temos a divisão dessa teoria em quatro fases, sendo elas: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na fase da ação, os estudantes irão deparar-se com a situação-problema proposta, buscando em seus conhecimentos prévios, possíveis resoluções para a atividade. Alves (2018) afirma que "os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos".

A formulação, acontece através da troca de informações entre os estudantes, utilizando uma linguagem mais apropriada, porém ainda sem utilizar a linguagem formal (Teixeira & Passos, 2013). Vieira, Alves e Catarino (2019) resumem essa fase como:

> *"Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático abordado"* (Vieira, Alves & Catarino, 2019).

Na fase da validação, os estudantes irão convencer os interlocutores sobre os argumentos referentes às soluções obtidas, passando a utilizar uma linguagem mais formal. Demonstrações e mecanismos matemáticos devem ser utilizados para provar a veracidade dos argumentos e discussões. Silva e Almouloud (2018), relatam que nesse momento "o estudante deve mostrar a validade de seus argumentos, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor".

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Durante a fase da institucionalização, segundo Santos e Alves (2017), "o professor deve fixar convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber". É nesse momento em que a intenção da atividade proposta é revelada aos estudantes, além de validar as resoluções obtidas pelos estudantes, verificando e discutindo os procedimentos realizados. Alves (2016), revela ainda que nesta fase:

> *"Desse modo, tendo em vista tornar oficial determinado saber e indicar a relevância de incorporá-lo ao património cultural da classe, o seguinte teorema deverá ser enunciado e, em adequação ao público de interesse (alunos de licenciatura ou bacharelato), pode ser demonstrado"* (Alves, 2016, p. 106).

Ademais, após uma breve discussão sobre as fases desta teoria de ensino e, da metodologia de pesquisa aplicada, damos início aos resultados desse projeto, por meio das duas primeiras fases da Engenharia Didática, sem ocorrer prejuízo das demais fases.

Resultados

Os resultados serão apresentados com base na Engenharia Didática e amparado pela Teoria das Situações Didáticas. Devemos, para isso, descrever as situações didáticas referente ao objeto matemático, evidenciando a abordagem utilizada e buscando corresponder os passos da Teoria das Situações Didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização sobre a hibridização dos números triangulares.

Análise Preliminar

Nesta fase, são apresentados os resultados do processo de hibridização dos números triangulares, referentes à junção de dois conteúdos matemáticos, obtidos a partir do levantamento bibliográfico em torno dos números triangulares e números híbridos. Com tudo, tem-se o intuito de explorar as concepções matemáticas desses números híbridos triangulares, evidenciando conceitos matemáticos relevantes, além de incorporar elementos de ordem epistemológicas, possibilitando que este conteúdo possa ser explorado em situações de ensino.

Definição 2. O número híbrido triangular, denominado por HT_n, é definido como:

$$,HT_n = T_n + T_{n+1}i + T_{n+2}\varepsilon + T_{n+3}h, n \geq 1$$

com as condições iniciais iguais a: $HT_1 = 1+3i+6\varepsilon+10h$, $HF_2 = 3+6i+10\varepsilon+15h$ e $HF_3 = 6+10i+15\varepsilon+21h$.

Definição 3. A fórmula de recorrência do híbrido triangular, para $n \geq 1$, é definida como:

$$HT_{n+1} = HT_n + [n+(n+1)i+(n+2)\varepsilon+(n+3)h+1+i+\varepsilon+h]$$

Por outro lado, pode-se apresentar uma recorrência homogênea.

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Definição 4. A fórmula de recorrência homogênea do híbrido triangular, para $n \geq 1$, é definida como:

$$HT_{n+3} = 3HT_{n+2} - 3HT_{n+1} + HT_n$$

Tendo como base os números híbridos, pode-se expor novas definições e propriedades matemáticas para os números híbridos triangulares, tais como: caráter, norma, matriz e a relação existente entre a norma e matriz desses números.

Definição 5. O caráter do número híbrido triangular, denominado por $C(HT_n)$, é apresentado por:

$$C(HT_n) = -8T_{n+1}^2 - 9T_{n+2}^2 + 16T_{n+1}T_{n+2} - 6T_n(T_{n+2} + T_{n+1})$$

Definição 6. A norma de um número híbrido triangular, $\|HT_n\|^2$, é dada por:

$$\|HT_n\|^2 = |-8T_{n+1}^2 - 9T_{n+2}^2 + 16T_{n+1}T_{n+2} - 6T_n(T_{n+2} + T_{n+1})|$$

Definição 7. Uma matriz do número híbrido triangular, com $n \geq 1$, é definida como:

$$\varphi_{HT_n} = \begin{bmatrix} T_n + T_{n+2} & -2T_{n+1} + 2T_{n+2} + T_n \\ 4T_{n+2} - 4T_{n+1} + T_n & T_n - T_{n+2} \end{bmatrix}$$

Propriedade 2. O determinante da matriz híbrida é igual à sua norma:

$$\det(\varphi_{HT_n}) = \|HT_n\|^2$$

Pode-se ainda, apresentar a fórmula do termo geral dos números híbridos triangulares, a partir dessa expressão, calculando qualquer número híbrido triangular sem depender da recorrência e seus termos iniciais.

Teorema 1. O termo geral dos números híbridos triangulares, $n \geq 1$ é dado por:

$$HT_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} i + \frac{(n+2)(n+3)}{2} \varepsilon + \frac{(n+3)(n+4)}{2} h$$

E ainda, pode-se exibir a função geradora desses números triangulares, sendo esta função dada por uma série de potências, na qual os seus coeficientes apontam informações sobre sua sucessão.

Teorema 2. A função geradora dos números híbridos triangulares é apresentado como:

$$HT(x) = \frac{(1 + (3 - 3x + x^2)i + (6 - 8x + 3x^2)\varepsilon + (10 - 15x + 6x^2)h)x}{(1-x)^3}$$

Usando o software vMáxima para comprovar, temos a Figura 7 a seguir:

desenvolvimento curricular e didática

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

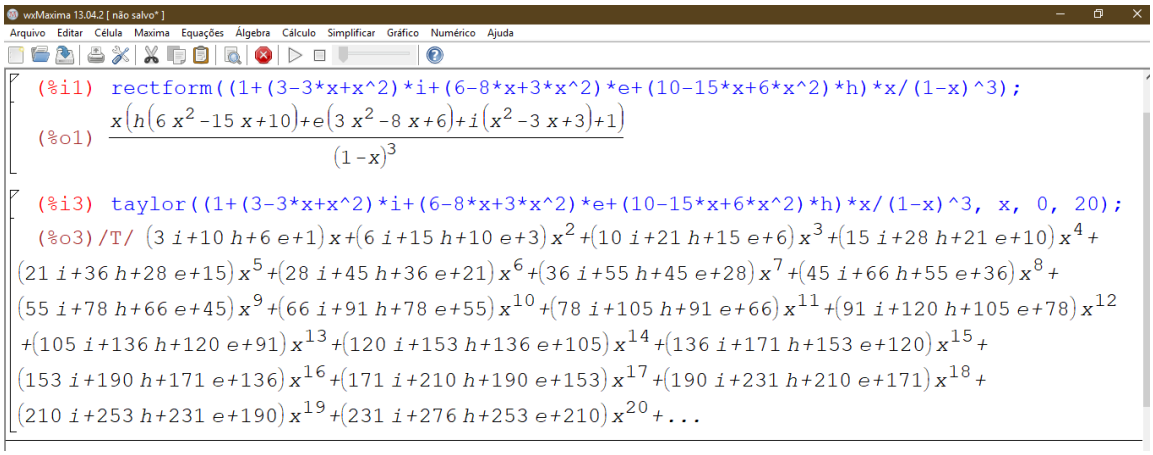

Figura 7. Função geradora dos números híbridos triangulares no *software vMáxima*.
Fonte: Elaborado pelos autores

A seguir, descreveremos a aplicação duas primeiras fases da Engenharia Didática, em associação com a Teoria das Situações Didáticas, elaborando situações didáticas de ensino, discutindo-as com base em possíveis resultados em curso de formação inicial de professores de Matemática.

Concepção e análise *a priori*

Nas seções anteriores, foram realizados estudos sobre os números triangulares e os números híbridos, para assim, desenvolver o processo de hibridização dos números triangulares. Com isso, baseados nos teoremas e propriedades matemáticos apresentados anteriormente, foram desenvolvidas duas situações didáticas de ensino, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, com o intuito de estimular os alunos a desenvolverem estratégias de soluções, considerando seus conhecimentos prévios. Nesta fase, é selecionada a variável didática utilizada nesta pesquisa, sendo então a microdidática, uma vez que são observados somente os elementos referentes ao objeto de estudo matemático.

Situação-prolema 1: Os números triangulares podem ser visualizados a partir do *software* GeoGebra. Com base nisso, apresente possíveis passos por meio dos comandos já observados, com o intuito de construir uma forma de visualização dos números híbridos triangulares, em relação aos coeficientes reais de cada termo, por meio desse *software.*

Ação: Nesta fase, são apresentados inicialmente aos estudantes, o problema que será solucionado, a visualização dos números triangulares utilizando o *software*, comandos que serão utlizados, um resumo da finalidade de cada um, e ainda, a fórmula do termo geral dos números híbridos triangulares. O estudante, no entanto, não precisa desenvolver os comandos no *software*, pois isso demanda conhecimento do mesmo e não é esse o foco da questão, o objetivo é entender

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

como a construção se dá alterando os valores dentro do *software*, modificando ou transpondo informações vindas da fórmula do termo geral.

Diante do problema proposto e das informações dadas, espera-se que os alunos relacionem os coeficientes encontrados na fórmula do termo geral com a figura apresentada, bem como, identificar o que pode ser feito ao triângulo construído no *software* para que este seja duplicado, porém com uma unidade maior do que o anterior, isto é, se o número apresentado for o terceiro número triangular, sua cópia deverá ser o quarto número triangular. Dispondo apenas de conhecimentos prévios adquiridos em outras etapas da sua vida estudantil, nesse momento é fundamental que os estudantes criem associações entre si, auxiliando-os nas formulações de possíveis respostas.

Formulação: Diante da situação-problema, espera-se que os alunos tirem as primeiras conclusões matemáticas sobre a relação dos coeficientes no termo geral e, sua relação com o triângulo visto no *software*. É possível que alguns estudantes percebam que ao alterar algum número da lista de pontos do *geogebra,* gera-se um novo triângulo que corresponde ao termo sucessor. Nesta fase, os estudantes fazem anotações que ainda não tem um rigor matemático, a ser seguido com um tratamento do *software*, pois eles podem esquecer a necessidade de construção de outros vetores para que a nova figura apareça em outra direção. Os testes realizados junto ao software podem apresentar a seguinte Figura 8:

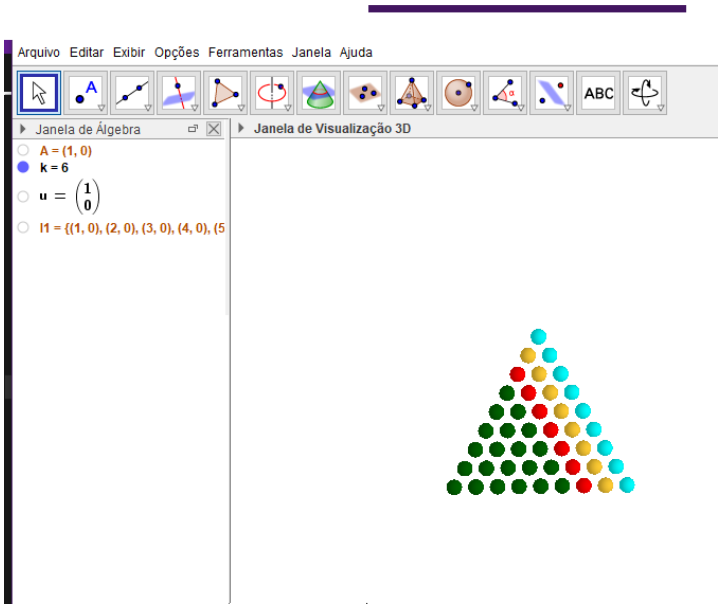

Figura 8. Possível visualização dos números híbridos triangulares feita pelos alunos.
Fonte: Elaborado pelos autores

Esta figura não seria o resultado almejado, visto que, é plotado um triângulo com algumas cores diferentes e não expressaria exatamente os quatro coeficientes.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Validação: Nesta fase, almeja-se que o estudante já tenha entendido que as possíveis visualizações partem de alguns princípios, tais como: a variação do número presente em cada lista, o vetor que apresenta a direção e as cores de cada lista. Vale salientar que, as cores são apenas para diferenciar um número do outro, o que seria uma espécie de legenda de cada coeficiente dos números complexos, duais e hiperbólicos. A partir dessas informações, o estudante estará apto a realizar a construção junto ao professor. As póssiveis figuras que poderiam ser construídas com a modificação da lista e dos vetores, serão apresentadas a seguir:

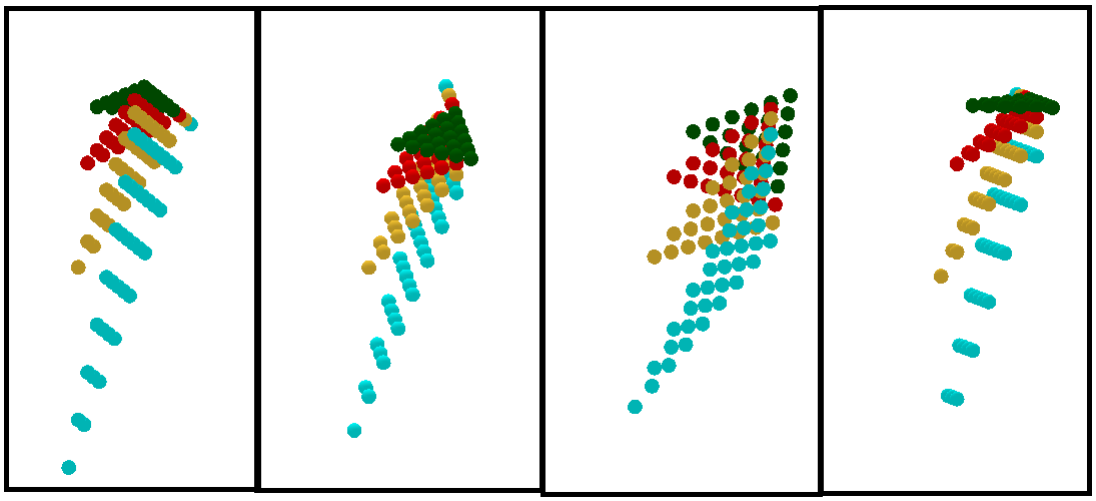

Figura 9. Etapas da rotação dos números híbridos triangulares. Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 9, apresenta a visualização da rotação dos números híbridos triangulares, na qual, as cores representam: verde (reais), vermelha (complexos), amarela (duais) e azuis (hiperbólicos). A seguir apresentaremos a Figura 10 sem edição e dentro do *software GeoGebra*.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

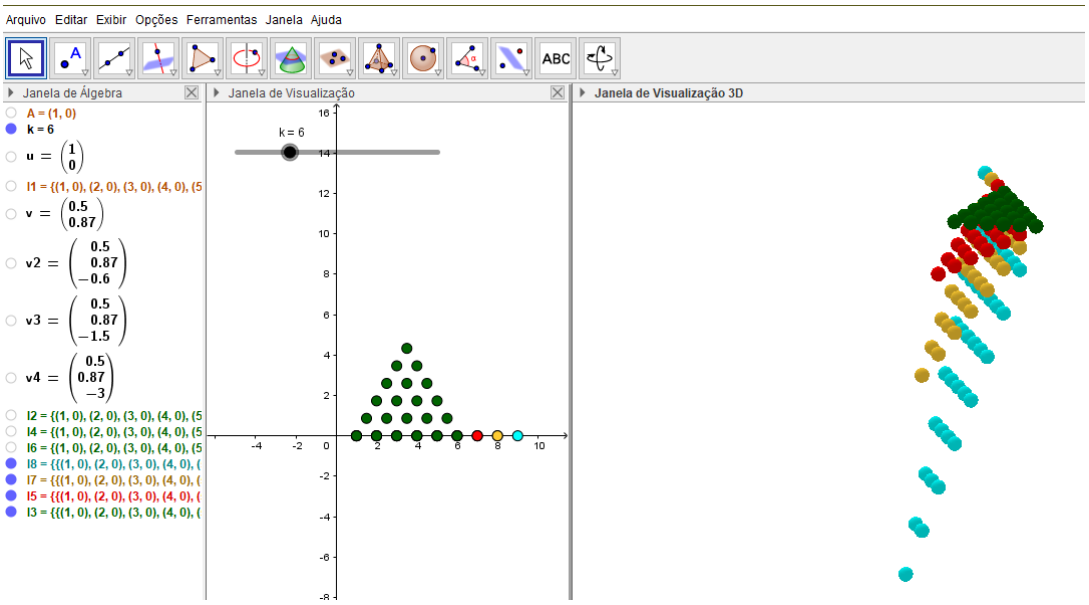

Figura 10. Possível representação dos números híbridos triangulares no *software geogebra*.
Fonte: Elaborado pelos autores

Outra possível construção, não leva em conta a visualização em 3D, ou seja, os vetores sugeridos para a construção estariam dentro da janela 2D, assemelhando-se com as Figuras11e 12.

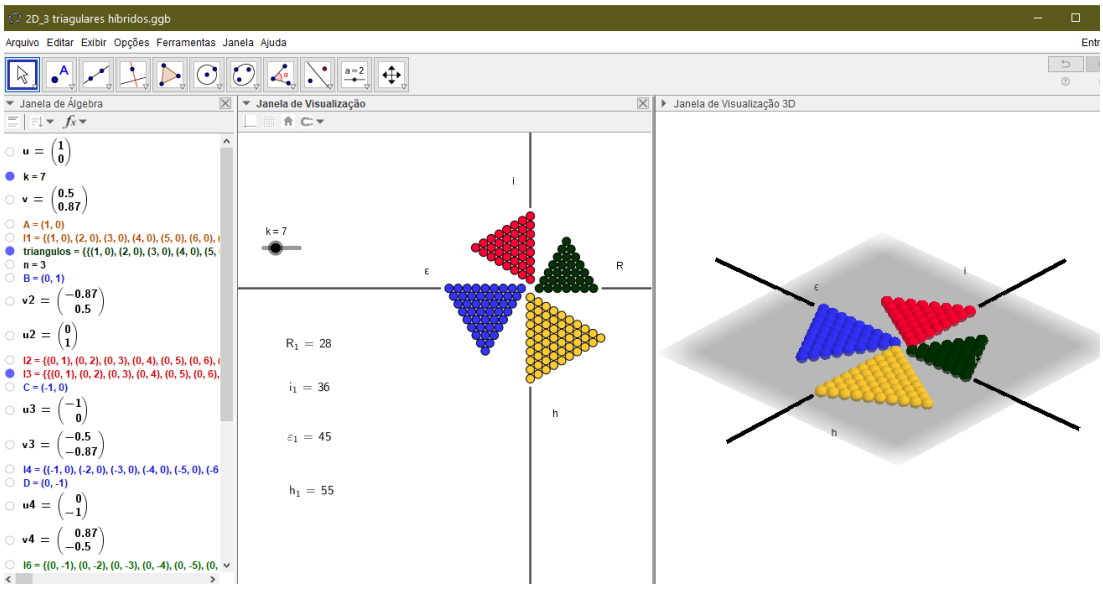

Figura 11. Outra possível construção dos números híbridos triangulares. Fonte: Elaborado pelos autores

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

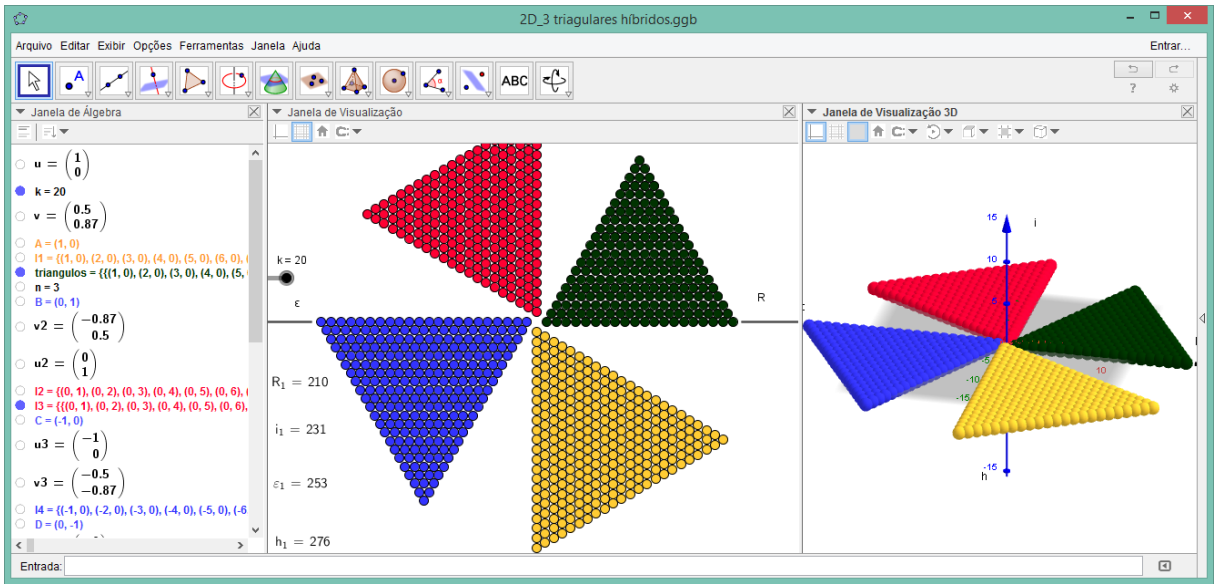

Figura 12. Outra possível construção dos números híbridos triangulares 2D e 3D.
Fonte: Elaborado pelos autores

As figuras 11 e 12, apresentam os coeficientes dos números híbridos triangulares, com uma vantagem, a janela 2D já exibe todos os valores, sendo a janela 3D usada apenas como efeito de animação e visualização. Vale salientar que, a cor verde representa os números reais, a vermelha os números complexos, as azuis os números duais e amarelas os números hiperbólicos.

Institucionalização: Esta fase é a única da Teoria das Situações Didáticas em que o professor se expressa, com o intuito a realizar um caminho didático que explique a construção do conhecimento dos alunos, acrescentando algumas informações que não foram observadas pelos alunos e retirando possíveis argumentos que não teriam relevância no aprendizado. O professor pode optar por realizar a construção da figura enquanto explica o caminho metodológico que deveria ser seguido, desta maneira os estudantes poderiam ter uma síntese do que foi discutido, buscando outras propriedades ou construções, a partir das novas informações apresentadas.

Situação-problema 2: Na função geradora dos números triangulares, os seus coeficientes apresentam informações retiradas da recorrência linear homogênea. Encontre a função geradora dos números híbridos triangulares e confirme a sua veracidade, utilizando o *software* vMáxima.

Ação: Diante do problema apresentado, os estudantes terão de observar a construção da função geradora dos números triangulares e a sua relação com a recorrência. Nesse momento, é esperado que os estudantes busquem uma relação que poderia facilitar o cálculo, dispondo assim de três fórmulas, são elas: função geradora dos números triangulares, recorrência linear homogênea dos números triangulares e híbridos triangulares.

Formulação: Nesta etapa, é esperado que o aluno já tenha realizado algumas observações e questionamento, sem o uso das definições matemáticas desejáveis, sendo possível identificar

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

alguns padrões, como: o fato de um número híbrido triangular ser a adição de quatro termos, dos quais os coeficientes são reais, ou seja, a função geradora poderá ser apresentada como a soma de quatro funções geradoras de números triangulares, com valores iniciais diferentes. Assim, enquanto os valores iniciais dos números reais são 1, 3 e 6, os valores iniciais da sequência que forma a parte complexa, são formadas pelos números 3, 6 e 10, e assim sucessivamente, para os números duais e hiperbólicos.

Validação: Para validar as afirmações realizadas anteriormente, o estudante poderá perceber que já existe a função geradora para os números reais, realizando os seguintes cálculos para os números complexos, duais e hiperbólicos:

Função geradora da parte complexa:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}\cdot i = c_0i+c_1ix+c_2ix^2+\cdots$$

Mudando apenas os valores iniciais, a função do denominador será a mesma, visto que se refere aos coeficientes da recorrência. Logo, apenas a função do numerador irá alterar-se, ou seja:

$$a_0 = 1\cdot 3$$
$$a_1 = b_0c_1+b_1c_0 = 1\cdot 6-3\cdot 3 = -3$$
$$a_2 = b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0 = 1\cdot 10-3\cdot 6+3\cdot 3 = 1$$

Então, a função geradora da parte complexa é apresentada como: $Fi(x)=\frac{\left(3-3x+x^2\right)i}{(1-x)^3}$. Sempre lembrando que, as funções deverão ser multiplicadas por x, para que não tenhamos o coeficiente de x^0.

Para a função geradora dos termos duais, tem-se:

$$a_0 = 1\cdot 6 = 6$$
$$a_1 = b_0c_1+b_1c_0 = 1\cdot 10-3\cdot 6 = -8$$
$$a_2 = b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0 = 1\cdot 15-3\cdot 10+3\cdot 6 = 3$$

Com isso, a função desses termos é dada por $F\varepsilon(x)=\frac{\left(6-8x+3x^2\right)\varepsilon}{(1-x)^3}$.

Por fim, a função dos termos hiperbólicos são expressos como:

$$a_0 = 1\cdot 10 = 10$$
$$a_1 = b_0c_1+b_1c_0 = 1\cdot 15-3\cdot 10 = -15$$
$$a_2 = b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0 = 1\cdot 21-3\cdot 15+3\cdot 10 = 6$$

Ou seja, $Fh(x)=\frac{\left(10-15x+6x^2\right)h}{(1-x)^3}$. Agrupando as quatro funções e multiplicando-as por x ,obtemos a função geradora dos números híbridos triangulares definida como:

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

$HT(x) = \frac{(1+(3-3x+x^2)i+(6-8x+3x^2)\varepsilon+(10-15x+6x^2)h)x}{(1-x)^3}$. Como já vimos anteriormente, esta é a função geradora dos números híbridos triangulares e, já foi comprovada com o auxílio do *software vMáxima*.

Institucionalização: Os cálculos discutidos e apresentados, relatam que a institucionalização pode ser vivenciada pelo professor no momento da sua exposição. No entanto, deve-se destacar que, caso o estudante apresente as suas considerações, esta fase pode ser apresentada como um resumo da questão, sempre pontuando o fator mais importante como sendo a retirada de alguns argumentos que não colaborem para a formulação.

Elementos para uma possível análise *a posteriori*

É nesta fase, que ocorre a análise dos dados coletados durante a aplicação da situações-problema propostas. Uma vez que essas não foram aplicadas, elencamos alguns elementos relevantes para uma possível análise *a posteriori*, fundamentada na Engenharia Didática, com enfoque na Teoria das Situações Didáticas.

Na primeira situação-problema, pode-se destacar uma principal dificuldade para os estudantes, sendo esta, a transposição de um conteúdo matemático para um conhecimento de *software* em que os mesmos, provavelmente, não tenham o domínio. Neste caso, os estudantes precisam entender que as fórmulas utilizadas para o cálculo matemático se comportam da mesma forma no *software*. Assim, para obter um número triangular maior que o anterior, é necessário alterar a fórmula em uma unidade, então com a utilização do *software*, o comando deverá também sofrer a alteração em uma unidade. Porém, a falta de conhecimento, com o manuseio do *geogebra*, pode trazer a incerteza de formular um possível comando. Neste caso, o professor deve deixar bem claro o que pode acontecer quando os comandos são alterados e, a função de cada um. Se possível, deixando os comandos por escrito, para que os estudantes observem melhor o seu comportamento.

Na situação-problema 2, os alunos podem apresentar dificuldades, caso não compreendam que é possível somar duas funções, ou encontrar problemas por tentarem encontrar uma recorrência híbrida e homogênea, o que deixaria o cálculo bastante extenso e com grandes chances de erros ou desistências. Para isso, o professor pode recorrer a exemplos de funções geradoras, que podem ser adicionadas para formar outra. Além disso, em alguns casos, é possível que sejam utilizadas a soma de dois números triangulrares seguidos, gerando números quadrados (sequência do tipo $Q_n = n^2, n \in \bullet$). Desta forma, os estudantes podem entender certos comportamentos durante o cálculo de uma função geradoram tornando-o menos exaustivo e com menos chance de erros.

Conclusões

A presente pesquisa objetivou realizar uma discussão entre os elementos teóricos, fundamentados em uma Engenharia Didática, indispensáveis para um processo de ensino e aprendizagem.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Realizando uma transposição didática em torno do conteúdo dos números híbridos triangulares, tivemos então a aplicação das duas fases iniciais da metodologia de pesquisa empregada, amparada à teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas.

De início, foi então realizado um estudo referente ao objeto de estudo, separadamente, para então, seguirmos com a junção desses dois conteúdos matemáticos, obtendo assim os números híbridos triangulares. Com isso, foram discutidas algumas definições e teoremas matemáticos, sendo portanto, selecionados alguns, para então elaborar as duas situações-problema exploradas.

Na primeira situação, tem-se a intenção de explorar uma visualização dos números híbridos triangulares, através do software *GeoGebra*. Nessa atividade, os alunos não necessitam de domínio do *software* para obter êxito, uma vez que as ações realizadas nesse recurso são mediadas pelo professor, pois o objetivo é entender como é desenvolvida a construção da visualização desses números híbridos triangulares. Porém, é necessário que os alunos tenham a percepção do comportamento da fórmula matemática e, como isso refletir por meio do *software*. Caso isso não ocorra, os alunos apresentarão dificuldades ao solucionar essa situação, o que pode ser esclarecido pelo professor.

Na segunda situação, tem-se como objetivo encontrar a função geradora dos números híbridos triangulares, validando-a por meio do software *vMáxima*. Para que a situação seja solucionada, os alunos devem utilizar relações matemáticas a fim de facilitar o cálculo que será realizado. Assim, é possível que existam algumas dificuldades durante a formulação da questão, podendo apresentar uma função difícil de ser trabalhada e propensa ao erro. Cabe ao professor, apresentar exemplos e artifícios que facilitem no momento da realização dos cálculos, validando a função geradora encontrada por meio do *software*.

Por fim, pretende-se transmitir aos estudantes, neste trabalho, o entendimento referente ao processo matemático e epistemológico dos números híbridos triangulares, concorrendo para a evolução dos conceitos matemáticos vivenciados durante a pesquisa. Não obstante, trazemos ainda o papel fundamental do professor, durante esse percurso metodológico, transmitindo elementos relevantes para o processo de ensino e aprendizagem, fortalecendo a construção do conhecimento dos estudantes.

Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico – CNPq e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática.* São Paulo: UFPR.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: UFPR.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Almouloud, S. A., & Silva, M. J. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 22-52.

Alves, F. R. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(1), 61-93.

Alves, F. R. (2016). GeoGebra e a Transição Complexa do Cálculo – TCC: o caso da regra de L´Hôpital. *Indagatio Didactica, 8*(2), 94-118.

Alves, F. R. (2018). Engenharia Didática para o Ensino de Variável Complexa: Visualização de Conceitos Relacionados ao Processo Matemática de Integração. *Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 11*(2), 3-29.

Alves, F. R., & Catarino, P. M. (2018). Engenharia Didática de 2° Geração com o tema: h(x)-Polinômios de Jacobsthal. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista, 8*(3), 28-55.

Alves, F. R., & Dias, M. A. (2017). Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED). *REVEMAT, 12*(2), 192-209.

Alves, F. R., Neto, H. B., & Maia, J. A. (2012). História da matemática: os números figurais em 2D e 3D. *Conexões, Ciência e Tecnologia*, 40-56.

Alves, F. R., Vieira, R. P., Silva, J. G., & Mangueira, M. C. (2019). *Ensino de ciências e educação matemática 3 [recurso eletrônico] Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. Capítulo 2 - Engenharia Didática para o ensino da sequência de Padovan: um estudo da extensão para o campo dos números inteiros.* Ponta Grossa, PR: Atena Editora. doi:10.22533/at.ed.0901922112

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L.(1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, cap. 5, 61-96.

Azevedo, A. J. (1979). Fibonacci Numbes. *The Fibonacci Quarterly, 17*(2), 162-165.

Básica, S. d. (2006). *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. .* Brasília: Ministério da Educação.

Brousseau, B. A. (1972). Fibonacci Numbers and Geometry. *The Fibonacci Quartely, 10*(3), 249-255.

Brousseau, G. (1986). *La relation didactique : Le milieu.* Paris: Actes de la IVème Ecole d'Eté.

Catarino, P. (2019). On k-pell hybrid numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 1-7.

Ceará, S. d. (2009). *Metodologias de Apoio: matrizes curriculares para ensino médio.* Fortaleza, Ceará: Coleção Escola Aprendente - Volume 1.

Cerda-Morales, G. (2018). Investigation of generalized hybrid bonacci numbers and their properties. *arXiv preprint arXiv:1806.02231*.

Dante, L. R. (2013). *Contexto e Aplicações* (Vol. 1). São Paulo: Ática.

Deza, E., & Deza, M. M. (2012). *Figurate Numbers.* Singapura: World Scientific.

Eloi, Q. C., & Andrade, V. L. (2020). Relações entre o Livro Didático e o Contrato Didático: a proposição do Contrato Didático Potencial. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(1), 231-252.

Faria, P. J., & Barbosa, L. D. (23 a 26 de Abril de 2019). A Função Quadrática nos livros didáticos de Matemática no Ensino Médio. *VIII Seminário de Iniciação Científica do IFNMG*, pp. 1-3.

Figueroa, T. P., & Almouloud, S. A. (2018). O Milieu e o Contrato Didático – Análise de uma Aula Demonstrativa do Círculo da Matemática do Brasil. *Acta Scientiae, 20*(4), 687-706.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Gobbi, J. A., & Leivas, J. C. (2014). Engenharia Didática e GeoGebra aliados na construção de conceitos geométricos. *Educação Matemática em Revista*, 40-48.

Iezzi, G., & Murakami, C. (1993). *Fundamentos de Matemática Elementar – vol 1: Conjuntos e soluções.* São Paulo: Atual.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação.* Campinas – SP: Papirus.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* A Wiley-Interscience publication.

Lima, J. R., & Ferreira, H. (2020). Contribuições da Engenharia Didática como elemento norteador no Ensino de Física: estudando o fenômeno de Encontro de Corpos com atividades da Robótica Educacional. *Revista Brasileira de Ensino de Física, 42*, e20190021. doi:https://doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2019-0021

Maia, D. (2007). *Função quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional.* São Paulo: PUC - Mestrado em Educação Matemática.

Oliveira, R. R. (2018). *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais.* Fortaleza, Ceará: Dissertação - Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - IFCE.

Oliveira, R. R., & Alves, F. R. (2018). Uma Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae, 21*(3), 170-193.

Orzechowski, T. P., & Lopes, M. R. (2016). O uso deo GeoGebra na construção de conceitos de Geometria Plana e Espacial. *Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE*, 1-19.

Özdemir, M. (2018). Introduction to Hybrid Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras, 28*(11), 1-32.

Paiva, M. (2015). *Matemática Paiva* (3 ed., Vol. 2). São Paulo: Ática.

Pannuti, M. R. (2004). Caminhos da prática pedagógica. *TVE Brasil*, 1-5.

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.* São Paulo: S. N.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, XXV*(2), 77-98.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2017). Dinâmicas de aprendizagem de professores de Matemática no diagnóstico dos conhecimentos dos alunos num estudo de aula. *Quadrante*, 45-70.

Rocha, E. B. (2018). *Abordagem da função quadrática por meio da sua forma canônica: um estudo de caso numa escola pública de Juazeiro - BA.* Juazeiro - BA: Universidade Federal do Vale do São Francisco - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Santos, A. A. (2017). *Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci.* Fortaleza-Ce: Dissertação - Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE).

Santos, A. A., & Alves, F. R. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae, 19*(3), 447-465.

Santos, A. P., & Alves, F. R. (2017). A teoria das situações didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma aplicação do Teorema de Pitot. *Indagatio Didactica, 9*(4), 279-296.

Santos, A. P., & Alves, F. R. (2018). O cálculo de áreas: uma aplicação da engenharia didática no contexto das Olimpíadas de Matemática. *Indagatio Didactica, 10*(5), 199-222.

Indagatio Didactica, vol. 12 (3), julho 2020 ISSN: 1647-3582
https://doi.org/10.34624/id.v12i3.20106

Silva, C. V., & Almouloud, S. A. (2018). Uma articulação entre o quadro dos Paradigmas Geométricos e a Teoria das Situações Didáticas. *Acta Scientiae, 20*(1), 111-129.

Souza, J., & Garcia, J. (2016). *Contato Matemática.* São Paulo: Ática.

Szynal-Liana, A. (2018). The horadam hybrid numbers. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, 38*(1), 91-98.

Szynal-Liana, A., & Wloch, I. (2019). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. *Annales Mathematicae Silesianae*, 276-283.

Teixeira, P. J., & Passos, C. C. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. *Zetetiké-FE, 21*(39), 155-168.

Vieira, R. P., Alves, F. R., & Catarino, P. M. (2019). Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. *Indagatio Didactica, 11*(4), 261-279.

Youschhkevitch, A. (1976). The concept of function. *Archive for History of Exact Sciences, 16*(1), 37-85.