



## **Dificuldades na aprendizagem da Mediana e Quartis por alunos do 8.º ano de escolaridade: estudo comparativo Fórmula versus Gráfico**

### **Learning difficulties with median and quartiles concepts in the 8th grade students: formula versus plot comparative study**

**Adelaide Freitas**

Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA),  
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
adelaide@ua.pt  
ORCID: 0000-0002-4685-1615

**Teresa Simões Figueiredo**

Colégio da Via-Sacra, Viseu  
teresa.sf78@gmail.com

**Nélia Silva**

Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA),  
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
neliasilva@ua.pt  
ORCID: 0000-0002-5005-5638

**Maria Cristina Miranda:**

Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA),  
ISCA, Universidade de Aveiro  
Cristina.miranda@ua.pt  
ORCID: 0000-0002-4642-5683

#### **Resumo:**

Investigações realizadas nas últimas três décadas reportam a existência de fragilidades na aplicação de algoritmos de cálculo da mediana e na sua interpretação, em alunos de diferentes níveis de ensino. Embora possam existir interações entre as causas que originam tais dificuldades, escasseiam estudos se e como as dificuldades (observáveis) no cálculo e na interpretação da mediana e dos quartis estão interligadas. Partindo de quatro situações-problemas, são analisadas as respostas dadas por 81 alunos do 8.º ano de escolaridade de uma escola, identificando e classificando os erros cometidos no cálculo e interpretação da mediana e dos quartis. Usando o coeficiente de associação V de Cramer, investiga-se também, numa perspetiva quantitativa, a interdependência entre a capacidade de obter os valores da mediana, primeiro quartil e terceiro quartil e a de interpretar o efeito sobre a mediana de uma alteração de um dado, tendo por base um conjunto de dados e um diagrama de extremos e quartis. A análise estatística das respostas assinalou situações onde existem associações fracas ou moderadas; mais ainda, não revelou associação entre a dificuldade de obtenção analítica (via fórmula) e gráfica (via diagrama de extremos e quartis) da mediana, perante uma alteração de dados. Esta constatação leva a crer que os alunos veem a interpretação



de resultados obtidos segundo aquelas duas abordagens (via fórmula versus via gráfica) como se de dois tópicos diferentes, não interligados, se tratasse.

**Palavras-chave:** Educação Estatística; Dificuldades dos alunos; Alunos do 8.º ano de escolaridade; Erro; Quantis.

### Abstract:

Last three decades studies point out some difficulties when calculating and interpreting the median for different levels of study. Yet there is still no answer to what kind of association exists among those observed difficulties or even if there are any. The study was done with a set of 81 responses of the 8<sup>o</sup> grade students relative to four situation problems proposed. A documental analysis was realized on each response. The errors found within the calculus and interpretation of median and quantiles were identified and classified. Based on a quantitative approach and using Cramer's V coefficient as statistical measure of association, the aim was to find out if there is a statistical association between the capacity of calculating the median and quartile values and the correct interpretation of those values after changes in data either concerning the calculated value or looking at the correspondent boxplot. The statistical analysis of the responses showed weak or moderate association in some cases; moreover, the analysis suggested that there is not association between the difficulties of calculating the median value and identifying the value in a boxplot after changing the data. This lack of association might indicate the distinct way students look at each form not realizing the existing relation as if they were two different issues.

**Keywords:** Statistics Education; Learning difficulties; Students; 8th grade students; Error; Quantiles.

### Resumen:

Investigaciones realizadas en las últimas tres décadas señalan dificultades en el cálculo e interpretación de la mediana en estudiantes de distintos niveles de enseñanza. A pesar de que puedan existir interacciones entre las causas que originan tales dificultades, todavía no se han averiguado si las dificultades (observables) en el cálculo y en la interpretación de la mediana y cuartiles, están conectadas ni el cómo lo están. En el presente trabajo son analizadas las respuestas de 81 estudiantes, del 2º ESO (con 8 años de la escolaridad), frente a cuatro problemas involucrando el cálculo y la interpretación de la mediana, primero cuartil y tercer cuartil sobre los datos dados y sujetos a una modificación de un dato. En los cuatro problemas los datos son presentados como una colección y representados por un diagrama de caja. Basado en una análisis documental de las respuestas incorretas, son identificados y clasificados los errores cometidos en el cálculo y en la interpretación de mediana y cuartiles. Basado en una perspectiva cuantitativa y utilizando el coeficiente de asociación V de Cramer, el análisis estadístico de las respuestas indicó situaciones con asociaciones débiles y moderadas; más aún, el análisis subrayó que no hay asociación entre la dificultad de obtener la mediana



analíticamente (via fórmula) y gráficamente (via diagrama de cajas) ante la modificación de un dato. Esta constatación sugiere que para los alumnos la interpretación de resultados obtenidos por fórmula o por diagrama de cajas son dos temas distintos, que no se entrelazan.

**Palabras clave:** Estadística Educativa; Alumnos con 8 años de la escolaridad; Error; cuantiles.

## Introdução

O tema Estatística surge nos currículos do ensino secundário, pela primeira vez, na década de 1970, com a reforma do ensino da Matemática apelidada de Matemáticas Modernas. Em 1986, o tema é incluído nos currículos dos segundo e terceiro ciclos do ensino básico, e em 2007 passa a integrar o primeiro ciclo do ensino básico. Atualmente, o tema “Estatística e Probabilidades”, presente no programa de Matemática desde 1991, designa-se por “Organização e Tratamento de Dados” (OTD). Segundo Martins e Ponte (2010), a introdução do capítulo de OTD, nos três ciclos do ensino básico, valoriza a Literacia Estatística, reconhecendo o papel fundamental deste tema no desenvolvimento social e pessoal do aluno, ensinando a leitura e interpretação de dados.

Nos últimos anos, os programas de Matemática para o ensino básico têm vindo a dar maior importância a uma correta interpretação dos resultados de um estudo estatístico, estimulando o desenvolvimento do sentido crítico, a capacidade de argumentação, de intervenção e a tomada de decisões dos alunos. O incremento dado ao ensino da Estatística, nos diferentes níveis, tem enfatizado a interpretação dos seus conceitos, contextualizando os resultados obtidos (Martins & Ponte, 2010; Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013b). Com o aumento da Literacia Estatística espera-se que os alunos, enquanto cidadãos, possam ser capazes de, entre outras coisas, ler e descrever informação contida em gráficos ou tabelas, interpretar textos que envolvem conceitos estatísticos e saber escolher medidas estatísticas adequadas para uma descrição sumária dos dados.

Das três medidas de tendência central (moda, média e mediana) atualmente inseridas no programa de OTD do ensino básico, a mediana é a que apresenta mais dificuldades, quer no processo de cálculo, quer na interpretação dos resultados obtidos (Boaventura & Fernandes, 2004; Barros, 2003). É também a última a ser inserida no ensino básico em Portugal, no 7.º ano de escolaridade, sendo os quartis abordados no 8.º ano de escolaridade, juntamente com o diagrama de extremos e quartis (Bivar *et al.*, 2013b).

Os alunos tendem a demonstrar erros conceptuais e dificuldades na escolha da medida de tendência central que melhor sumariza uma coleção de dados (Carvalho & César, 2001). A expansão que se tem vindo a assistir, ao longo das últimas três décadas, de pesquisas relacionadas com a identificação de erros na resolução de problemas e a deteção de dificuldades em Educação Matemática, em particular em tópicos no domínio da Estatística, tem permitido a consciencialização, por parte de professores e investigadores, de dificuldades de aprendizagem dos alunos (e.g., no conceito de mediana, veja-se Batanero, Godino, Vallencillos, Green & Holmes, 1994; Mayén, Díaz & Batanero, 2009). O diagnóstico



dos erros cometidos pelos alunos permite destacar as suas dificuldades, ajuda a prática do professor (Radatz, 1979), tornando-se fonte de pesquisa (Ramos, 2015) e facultando o processo de ensino/aprendizagem (Bayer, 2011).

Bayer (2011) defende que o conhecimento prévio e consciente, da forma como os alunos fazem a leitura e interpretação dos problemas da Estatística, e a análise dos erros cometidos, poderá permitir encontrar caminhos adequados, do ponto de vista pedagógico e didático, para minimizar ou eliminar tais erros. Saber compreender as razões pelas quais os alunos erram, parece ser um primeiro passo para transformar o erro numa ferramenta didática (Cury, 2007). De acordo com Cury (2006), a análise de erros pode ser entendida como uma metodologia de ensino, no momento em que são propostas atividades de exploração e análise conjunta dos erros, como fonte de construção de novos conhecimentos.

Este trabalho centra-se nas dificuldades manifestadas por alunos do 8.º ano de escolaridade, do sistema ensino português, nos tópicos atualmente abordados no domínio OTD. Concretamente, em contexto analítico, na compreensão do uso de uma fórmula de cálculo e sua interpretação, e em contexto gráfico, na leitura e interpretação das medidas a partir de um diagrama de extremos e quartis (DEQ).

Análises de dificuldades dos alunos no cálculo da mediana têm sido objeto de alguma investigação, havendo contudo um menor número de trabalhos sobre dificuldades nos quartis e nos DEQ (como será discutido mais afrente). Constata-se que escasseiam estudos, nacionais e internacionais, se e como as dificuldades (observáveis) dos alunos nessas medidas e no DEQ se relacionam.

Este estudo tem dois propósitos: (i) identificar e classificar os erros cometidos no cálculo e interpretação da mediana e dos quartis por alunos do 8.º ano de escolaridade, a partir da análise de respostas escritas por alunos a uma prova de Matemática, envolvendo os conceitos de mediana e quartis; (ii) analisar a existência de associação no desempenho dos alunos na identificação e interpretação da mediana e quartis, confrontando duas vias: fórmula no seu cálculo e leitura de um DEQ.

## Enquadramento teórico

### Classificação dos erros

Várias conceções do erro têm sido desenvolvidas na literatura especializada (Ramos, 2015). No domínio da aprendizagem da Matemática em geral, diversos estudos têm abordado os erros dos alunos na perspetiva didática, analisando as razões que conduzem o aluno a errar e propondo novas atividades que permitam explorar os erros diagnosticados (Cury, 2007; de la Torre, 2007). Com esse procedimento, pretende-se colmatar dificuldades pois, como salienta Ramos (2015, p. 134),

*“para se compreender as dificuldades, é necessário identificar os erros”.*



Em consonância com conceitos teóricos de referência no âmbito da investigação em Educação Matemática e com a noção intuitiva do termo erro, neste trabalho considera-se que um erro, no âmbito da realização de uma atividade matemática, será algo ou parte que, por comparação com a solução escrita apresentada pelo aluno, se identifica não corresponder a um processo de resolução requerido para obtenção da solução correta ou esperada pelo professor ou investigador. A solução correta pode ser definida em termos das metas ou objetivos curriculares pré-definidos para o nível de ensino em que se encontra o aluno.

De acordo com Radatz (1979), a natureza e causas subjacentes a erros cometidos em conteúdos matemáticos podem ser analisadas em termos de mecanismos individuais de processamento da informação. Radatz enumera os seguintes mecanismos de processamento que podem originar erros na realização de uma atividade matemática: 1) obtenção da informação; 2) processamento da informação; 3) retenção da informação; e 4) reprodução da informação. Neste pressuposto, aquele autor sugere as seguintes cinco classes na definição de um modelo de agrupamento dos erros:

1. Erros devido a dificuldades de linguagem (DL): quando há uma má interpretação de conceitos, símbolos e vocabulários usados num texto matemático, os quais se esperam que o aluno traduza para a linguagem natural, com vista a entender e a resolver a atividade matemática;
2. Erros devido a dificuldades em obter informação visual ou espacial (DIE): quando há uma representação icónica de situações matemáticas, seja através de representações gráficas ou esquemas geométricos, sendo o aluno incapaz de processar a informação (visual) contida nessa representação;
3. Erros devido a um domínio deficiente de pré-requisitos básicos (DD): quando há deficiências de algoritmos, procedimentos incorretos na aplicação de técnicas matemáticas ou conhecimento insuficiente de conceitos primários, impedido o aluno de realizar com sucesso a atividade matemática;
4. Erros devido a associações incorretas ou inflexibilidade de raciocínio (All): quando há um viés ou inflexibilidade de raciocínio que resulta de manter o mesmo pensamento ou estratégia inicial sendo o aluno incapaz de considerar uma nova estratégia, por vezes mais simples, de processar a informação ou de encontrar a solução;
5. Erros devido à aplicação de regras ou estratégias desnecessárias (AED) quando o aluno aplica sistematicamente o mesmo tipo de estratégia inicialmente adotada sob diferentes contextos e tal procedimento não se justifica, por ser inócuo no processo de resolução.

Esta classificação de erros constitui o referencial teórico em que se fundamenta o presente estudo para a deteção de padrões subjacentes aos erros cometidos por alunos do 8.º ano de escolaridade em tópicos do programa de OTD desse ano de escolaridade (mediana, quartis e DEQ). É baseada nas causas que originam os erros, causas estas inerentes a mecanismos



de processamento da informação associados à realização de atividades matemáticas em contexto estatístico. Importa realçar que pode existir conjugação de possíveis causas para um mesmo erro devido à existência de interação próxima entre causas (Radatz, 1979).

## Adequação e limitação do referencial teórico

O modelo de classificação de Radatz possibilita um inventário dos erros em função de objetos teóricos reconhecidos em tópicos da Matemática. Esses objetos são a linguagem (erro DL), a representação gráfica (erro DIE), os conceitos e técnicas (erro DD), o raciocínio (erro All) e a estratégia (erro AED). Objetos similares, nomeadamente, *situações-problema*, *linguagem conceitos/definições*, *propriedades/proposições*, *procedimentos* e *argumentos* podem ser enumerados em outros modelos de análise de erros como seja o modelo ontosemiótico (GODINO, BATANERO & FONT, 2007), como considerado por Mayer *et al.* (2009) na análise de conflitos semiótico de alunos pré e universitários com o conceito de mediana. Assim, o modelo clássico (Cury 2007) de Radatz, originalmente utilizado em Álgebra, surge também adequado em tópicos de Estatística ou em qualquer outra área onde se reconheça a importância daqueles objetos na classificação de erros (e.g., em Geometria, realizado por Cordeiro, Friedmann & Silva (2011).

Neste trabalho, o modelo de Radatz é aplicado em atividades de Estatística, envolvendo os conceitos de mediana e quartis, segundo duas abordagens distintas, analítica e gráfica, no âmbito da disciplina de Matemática do 8.º ano de escolaridade e dentro do domínio OTD. Importa salientar que este estudo se limita a identificar os erros cometidos e causas inerentes através da produção escrita da informação obtida, processada, retida e reproduzida pelos alunos sobre aqueles tópicos.

## Conceitos de mediana e quartil

A mediana é o valor que divide ao meio a coleção de dados ordenados. Duas situações diferentes podem ocorrer quanto à dimensão da coleção de dados, como alerta o descritor 1.1 OTD7.1.2. das Metas Curriculares do Programa de Matemática do ensino básico (Bivar *et al.*, 2013b): no caso de a amostra ter um número ímpar de elementos, haverá apenas um valor central, correspondendo à mediana da distribuição; no caso da dimensão da amostra ser par, há dois valores centrais, pelo que a mediana corresponde à média aritmética desses dois valores. Decorre desta definição, que a mediana nem sempre pertence à amostra. Quando a dimensão da amostra é par, apenas se obtém um valor igual a alguma das observações caso os dois valores centrais sejam iguais.

Uma definição mais formal do conceito de mediana pode ser encontrada em livros da especialidade. Pestana e Velosa (2002), por exemplo, apresentam a definição de mediana em termos das estatísticas ordinais. Concretamente, sendo  $x_{(i)}$  a estatística ordinal de ordem  $i$ , i.e., para uma amostra de dimensão  $n$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , tem-se  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(i)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , e define-se a mediana da amostra dada por:



$$Mediana = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & , se \ n \ \acute{e} \ \acute{i}mpar \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & , se \ n \ \acute{e} \ par. \end{cases}$$

No Programa de Matemática do ensino básico, os primeiro e terceiro quartis são calculados aplicando a definição de mediana, separadamente, à primeira e à segunda metade da distribuição, respetivamente (cf. descritores OTD8.1.1 e OTD8.1.2 em *Bivar et al.*, 2013b). Concretamente, numa coleção de dados ordenados, o primeiro (terceiro) quartil é o valor mediano dos dados que ficam à esquerda (direita) da mediana. Contudo, este processo de cálculo dos quartis, adaptado para o ensino básico (conhecido por alguns autores como método exclusivo porque a mediana é excluída das duas metades da amostra), não é universalmente aceite (*Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo*, 2013a). Existem outros algoritmos de cálculo. Por exemplo, o método inclusivo, onde a mediana é incluída nas duas metades da amostra.

Diferentes algoritmos de cálculo dos quartis podem estar implementados em diferentes ferramentas informáticas (e.g., a folha de cálculo EXCEL) conduzindo a distintos resultados (*Bivar, et al.*, 2013a). Diversos autores têm reportado a existência de várias fórmulas (nem sempre equivalentes) para a obtenção dos quartis e as dificuldades dos alunos no cálculo e interpretação destes. Por exemplo, *Langford* (2006) referencia quinze métodos diferentes para calcular quartis de dados com poucas ou nenhuma repetição e prova que destes, apenas sete são diferentes, embora não especifique qual deles é o "melhor". *Fernandes e Pinto* (2014) comparam as fórmulas do cálculo dos quartis usadas nos ensinos básico e secundário com as fórmulas usadas no ensino superior e defendem uma proposta de uniformização do cálculo dos quartis em todos os níveis de ensino. *Makkonen e Pajari* (2014) estudam o cálculo dos quartis em dados agrupados, usando o inverso da função de frequências relativas acumuladas e concluem que este método é o mais eficiente para encontrar os estimadores dos quartis da população. *Freitas, Cruz e Silva* (2017) focam-se na interpretação da mediana em dados não agrupados, analisando a existência de valores repetidos na coleção. Dada esta diversidade de fórmulas, torna-se importante estar alerta e consciente dos propósitos de cada uma, evitando que se instale alguma confusão.

## A mediana e os quartis nos manuais escolares

Para averiguar como os conceitos de mediana e quartis são apresentados atualmente aos alunos, foi realizada uma breve análise de manuais escolares atuais. É consensual que os manuais escolares assumem um papel fundamental na aprendizagem dos alunos exercendo funções de orientação no estudo. Para *Rego, Gomes e Balula* (2010), o manual escolar é o primeiro recurso educativo numa sociedade em que se busca um acesso generalizado a uma educação de qualidade.



Analisando cinco manuais escolares do 8.º ano, quatro apresentam o capítulo referente ao domínio OTD (este contempla a introdução do conceito de quartil e a construção do DEQ) como o último capítulo de um segundo volume do manual, sendo o conceito de quartil introduzido após uma tarefa inicial orientada. No quinto manual analisado, a abordagem aos quartis aparece como o primeiro tema do segundo volume a ser lecionado. Naqueles cinco manuais, a regra de cálculo dos quartis apresentada segue o método exclusivo, havendo apenas um manual onde os seus autores referem a existência de vários outros métodos de determinação dos quartis. Examinaram-se também cinco manuais escolares do 7.º ano, das editoras correspondentes aos manuais do 8.º ano analisados, constatando-se novamente que em quatro deles, o capítulo referente ao domínio OTD (o qual contempla o conceito de mediana) aparece como o último capítulo e portanto, quase certamente, o último a ser transmitido aos alunos. Comparando a forma como a definição de mediana é apresentada, conclui-se ser bastante semelhante em quatro dos manuais analisados, sendo introduzida a interpretação do conceito de mediana através de um exercício concreto já resolvido. No quinto manual escolar do 7.º ano analisado, observa-se que os autores, antes de apresentarem a forma como se calcula a mediana, apresentam a interpretação do conceito de mediana e, após introduzir a definição, comparam a posição relativa da mediana e da média.

Importa referir que os cinco manuais escolares escolhidos, relativos a cada ano de escolaridade, representam mais de 50% das adoções das escolas portuguesas, para cada um daqueles anos de escolaridade (fonte: Ministério da Educação, 2017). Globalmente, Figueiredo (2017) assinala existir uma grande homogeneidade nos manuais escolares portugueses em termos de abordagem à mediana e aos quartis.

### **Dificuldades nos conceitos de mediana e quartil**

Na obtenção do valor da mediana, a principal dificuldade parece prender-se com o facto do algoritmo do seu cálculo não ser único (Batanero, 2000), dependendo do tipo de dados, da forma como estão apresentados e o seu número de elementos. Carvalho (2001) lista um conjunto de procedimentos que conduzem aos principais erros no cálculo da mediana, nomeadamente, o facto de os alunos não ordenarem os dados (o que significa que, para eles, a mediana será o valor central dos dados conforme lhes são apresentados), de não terem em consideração o valor da frequência absoluta de cada observação quando estes são apresentados na forma de tabela, e ainda, de confundirem as medidas calculando a média em vez da mediana. Outras dificuldades prendem-se com a estimação do valor da mediana quando os dados lhes são apresentados num gráfico (Schuyten, 1991) ou ainda de confundir a mediana com a metade da amplitude dos dados (Barros, 2003).

Segundo Boaventura e Fernandes (2004), os alunos tendem a saber a definição de mediana, no entanto, não conseguem interpretar o seu significado. Num estudo realizado a 113 alunos universitários, de diferentes cursos, envolvendo conteúdos de moda, média, mediana e desvio-padrão, Bayer (2011) constatou que a maior incidência de erros ocorre na interpretação. Fernandes, Carvalho e Correia (2011) salientam a persistência nos mesmos tipos de erro em diferentes níveis de escolaridade.



Relativamente a dificuldades inerentes ao conceito de quartil, os estudos são escassos e aqueles que existem incidem na construção e interpretação de DEQ. Num estudo realizado com 259 alunos do 6.º e 8.º anos, Edwards, Özgün-Koca e Barr (2017) concluíram não haver dificuldades em extrair informação sobre a identificação de qualquer dos cinco valores (mínimo, primeiro quartil, mediana, terceiro quartil e máximo) subjacentes à construção de qualquer DEQ mas há dificuldade a nível da interpretação da informação contida num DEQ. Esta dificuldade poderá advir, por um lado, da dificuldade, reconhecida, em interpretar, raciocinar e ler representações estatísticas (e.g., Friel, Cursio & Bright, 2001), mas, por outro lado, também de interpretar os valores identificados para a mediana e quartis. Noutro estudo realizado numa turma de 23 alunos, Carvalho, Freitas e Fernandes (2017) constataram também que a construção de DEQ se apresenta menos difícil do que a sua interpretação sendo, contudo, a determinação dos quartis onde se registam mais erros. Tal não surpreende pois, o cálculo dos quartis obriga à aplicação do algoritmo do cálculo da mediana das partes à esquerda e à direita da mediana. Consequentemente, é lícito esperar que o conceito de quartil sofra das dificuldades inerentes ao cálculo e interpretação da mediana.

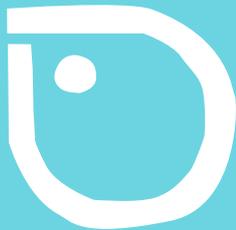
## Metodologia

A fim de analisar os conflitos e associações entre dificuldades que alunos do 8.º ano de escolaridade realizam no cálculo e interpretação da mediana e dos quartis, desenvolveu-se um estudo empírico que persegue como principal objetivo averiguar a existência de interligações entre dificuldades manifestadas pelos alunos na obtenção dos valores da mediana e dos quartis e na análise desses valores perante a alteração de um dado, quando estes são fornecidos sob a forma extensiva, por uma coleção de valores numéricos, ou graficamente por meio de um DEQ.

## Opções metodológicas

Foi aplicada, a alunos do 8.º ano de escolaridade, uma prova de avaliação com questões envolvendo o cálculo e interpretação da mediana e quartis e a leitura e interpretação de DEQ. As respostas dadas foram comparadas com o referencial assumido como resposta correta e identificados os erros cometidos nas respostas não corretas. O conteúdo de uma resposta correta foi definido com base nos objetivos predefinidos nos descritores do domínio OTD do Programa e Metas Curriculares de Matemática para o 8.º ano de escolaridade (Bivar *et al.*, 2013b). Nesta investigação é usada uma amostra de conveniência, com o objetivo de identificar características das respostas erradas dadas por alunos pertencentes a uma escola particular de ensino onde é habitual os alunos apresentarem um bom desempenho nas provas nacionais de Matemática do 9.º ano.

O registo dos erros foi realizado para cada questão/alínea da prova. Para investigar os procedimentos usados pelos alunos nas suas respostas optou-se por uma análise documental (Bardin, 2009) e classificação dos erros como metodologia de investigação. Assim, a parte



inicial deste trabalho de investigação, realizada pela segunda autora e discutida com a primeira, insere-se numa perspetiva qualitativa, com uma abordagem interpretativa (Tesch, 1990) das respostas dadas pelos alunos na prova escrita, com vista a classificar como certa ou errada cada resposta dada, obter uma explicação de padrões cognitivos que justifiquem o erro realizado e, assim, identificar o mecanismo de processamento da informação que causou o erro. Seguidamente, analisando os erros detetados nas respostas dos alunos participantes neste estudo, investigam-se possíveis associações entre o desempenho dos alunos no cálculo e interpretação das medidas em causa. Foi também contabilizado cada tipo de erro ou conflito identificado. Assim, esta segunda parte do trabalho insere-se numa perspetiva quantitativa e foi realizada por todas as autoras.

## Participantes

O estudo adota, como sujeitos de pesquisa, 81 alunos que frequentavam o 8.º ano de escolaridade, no ano letivo 2015-2016, pertencentes a três turmas de uma escola de ensino particular. A escola tem regime de contrato de associação (*i.e.*, com gestão privada mas financiada e com regras definidas pelo Ministério da Educação). Esta situa-se num centro urbano de uma capital de distrito, e com corpo discente composto por alunos provenientes dos mais heterogéneos meios económicos e socioculturais da cidade e áreas adjacentes. As três turmas tiveram professoras de Matemática diferentes. **Ambas as turmas possuíam um desempenho muito semelhante e bastante bom** na disciplina de Matemática, como o comprova o resultado médio de 82% obtido na prova final de Matemática por esses alunos, no 9.º ano, no ano letivo seguinte 2016-17. Os alunos que participaram no estudo apresentavam, na altura, idades dos 13 aos 15 anos, com idade média de 14 e desvio padrão 0,49 anos, sendo que a maioria deles eram do sexo masculino (57% - 46 alunos).

## Instrumento

Com vista a identificar as eventuais dificuldades dos alunos, para instrumento de recolha de dados, foi elaborado pela segunda autora um conjunto de questões, em formato de prova de avaliação. Esta prova não foi inserida no processo avaliativo escolar dos alunos tendo sido realizada após o processo avaliativo concluído. A prova era composta por dezassete alíneas, agrupadas em quatro questões, com perguntas envolvendo o cálculo e interpretação de mediana e quartis e a interpretação do DEQ. Duas alíneas foram eliminadas do estudo porque as suas respostas eram conseqüentes dos objetivos pretendidos neste trabalho. As quinze alíneas analisadas estão distribuídas conforme reporta a Quadro 1. Houve a preocupação de apresentar situações-problema similares aos existentes nos manuais escolares dos 7.º e 8.º anos de escolaridade. Para diversificar o tipo de questões na prova, a questão 3 foi de escolha múltipla com uma opção certa entre quatro. Assim, neste estudo, os dados correspondem aos documentos escritos produzidos pelos alunos, em contexto escolar, junto dos seus docentes titulares de turma.



**Quadro 1: Objetivos das questões contidas na prova distribuídas por tópico, por abordagem (analítica no uso de fórmula de cálculo ou gráfica por leitura do DEQ) e por objetivo (identificação de medidas ou análise de alterações).**

Tópico	Uso de fórmula de cálculo		Leitura do DEQ	
	Identificação	Análise de alterações	Identificação	Análise de alterações
Mediana	q1: Obter a mediana de uma coleção não ordenada de dados com um número ímpar de dados.	q2b-d: Analisar a mediana após alteração de uma observação na coleção original de dados.	----	---
	q3: Obter a mediana e esta não pertencente à coleção de dados.	----	----	----
Mediana e quartis	q2a: Obter a mediana e os quartis de uma coleção ordenada de dados com um número par de dados.	----	q4a i)-iii): Indicar medidas estatísticas através de um DEQ.	q4b i)-vi) Analisar medidas estatísticas, visíveis num DEQ, após alteração pontual de dados.

## Procedimento

Previamente foi solicitada e concedida autorização da Direção Pedagógica da escola sobre a participação dos alunos das três turmas do 8.º ano e a recolha de dados. Seguidamente, a segunda autora realizou uma reunião com as três docentes titulares das turmas que iriam aplicar a prova, para que se inteirassem dos principais objetivos do trabalho de pesquisa e do conteúdo da prova. Tendo por base o acompanhamento escolar na disciplina de Matemática dos alunos participantes nos dois últimos anos escolares (7.º e 8.º), as docentes referiram que as três turmas tinham um desempenho muito semelhante e bastante bom na disciplina; mais ainda, consideraram que a prova estava adequada aos seus alunos. As docentes resolveram previamente a prova a fim de evitar gralhas, inadequação de linguagem ou de conteúdo e nível de exigência inapropriado para algum grupo/turma, não tendo sido sugeridas alterações. Foi então combinado o dia e hora para a realização da prova das três turmas, em simultâneo e durante uma aula de Matemática de 50 minutos,



como se de uma prova de avaliação normal se tratasse. A prova foi aplicada no final do 3.º período letivo, após uma ficha de avaliação diagnóstica sobre OTD e sua correção. Não foram prestados esclarecimentos aos alunos durante a realização da prova. Todos os alunos resolveram a prova em tempo inferior à duração da aula (cerca de 30 minutos). Saliente-se que o objetivo da aplicação desta prova foi a recolha de informação/dados sobre o conhecimento dos alunos nos tópicos mediana, quartis e DEQ. A realização da prova correspondeu a uma atividade adicional, não avaliativa, no contexto do processo escolar dos alunos. O ponto em comum dos dados é provirem de alunos de um único estabelecimento de ensino onde o programa geral de Matemática lecionado é articulado previamente entre as docentes titulares das turmas em reuniões departamentais. As respostas dos 81 alunos participantes a esta prova foram corrigidas pela segunda autora.

## **Análise de dados**

Numa primeira fase procedeu-se a uma análise de conteúdo e de interpretação de raciocínios subjacentes a cada resposta, tendo por base comparativa a resposta correta expectável. O propósito foi categorizar a qualidade das respostas dadas em três classes. Cada resposta que, de forma explícita, continha os parâmetros de referência esperados foi classificada como Correta (C). Cada resposta deixada em branco foi classificada como Não Respondeu (NR). As restantes respostas foram classificadas como Incorretas (I).

As respostas dentro da classe I, nas catorze alíneas de resposta aberta, foram sujeitas a uma análise documental. Para cada resposta (independentemente da resolução envolver fórmula ou gráfico) foi identificada a(s) parte(s) que estabeleciam correspondências incorretas nos conceitos ou procedimentos ou que não estavam de acordo com o previsto pelo professor. Os erros assim identificados foram organizados numa tabela. Cada tipo de erro foi classificado pela primeira autora em função dos pressupostos descritos no modelo de classificação proposto por Radartz (1979).

As respostas dentro das classes de resposta NR, I, C foram contabilizadas nas quinze alíneas e construídas tabelas de contingências para pares de alíneas, conforme esquematizado na Figura 1, com vista a avaliar os níveis de associação entre:

- (1) a identificação e a análise de medidas perante a alteração de uma observação, via analítica (*i.e.* usando fórmulas);
- (2) a identificação de medidas via analítica e via gráfica (*i.e.*, a partir da leitura de um DEQ) ;
- (3) a análise de medidas perante a alteração de um dado, via analítica e via gráfica;
- (4) a identificação e a análise de medidas perante a alteração de um dado, via gráfica.

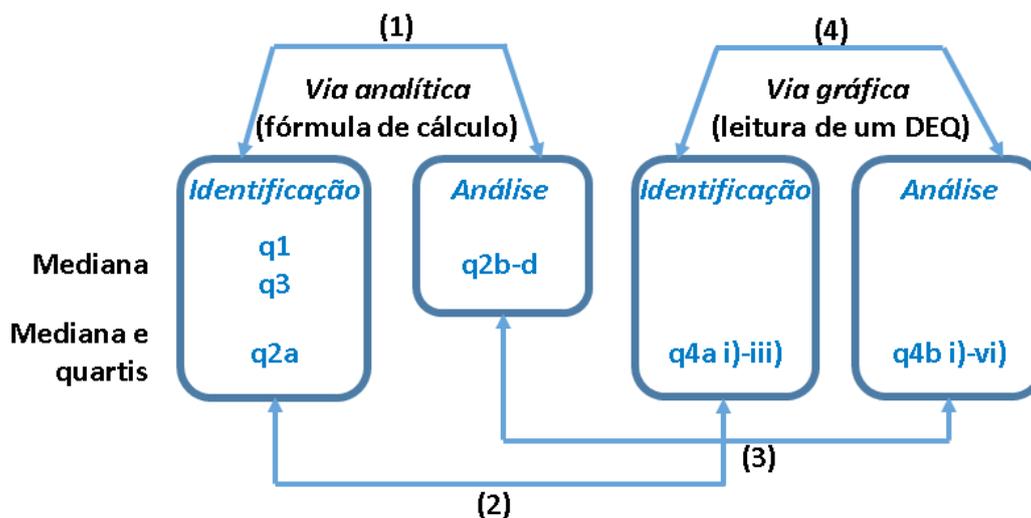


Figura 1. Esquema dos quatro modelos de cruzamentos considerados no estudo da associação.

Para a análise de associações em pares de questões de interesse (Figura 1) procedeu-se ao cálculo do coeficiente de associação V de Cramer (Murteira, Ribeiro, Silva & Pimenta, 2010). A escolha deste coeficiente justifica-se pelo facto da resposta a cada questão ser categórica/nominal com 3 atributos possíveis (C, I e NR). O coeficiente V de Cramer toma valores entre 0 e 1. Valores próximos de 0 (1, respetivamente) correspondem a uma associação mais fraca (forte, respetivamente). Assumindo que as respostas dos 81 alunos participantes neste estudo podem ser representativas das características do universo de respostas de alunos naquelas condições (*i.e.*, alunos do 8.º ano de escolas particulares sujeitas ao mesmo programa imposto pelas Metas Curriculares instituídas pelo ME), efetuaram-se ainda testes estatísticos do qui-quadrado para avaliarem as significâncias das associações estabelecidas por aquele coeficiente (Murteira *et al.*, 2010). Há associação estatisticamente significativa quando o valor de prova  $p$  do teste é inferior ao nível de significância  $\alpha=0.05$ . Todas as análises quantitativas foram realizadas com recurso ao *software* IBM SPSS Statistics 23.

## Resultados e discussão

### Categorização das respostas

As Tabelas 1-3 contêm as contabilizações dos tipos de respostas. No uso de fórmulas no cálculo da mediana e dos quartis, constata-se ser a questão q2a, de resposta aberta, onde os dados surgem em número par, a que produziu o pior desempenho, com apenas 56% de alunos a responder corretamente (Tabela 1). Em contrapartida, na questão de escolha múltipla q3, onde os dados surgem também em número par e onde se pretendia averiguar se os alunos



tinham a noção de que o valor da mediana nem sempre pertence ao conjunto de dados, foi a questão com melhor desempenho entre as questões onde a coleção de dados era explicitamente fornecida (q1, q2, q3). Em q3, a opção errada mais escolhida correspondeu a confundir a mediana com o valor máximo da amostra. Ao analisar, mais à frente, os erros cometidos (Quadro 2), verifica-se que o erro mais frequente em q2b foi considerar  $n$  ímpar, erro este que não foi tomado em conta na construção das três opções erradas na q3, o que pode justificar ser a questão com mais respostas corretas. Nas questões q2b-q2d, de alterações de dados, embora se esperasse uma resposta quase imediata pela análise da invariabilidade ou não da mediana com as alterações introduzidas, tendenciosamente assiste-se a um recálculo da mediana nas novas condições. Tal facto denuncia que os alunos não foram capazes de estender os seus conhecimentos a novas situações, recorrendo desnecessariamente ao uso de fórmulas e, por outro, o seu deficiente domínio sobre as propriedades de invariabilidade da mediana sob certas alterações dos dados iniciais.

**Tabela 1. Frequências dos tipos de respostas observadas nas três primeiras questões.**

Respostas	Questões sobre identificação e análise de medidas via analítica					
	q1 certa=8	q2a certa=12	q2b certa=28	q2c	q2d	q3
NR	4 (5%)	2 (2%)	3 (4%)	1 (1%)	1 (1%)	1 (1%)
Corretas	69 (85%)	45 (56%)	57 (70%)	69 (85%)	67 (83%)	72 (89%)
Incorretas	8 (10%)	34 (42%)	21 (26%)	11 (14%)	13 (16%)	8 (10%)

Na questão q4a (Tabela 2), associada à identificação da mediana e dos quartis a partir de um DEQ, constata-se que quase 20% de alunos falham pelo menos uma alínea sendo a alínea q4a ii) onde se observa, comparativamente, um número (ligeiramente) menor de respostas corretas.

**Tabela 2. Frequências dos tipos de respostas observadas na questão q4a.**

Resposta	Questões sobre identificação de medidas via gráfica (DEQ) (((DEQ(DEQ		
	q4a i) certa=8	q4a ii) certa=12	q4a iii) certa=28
NR	4 (5%)	4 (5%)	4 (5%)
Corretas	67 (83%)	61 (75%)	68 (84%)
Incorretas	10 (12%)	16 (20%)	9 (11%)

Na questão q4b (Tabela 3), associada à interpretação da mediana num DEQ perante uma alteração de dados (detalhes da alteração introduzidas, ver Quadro 2), constataram-se



muitas dificuldades sendo esta questão a que apresenta maior número de respostas incorretas, com percentagens de respostas corretas abaixo dos 50% em quase todas as alíneas. Este facto evidencia que os alunos apresentam dificuldades de processamento da informação espacial e incapacidade, por essa via, de detetar o efeito sobre a mediana de uma alteração nos dados.

**Tabela 3. Frequências dos tipos de respostas observadas na questão q4b.**

Questões sobre análise de alterações via gráfica (DEQ)						
Resposta	q4b i)	q4b ii)	q4b iii)	q4b iv)	q4b v)	q4b vi)
NR	3 (4%)	5 (6%)	2 (2%)	6 (7%)	4 (5%)	4 (5%)
Correta	34 (42%)	47 (58%)	29 (36%)	34 (42%)	32 (40%)	40 (49%)
Incorreta	44 (54%)	29 (36%)	50 (62%)	41 (51%)	45 (56%)	37 (46%)

Analisando globalmente as Tabelas 1-3, é manifesto que, embora muitos alunos tenham demonstrado um desempenho bastante satisfatório a nível da aplicação mecânica dos conceitos, no cálculo da mediana e dos quartis usando fórmulas (q2, q2, q3) persistem quase maioritariamente muitas dificuldades a nível da análise da variabilidade da mediana e em situações de alteração de um dado num DEQ (q4b).

### Identificação e classificação dos erros

No Quadro 2 encontram-se listados, sumariamente, os erros detetados, nas respostas incorretas, e suas classificações tendo em conta as causas que os originaram. A identificação e classificação dos erros foi realizada e discutida pelas duas primeiras autoras, tendo recebido aprovação das restantes. Na Figura 2 são ilustrados dois exemplos de respostas com erros e respetiva classificação dada.

**Quadro 2. Classificação dos erros. Entre parêntesis, o número de respostas de cada conflito.**

Questão	Classificação do erro e conflito associado (n)	
q1	DD	Não ordena os dados (4)
	DD	Calcula a mediana como se n fosse ímpar (2)
	DL/All	Confunde a mediana com a média (2).
q2a	DD	Calcula a mediana como se n fosse ímpar (14)
	DD	Não conclui o algoritmo no cálculo da mediana (10)
	DD	Calcula o primeiro quartil como se n da parte esquerda da mediana fosse ímpar (5)
	DD	Indica um valor errado para a mediana sem justificação (3)
	DL/All	Confunde a mediana com a média (1)



	DD/AII	Calcula a mediana como a média de alguns valores (1)
q2b	DD	Não entende alteração de valor mínimo na mediana (9)
	DL/AII	Confunde a mediana com a média (2)
	DD	Recalcula a mediana como se n fosse ímpar (4)
	DD	Não conclui o algoritmo no cálculo da mediana (3)
	DD	Não conclui o algoritmo no cálculo dos quartis (3)
q2c	DD	Não entende alteração na mediana ao acrescentar um valor, que será o novo máximo (6)
	DL/AII	Confunde a mediana com a média (4)
	AII	Recalcula a mediana como se n fosse par (1)
q2d	DD	Não entende alteração na mediana ao acrescentar um valor que será o novo mínimo (10)
	DL/AII	Confunde a mediana com a média (2)
	AII	Recalcula a mediana como se n fosse par (1)
q4a	DIE	Não entende a divisão da escala numérica (10)
	DIE/DD	Assinala, sem justificação, valor errado para o primeiro quartil (5), para a mediana (4) e para o terceiro quartil (7)
	DD	Confunde o terceiro quartil com o máximo (2)
	DD/AII	Confunde a mediana com uma média (1) e com um intervalo de valores (1)
q4bi)	DIE	Não entende alteração de um valor superior ao 3.º quartil (44)
q4bii)	DIE	Não entende alteração de um valor inferior ao 1.º quartil (29)
q4biii)	DIE/DD	Não entende alteração de um valor igual à mediana (50)
q4biv)	DIE	Não entende alteração do valor mínimo (41)
q4bv)	DIE	Não entende alteração do valor máximo (45)
q4bvi)	DIE	Não entende alteração de valor entre mediana e 3.º quartil (37)

Do Quadro 2 constata-se que, nas questões usando fórmulas (q1, q2), as causas mais frequentes corresponderam a domínio deficiente (DD) de conhecimentos nos tópicos mediana e quartis; Nas questões envolvendo o DEQ (q4), as causas dos erros mais frequentes corresponderam a incapacidade dos alunos de extrapolar informação visual e espacial (DIE) daquela representação dos dados. Na generalidade, os tipos de erros detetados no cálculo da mediana e dos quartis, encontram-se bem documentados na literatura. Os erros identificados a nível da extração da informação de um DEQ denunciam bastantes fragilidades, havendo porém menos investigação.



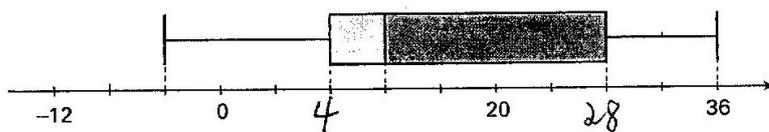
2. Considera o seguinte conjunto de dados:

8	10	11	12	12	13	13	15	15	16
---	----	----	----	----	----	----	----	----	----

a) Qual o valor da mediana, do 1.º e do 3.º quartis da distribuição dos dados?

Mediana = ~~10~~ <sup>13</sup>  
8 10 11 12 12 13 13 15 15 16

4. O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano.



a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efetuando cálculos sempre que necessário, indica:

i.  $Q_1 = 4$

ii. Mediana.  $= \frac{-4 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36}{11} = \frac{184}{11} \approx 17 //$

iii.  $Q_3 = 28$

iv. A amplitude interquartil.  $= 28 - 4 = 24 //$

Figura 2. Exemplos de respostas com erros. Na q2a), com  $n=10$  dados, um aluno calcula a mediana como se  $n$  fosse ímpar (Erro DD). Na q4a), um outro aluno confunde a mediana com uma média (Erro DD/All).

## Análise quantitativa de associações

Na Tabela 4 encontram-se os valores do coeficiente de associação V de Cramer (VC) para distintos pares de questões envolvendo o cálculo e interpretação da mediana e quartis, dentro de cada um dos quatro modelos de cruzamento esquematizados na Figura 1, nomeadamente: (1): Identificação vs Análise (via analítica), (2): Via analítica vs Via gráfica (na identificação), (3): Via analítica vs Via gráfica (na análise), e (4): Identificação vs Análise (via gráfica). Os níveis de associação observados não são elevados, entre 0,096 a 0,471, denunciando associações



fracas a moderadas, com resultados maioritariamente não significativamente diferentes de zero (valor  $p > 0,05$ ).

**Tabela 4. Valores de VC entre questões. Entre parêntesis encontram-se os valores de prova p associados ao teste estatístico de existência de associação. A negrito estão os níveis de associação estatisticamente significativos (valor  $p < 0,05$ ).**

Questões	Análise via analítica			Identificação via gráfica		
	q2b	q2c	q2d	q4a i)	q4a ii)	q4a iii)
Identificação via analítica	(1)			(2)		
q1	<b>0,428</b> (0,000)	<b>0,358</b> (0,000)	<b>0,391</b> (0,000)	0,217 (0,105)	0,215 (0,112)	0,227 (0,079)
q2a	<b>0,414</b> (0,000)	0,181 (0,258)	<b>0,266</b> (0,022)	0,114 (0,715)	<b>0,252</b> (0,036)	0,130 (0,603)
q3	0,154 (0,425)	0,201 (0,161)	0,193 (0,196)	<b>0,244</b> (0,046)	<b>0,255</b> (0,032)	<b>0,250</b> (0,039)
Análise via gráfica	(3)			(4)		
q4b i)	0,210 (0,129)	0,110 (0,745)	0,149 (0,465)	<b>0,471</b> (0,000)	<b>0,465</b> (0,000)	<b>0,438</b> (0,000)
q4b ii)	0,073 (0,929)	0,205 (0,146)	0,231 (0,071)	0,226 (0,083)	<b>0,266</b> (0,022)	0,223 (0,090)
q4b iii)	0,086 (0,876)	0,163 (0,366)	0,123 (0,653)	<b>0,249</b> (0,040)	<b>0,248</b> (0,041)	<b>0,257</b> (0,030)
q4b iv)	0,119 (0,684)	0,151 (0,447)	0,201 (0,162)	<b>0,293</b> (0,008)	<b>0,277</b> (0,014)	<b>0,296</b> (0,007)
q4b v)	0,125 (0,638)	0,195 (0,185)	0,167 (0,338)	0,192 (0,201)	0,193 (0,197)	0,188 (0,221)
q4b vi)	0,199 (0,169)	0,096 (0,827)	0,212 (0,121)	<b>0,379</b> (0,000)	<b>0,382</b> (0,000)	<b>0,371</b> (0,000)

No modelo (3) não há evidência de associação estatisticamente significativa. Este resultado revela que, na análise da mediana perante uma alteração nos dados, não há associação entre o desempenho do aluno via analítica e via gráfica. Portanto, saber recalculer o valor da mediana perante a alteração de uma observação, numa coleção ordenada de dados e em dados descritos graficamente por meio de um DEQ, não está associado. Em contrapartida, nos restantes três modelos, (1), (2) e (4), existe associação significativa nalgumas situações (a negrito na Tabela 4) embora não seja evidente a existência de um padrão nas associações detetadas. Concretamente, pode conjecturar-se que existem associações significativas:



- no modelo (1), entre saber calcular o valor da mediana de uma coleção de dados não ordenados (q1) e analisar o valor da mediana perante uma alteração na coleção de dados iniciais (q2b-d), sendo essa associação mais forte quando a alteração corresponde à mudança do valor mínimo (q2b, VC = 0,428) do que quando se acrescenta um valor que será o novo mínimo da coleção (q2d, VC = 0,391);
- no modelo (2), entre a identificação da mediana numa coleção de dados ordenados (q2a e q3) e essa num DEQ (q4a ii)), sendo tais associações relativamente fracas (VC ligeiramente superiores a 0,250);
- no modelo (4), na interpretação de um DEQ, entre a identificação dos três quantis envolvidos nessa representação (q4a) e alguns tipos de alterações nos dados, nomeadamente quando envolvem a mudança do valor mínimo (q4biv)) e de um valor não extremo superior ou igual à mediana (q4bi,iii,iv)).

## Conclusões

De respostas dadas a uma prova proposta (Anexo), este trabalho evidenciou que, mesmo após a avaliação do domínio OTD (onde se espera um estudo consolidado por parte dos alunos), persistem erros em alunos do 8.º ano de escolaridade globalmente com bom desempenho a Matemática. Saliente-se que a informação das respostas escritas dos alunos foi recolhida usando um modelo ao qual os alunos estão habituados e sem qualquer tipo de intervenção pedagógica por parte das autoras, pelo que o *modus operandi* optado nesta investigação não interferiu na atividade cotidiana escolar do aluno.

Na tipologia de Radatz (1979), tais erros foram principalmente causados por domínio deficiente dos procedimentos algorítmicos no cálculo da mediana e quartis e por inability de alcançar visualmente informação contida num DEQ sobre a densidade dos dados aí representados. Contudo, embora o modelo de Radatz se tenha mostrado adequado na identificação das causas que os originam, poderá constituir uma limitação ao estudo pois não tem em conta a natureza específica da Estatística onde os tópicos mediana, quartis e DEQ estão inseridos.

Registaram-se associações fracas e moderadas entre desempenhos dos alunos nos procedimentos analíticos e gráficos de obtenção da mediana e dos quartis. Todavia, na análise da mediana perante uma alteração nos dados, o presente estudo sugere que os alunos se limitam à interpretação isolada de resultados obtidos via analítica e gráfica, não havendo evidência de associação entre o desempenho do aluno em situações envolvendo cálculos e situações envolvendo interpretação gráfica de um DEQ. Este facto é relevante na medida que sugere a falta de amadurecimento cognitivo dos alunos na relação daqueles conceitos. Hudson (1999) afirma que os alunos apresentam um "conhecimento isolado" no que respeita aos diferentes conceitos estatísticos, sendo capazes de calcular corretamente o que lhes é solicitado, mas incapazes de relacionar os resultados obtidos com o contexto da situação, ou aplicar esse conhecimento numa situação da vida real.



Na realidade, do conhecimento empírico das autoras, muitas vezes, a abordagem feita em OTD consiste apenas na transmissão e aplicação de fórmulas matemáticas, não sendo abordada a interpretação de valores obtidos no contexto da situação problemática, nem discutidas e comparadas diferentes perspetivas de um mesmo problema que potencie no aluno novas descobertas com a interligação dos resultados.

No caso particular dos DEQ, o uso da tecnologia (calculadoras gráficas ou aplicações em ambiente virtual) poderá ser uma boa estratégia didática na interpretação de DEQ pois poderá potenciar que os alunos interajam e testem diferentes variações que um DEQ sofre perante alterações nos dados. Todo este processo deverá ser acompanhado pelo professor, gerindo o tempo e proporcionando um bom ambiente de diálogo, partilha de conclusões e apelando ao sentido crítico dos alunos.

Também os manuais escolares são um aliado importante na formação de alunos e na melhoria dos seus resultados. Constatou-se que, em geral, o capítulo referente à OTD aparece como último e, portanto, com elevada propensão para ser também o último a ser lecionado. Este facto, aliado à persistência de erros acima referida, leva a questionar a influência da localização do capítulo OTD na envolvência de alunos e professores nos conceitos estatísticos e no espírito crítico de análise.

A pertinência destas questões sugere a extensão desta investigação a alunos com diferente desempenho escolar e à comparação de resultados.

## Agradecimentos.

As autoras agradecem aos revisores as questões levantadas que permitiram clarificar e melhorar a redação do artigo. Trabalho subsidiado por fundos portugueses através do CIDMA (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações) da Universidade de Aveiro e FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), dentro do projeto UID/MAT/04106/2013.

## Referências

- Bardin, L. (2009) *Análise de Conteúdo*. Edições 70, Lda. Lisboa,
- Batanero, C. (2000). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira. (Orgs.) *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp.31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. 25(4), 527-547. <https://doi.org/10.1080/0020739940250406>
- Barros, P. (2003). Os futuros professores do 2.º ciclo e a estocástica – Dificuldades sentidas e o ensino do tema. *Coleção TESES*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática



- Bayer, A. (2011). Estatística no ensino médio: como tornar o desenvolvimento dos conteúdos mais interessante? *Atas do 3.º Congresso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo* (p. 654 -661).
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013a). Metas Curriculares do ensino básico – Matemática. *Caderno de apoio 3.º ciclo*. Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.C. (2013b). Programa e Metas Curriculares. *Matemática. Ensino básico*. Ministério da Educação e Ciência.
- Boaventura, M. G., & Fernandes, J. (2004). Dificuldades de alunos do 12.º ano nas medidas de tendência central: o contributo dos manuais escolares. *Em Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*.
- Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7.º ano*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa, Associação de Professores de Matemática.
- Carvalho, M.J., Freitas, A., & Fernandes, J.A. (2017). Construção e interpretação de diagramas de extremos e quartis por alunos do 8.º ano, Aceite nas *Atas do IV Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Vila Real, UTAD.
- Carvalho, C., & Cesar, M. (2001). Interagir para aprender: um caso de trabalho colaborativo em estatística. In SILVA, B. & ALMEIDA, L. (orgs.). *Atas do VI congresso Galaico-Português de Psicopedagogia*. V2. Braga: Centro de Estudos de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Cury, H. N. (2006). Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. *Em Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Águas de Lindoia, Brasil: SBEM.
- Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.
- De la Torre, S. (2007). Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed.
- Edwards, T. G., Özgün-Koca A., & Barr, J. (2017). Interpretations of Boxplots: Helping Middle School Students to Think Outside the Box. *Journal of Statistics Education*, 25(1), 21-28. <https://doi.org/10.1080/10691898.2017.1288556>
- Fernandes, J.A., Carvalho, C.F., & Correia, P.F. (2011). Contributos para a Caracterização do Ensino da Estatística nas Escolas. *Bolema*, 39, 585-606.
- Fernandes, S., & Pinto, M. (2014). Afinal, o que são e como se calculam os quartis? *Gazeta da Matemática n.º 174: Sociedade Portuguesa de Matemática* (pp. 34 -40). <http://hdl.handle.net/10400.1/2963>
- Figueiredo, T (2017). *Mediana e quartis: um caso de estudo das dificuldades de aprendizagem de alunos do 8.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro.
- Freitas, A., Cruz, J.P., & Silva, N. (2017). Mediana de dados não agrupados: a questão de ser pelo menos 50% em Educação em Matemática: *Revista da Associação de Professores de Matemática*.143, 18-21.
- Friel, S.N., Curcio, F.R., & Bright, G.W. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing



- Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*. 32(2), 124-158.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, Berlin-Heidelberg*, v. 39, n. 1-2, p. 127-135
- Hudson, I. (1999). University Students' Ability to Apply Statistical Procedures. *Journal of Statistics Education*. 7(1).
- Langford, E. (2006). Quartiles in Elementary Statistics. *Journal of Statistics Education*. 14(3).
- Makkonen, L., & Pajari, M. (2014). Defining Sample Quantiles by the True Rank Probability. *Journal of Probability and Statistics*. Article ID 326579.
- Martins, M. E., & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Lisboa. MEDGIDC.
- Mayén, S., Díaz, C., & Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal*. 8(2), 74-93.
- Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J., & Pimenta, C. (2010). *Introdução à Estatística*. Escolar Editora. Lisboa.
- Pestana, D. e Velosa, Sílvia F. (2002). *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Vol. 1, edição da Fundação Calouste Gulbenkian.
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 10(2), 163-172.
- Ramos, M.L. (2015). A importância da análise didática dos erros matemáticos como estratégia de revelação das dificuldades dos alunos. *REVEMAT*. 10 (1), 132-149.
- Rego, B., Gomes, C. A., & Balula, J. P. (2010). A avaliação e certificação de manuais escolares em Portugal: um contributo para a excelência. *Em Atas da AEPEC Da exclusão à excelência: caminhos organizacionais para a qualidade da Educação*. Évora: Universidade de Évora.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in Psychology and Education. In Vere-Jones (Eds) *Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics*. The Netherlands: International Statistical Institute.
- Tesch, R. (1990). *Qualitative Research, Analysis Types and Software Tools*. London: Routledge Falmer.

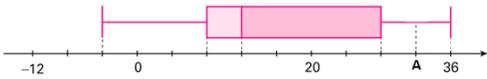


## Anexo

**Quadro A: Lista das questões da prova: enunciado e itens esperados na resolução por alínea.**

Questões	Itens a verificar na avaliação de uma resposta
<p>q1. Considera o seguinte conjunto de dados: 10 12 14 12 15 16 8 12 13 15 11 Indica o valor da mediana do conjunto de dados apresentado.</p>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Não confunde o conceito de mediana com o de média ou moda;</li><li>2. Mostra que, para calcular a mediana, é necessário colocar os dados por ordem crescente.;</li><li>3. Usa o algoritmo de cálculo da mediana quando <math>n</math> é ímpar na amostra ordenada;</li><li>4. Indica o valor 12 para a mediana.</li></ol>
<p>q2. Considera o seguinte conjunto de dados: 8 10 11 12 12 13 13 15 15 16 a) Qual o valor da mediana, do 1.º e do 3.º quartis da distribuição dos dados?  b) Qual o valor da mediana se o valor mínimo for alterado de 8 para 3? E do 1.º e 3.º quartis  c) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 17?  d) Qual o valor da mediana se for acrescentado ao conjunto de dados o valor 1?  e) Comenta os resultados obtidos nas alíneas c) e d).</p>	<p>a.1. Usa o algoritmo de cálculo da mediana, quando <math>n</math> é par, na amostra ordenada; a.2 Usa o algoritmo de cálculo dos quartis, quando <math>n</math> é par, na amostra ordenada; a.3. Indica os valores 11, 12.5 e 15 para 1º quartil, mediana e 3º quartil respetivamente. b.1. Infere (com ou sem recurso a formulas) a invariabilidade da mediana e dos quartis quando se altera o valor mínimo da coleção de dados; c.1 Usa o algoritmo de cálculo da mediana, quando <math>n</math> é ímpar, na amostra ordenada; c.2 Indica o valor 13 para a mediana após a alteração constatando que, neste caso, há variabilidade da mediana quando se acrescenta um valor à distribuição que altera o valor máximo da coleção de dados. d.1. Usa o algoritmo de cálculo da mediana, quando <math>n</math> é ímpar, na amostra ordenada; d.2 Indica o valor 12 para a mediana após a alteração constatando que, neste caso, há variabilidade da mediana quando se acrescenta um valor à distribuição que altera o valor mínimo da coleção de dados. e. (Eliminada da análise)</p>



<p>q3. Considera o seguinte conjunto ordenado de dados, onde <math>b</math> representa um número inteiro:</p> <p style="text-align: center;">1 2 2 7 <math>b</math> 8 9 9</p> <p>Qual dos seguintes valores pode ser a mediana do conjunto de dados? (A) 2 (B) 9 (C) 7,5 (D) 7,25</p>	<p>1. Opta pela opção (C)</p>
<p>q4. O diagrama de extremos e quartis seguinte representa as temperaturas, em graus Celsius, observadas numa cidade, durante um ano</p>  <p>a) Por observação do diagrama de extremos e quartis e efectuando cálculos sempre que necessário, indica:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>i) Q1</li><li>ii) Mediana</li><li>iii) Q3</li><li>iv) Amplitude interquartil</li></ul> <p>b) Houve uma incorreção no registo de uma temperatura, tendo essa que ser alterada. Faz a correspondência correta de cada uma das seguintes situações</p> <ul style="list-style-type: none"><li>i) "O registo que corresponde a <math>30^\circ</math> é, na realidade, <math>36^\circ</math>."</li><li>ii) O registo que corresponde a <math>0^\circ</math> é, na realidade, <math>4^\circ</math>."</li><li>iii) "O registo que corresponde a <math>12^\circ</math> é, na realidade, <math>8^\circ</math>."</li><li>iv) "Temperatura mínima."</li><li>v) "Temperatura máxima."</li><li>vi) "O registo que corresponde a <math>20^\circ</math> é, na realidade, <math>24^\circ</math>."</li></ul> <p>para uma das seguintes respostas:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- O diagrama mantém-se inalterado.</li><li>- O diagrama sofre necessariamente alterações</li><li>- O diagrama pode sofrer alterações.</li></ul>	<p>a. Identifica a localização do primeiro quartil (8), a mediana (12), o terceiro quartil (28). (Alínea iv) eliminada da análise a)</p> <p>b. Analisa a invariância dos quartis e da mediana, quando há alterações nos dados iniciais, indicando:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>i), ii), vi) O diagrama mantém-se inalterado;</li><li>iii) O diagrama pode sofrer alterações;</li><li>iv), v) O diagrama sofre necessariamente alterações.</li></ul>