Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

O cálculo de áreas: uma aplicação da engenharia didática no contexto das Olimpíadas de Matemática

The calculation of areas: an application of didactic engineering in the context of Mathematics Olympics

Ana Paula Rodrigues Alves Santos
Instituto Federal de educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará,Brasil
anapaularasantos@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de educação Ciência e Tecnologia do estado do Ceará,Brasil
fregis@ifce.edu.br

Resumo

Este artigo apresenta uma Engenharia Didática – ED desenvolvida no contexto do ensino das Olimpíadas de Matemática. O ambiente de aplicação envolveu uma turma olímpica de uma escola privada do Ceará-Brasil e contou com a participação de dois grupos de alunos. Foi desenvolvida uma situação didática olímpica – SDO – constituída de quatro itens envolvendo o cálculo de áreas de figuras planas. De modo específico, investigou-se o cálculo de áreas com o auxílio do software Geogebra com o intuito de identificar as categorias intuitivas de Fishbein no decorrer da aplicação na fase de experimentação da ED. Nesta investigação, a ED apresenta-se numa concepção de complementaridade que utiliza a teoria das situações didáticas – TSD na sua fase de experimentação. Os dados sistematizados na fase de análise a posteriori e validação interna indicam que: a identificação das categorias intuitivas (afirmativas, conjecturais e antecipatórias) não ocorrem de forma isolada, uma vez que estamos falando de processos mentais. Os alunos surpreendem -se com o estudo do cálculo de áreas, sem a necessidade do uso de fórmulas, mas com a observação e análise dos elementos matemáticos visualizados na modelização da SDO. Verificamos que há um eixo condutor para o estudo da congruência de triângulos e as propriedades dos quadriláteros que foram descritas pelos alunos. Os dois grupos manifestam dificuldades em sistematizar e formalizar suas conjecturas e os argumentos formulados nas fases iniciais de ensino previstas na TDS. Porém, destacamos o caráter imprescindível de mediação exercido pelo professor durante a fase de formulação. Observamos que o mediador utilizou a manifestação das intuições conjecturais e antecipatórias para que houvesse demonstrações e validações dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática; Engenharia Didática; Teoria das Situações; Categorias Intuitivas.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Abstract

This article presents a Didactic Engineering - ED developed in the context of the teaching of the Mathematical Olympiads. The application environment involved an Olympic group from a private school in Ceará-Brazil and was attended by two groups of students. It was developed an Olympic didactic situation - SDO - consisting of four items involving the calculation of areas of flat figures. Specifically, the calculation of areas with the aid of the Geogebra software was investigated in order to identify the intuitive categories of Fishbein during the application in the experimental phase of ED. In this investigation the ED was in a vision of complementarity that used the TDS in its phase of experimentation. Systematized data in the posterior analysis phase and internal validation indicate that: the identification of intuitive categories (affirmative, conjectura and anticipatory) does not occur in isolation, since we are talking about mental processes. The students are surprised by the study of the calculation of areas, without the need of using formulas, but with the observation and analysis of the mathematical elements visualized in the SDO modeling. We verified that there is a guiding axis for the study of the congruence of triangles and the properties of the quadrilaterals that were described by the students. The two groups manifest difficulties in systematizing and formalizing their conjectures and the arguments formulated in the initial phases of education foreseen in the TDS. However, we emphasize the essential character of mediation exercised by the teacher during the formulation phase. We observed that the mediator used the manifestation of conjectural and anticipatory intuitions so that there would be demonstrations and validations of mathematical concepts.

Keywords: Mathematical Olympiads; Didactic Engineering; Theory of Situations; Intuitive Categories

Resumen

Este artículo presenta una Ingeniería Didáctica - ED desarrollada en el contexto de la enseñanza de las Olimpiadas de Matemáticas. El ambiente de aplicación involucró a una clase olímpica de una escuela privada de Ceará-Brasil y contó con la participación de dos grupos de alumnos. Se desarrolló una situación didáctica olímpica - SDO - constituida de cuatro ítems involucrando el cálculo de áreas de figuras planas. De forma específica, se investigó el cálculo de áreas con la ayuda del software Geogebra con el intuito de identificar las categorías intuitivas de Fishbein durante la aplicación en la fase de experimentación de la ED. En esta investigación la ED fue en una visión de complementariedad que utilizó la TDS en su fase de experimentación. Los datos sistematizados en la fase de análisis a posteriori y validación interna indican que: la identificación de las categorías intuitivas (afirmativas, conjeturales y anticipatorias) no ocurren de forma aislada, ya que estamos hablando de procesos mentales. Los alumnos se sorprenden con el estudio del cálculo de áreas, sin la necesidad del uso de fórmulas, pero con la observación y análisis de los elementos matemáticos visualizados en la modelización de la SDO. Verificamos que hay un eje conductor para el estudio de la congruencia de triángulos y las propiedades de los cuadriláteros que fueron descritas por los alumnos. Los dos grupos manifiestan dificultades en sistematizar y formalizar sus conjeturas y los argumentos formulados en las fases iniciales de enseñanza previstas en la TDS. Pero destacamos, el carácter imprescindible de mediación ejercido por el profesor

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

durante la fase de formulación. Observamos que el mediador utilizó la manifestación de las intuiciones conjeturales y anticipatorias para que hubiera demostraciones y validaciones de los conceptos matemáticos.

Palabras clave: Olimpiadas de Matemáticas; Ingeniería Didáctica; Teoría de las Situaciones; Categorías Intuitivas

Introdução

As competições de matemática entre alunos vêm cada vez mais tomando espaço nas escolas brasileiras, estruturando-se e organizando-se, além de representar um excelente indicador de novos talentos para a ciência. Desse modo, uma atenção especial é concedida e direcionada para os alunos que possuem talento especial pelo estudo da matemática. Há um limite e uma restrição à participação de determinados alunos nas competições, a partir do momento em que observamos as ideias, o estilo e as características de abordagem da Matemática no interior das competições, direcionadas para um público seleto de estudantes. Sendo assim, destacamos uma restrição/limitação em relação ao público de estudantes beneficiados. Assumimos a necessidade imprescindível de proporcionar uma transposição didática ou, de modo simplificado, as alterações e modificações substanciais de situações ou conjunto de situações didáticas olímpicas (SDO) que permitam o alcance de um número maior de estudantes e, não apenas como ocorre atualmente, a participação ativa apenas dos estudantes cujo talento ou habilidades matemáticas se evidenciam.

Diante desse cenário, este artigo propõe uma alternativa planejada para trabalhar com turmas olímpicas compostas por alunos (8.º e/ou 9.º anos) – Nível 2 – conforme classificação da Olimpíada de Matemática Brasileira - OBM. Apresenta-se uma situação didática olímpica(SDO), na qual se utiliza como metodologia de ensino a teoria das situações didáticas (TSD) de Brousseau. A TSD foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986), pesquisador francês da Universidade de Bordeaux. Essa metodologia de ensino busca desenvolver um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o milieu (ou meio) no qual a aprendizagem deve acontecer. Ademais, a investigação descrita neste trabalho, tem como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (ED). A noção de engenharia didática surgiu na didática da matemática em França no início dos anos 1980. Segundo Artigue(1988), a ED vista como metodologia de pesquisa é caracterizada por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula (Almouloud, p. 17. 2007).

Destacamos que a proposta deste trabalho é apresentar uma SDO, na qual o aprendiz tem a oportunidade de vivenciar os quatro momentos dialéticos da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) modelizada pelo software Geogebra com o intuito de estimular o raciocínio intuitivo na resolução de problemas. Sendo assim, seguindo os pressupostos de Fischbein, identificamos as categorias intuitivas que são manifestadas pelos alunos no decorrer da resolução da SDO (categorias afirmativas, antecipatórias e conjecturais).

As próximas seções do artigo apresentam o percurso da pesquisa, desde o seu planeamento até à sua aplicação.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Contextualização Teórica

Este trabalho tem como objetivo geral desenvolver uma engenharia didática (ED) que permita a descrição de SDO envolvendo a construção e aplicação de conceitos referentes a geometria plana. Para alcançar este objetivo geral estabelece-se ainda os seguintes objetivos específicos: descrever uma ED sob o ponto de vista metodológico da teoria das situações didáticas (TSD), voltado ao ensino de olimpíadas de matemática; utilizar o software Geogebra como recurso tecnológico com o intuito de suscitar o raciocínio intuitivo na resolução das situações didáticas olímpicas (SDO).

No decorrer de todo o processo investigativo, ao planear o percurso da pesquisa, adota-se os pressupostos da ED como metodologia de pesquisa, a teoria das situações didáticas como metodologia de ensino e a teoria das categorias intuitivas de Fischbein para suscitar o raciocínio intuitivo dos alunos durante a resolução do problema com o auxílio do software Geogebra.

Os Elementos de Uma Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa adotada nessa investigação é a Engenharia Didática – ED. Conforme Artigue (1998), a ED vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental com base em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Recordamos que Artigue (1998, p. 243) afirma que:

> *"A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática no início dos anos 1980. E trata-se de classificar por este termo uma forma de trabalho didático; comparável ao do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre um conjunto de conhecimentos científicos do seu domínio, aceita se submeter a um controle do tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos mais complexos do que os objetos depurados pela ciência e assim, se debruça praticamente, com todos os meios pelos quais ele dispõe mesmo os problemas ainda não considerados pela ciência." (Artigue, 1998, p. 243)*

A pesquisadora (Artigue, 1988, p. 286) acentua características intrínsecas sobre a organização da ED, estabelecendo dois níveis de organização envolvidos na Engenharia, em termos de variáveis didáticas – micro-engenharia e macro-engenharia. A investigação em micro-engenharia se apropria das relações existentes nos fenómenos que ocorrem em sala de aula, portanto esse nível de investigação tem uma visão mais limitada. No segundo nível, depara-se com entraves/dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais, o que corresponde a uma visão mais ampla.

A nossa pesquisa enquadra-se numa micro-engenharia, que busca desenvolver uma ED no ensino das olimpíadas de matemática relativo ao conteúdo de geometria plana. Essa ED apresenta também variáveis macrodidáticas e variáveis microdidáticas. As variáveis macrodidáticas referem-se à organização global da ED, enquanto que as variáveis microdidáticas se apresentam especificadamente na fase da experimentação da ED.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Brousseau, Guy & Christol (2000, p. 3) recordam que realizar uma prática na área da Didática da Matemática, envolve evitar certos reducionismos e, que, é imprescindível uma sólida formação matemática, que permita uma compreensão, também, de outras teorias. E, no que concerne à atividade matemática, Brousseau (1986, p. 350) observa que "em Matemática, existe um acúmulo de conhecimentos e definições referentes a novos objetos e, a partir delas, podemos propor novos questionamentos". Vale ressaltar que a situação didática olímpica que será apresentada na fase de concepção de ED, envolve a interação dos alunos, do professor e do saber - triângulo didático mencionado por Brosseau – três pilares atinentes a um "inesperado" conceito matemático.

Por fim, a TSD possibilita a classificação de situações, envolvendo dialéticas de interação entre os sujeitos e o meio (milieu). Desse modo, observamos uma dialética ou situação de ação; uma dialética ou situação de formulação; uma dialética ou situação de validação, e por fim, uma dialética ou situação de institucionalização (ALMOULOUD, 2007, p. 38-39). Dessa maneira, passaremos à seção seguinte da ED.

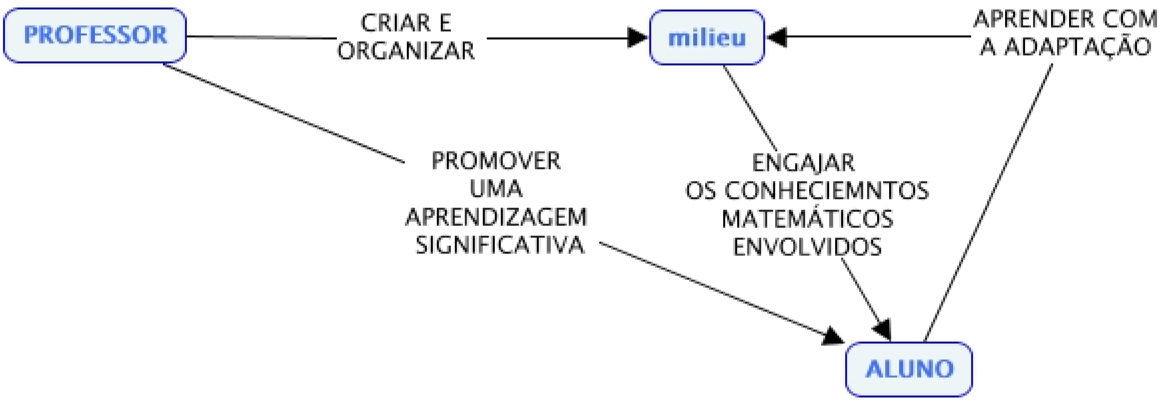


Figura 1. Alguns Preceitos da TSD

Análises Preliminares ou Prévias

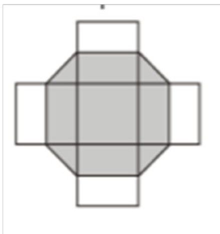
Segundo Artigue (1995a, p. 249-250), nesta etapa consideramos aspectos que permitem ao pesquisador alicerçar de forma sistemática a sua investigação, a saber: a análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino; a análise dos entraves/obstáculos no campo de ensino em que pretendemos realizar uma prática didática; a análise das concepções dos alunos e, por fim, a análise do ensino atual académico e dos seus efeitos. Convém evidenciar que todos os elementos anteriores levaram em consideração os objetivos desta investigação, relatados anteriormente. As análises preliminares foram realizadas mediante pesquisa em materiais didáticos, vídeos, e sites, buscando problemas relacionados com o cálculo de áreas de figuras planas. O objetivo deste levantamento bibliográfica foi encontrar situações problemas potencializadoras do conceito envolvendo nosso objetivo geral. Desenvolvemos, então, uma análise de conteúdo (BARDIN, 1979, p.95), restringindo-nos apenas à etapa de pré-análise, com a intenção de definir/discriminar a escolha dos livros e documentos pertinentes ao nosso estudo.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Nesta seção, evidenciaremos e identificaremos os elementos que se sobressaem a partir da proposta de abordagem de certos materiais didáticos tradicionalmente utilizados durante as aulas olímpicas, no que concerne ao cálculo de áreas direcionados ao nível 1(alunos do 7.º ano do Ensino Fundamental II). Exemplificaremos a seguir, três problemas selecionados do material didático disponível online pela plataforma do Portal da Matemática[1].

Dentro dos problemas que envolvem o cálculo de áreas, destacamos um problema extraído da OBMEP – 2006. Nesse sentido, observamos que a figura 2 apresenta um exemplo cuja resolução pode ser realizada sem o uso de fórmulas para o cálculo de áreas. Porém, constatamos que estão disponíveis duas resoluções na plataforma, a primeira apresentada com o uso de fórmulas, a segunda utilizando a decomposição de áreas, sendo esta uma resolução alternativa, mais simples e rápida.

Exemplo 1: Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm^2, qual a área do polígono sombreado?



a) 2

b) 2,5

c) 3

d) 3,5

e) 4

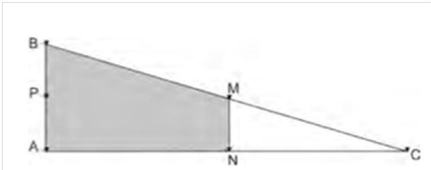
Figura 2. Problema abordado na plataforma do Portal da Matemática (OBMEP – 2006)

Prosseguimos com a análise do material e selecionamos outro exemplo (Figura 3), uma questão do ENEM- Exame Nacional do Ensino Médio – 2010.

1 O Portal da Matemática da OBMEP oferece gratuitamente e online, vídeos, aulas de matemática, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico, interativo e testes, dependendo do assunto.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Exemplo 2:



Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo (indicadas por letras)das seis estacas colocadas. A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calculada corresponde

a) à mesma área do triângulo AMC.

b) à mesma área do triângulo BNC.

c) à mesma área do triângulo AMC.

d) à metade da área formada pelo triângulo MNC.

e) Ao triplo da área do triângulo MNC.

Figura 3. Problema abordado na plataforma do Portal da Matemática (ENEM – 2010)

No que concerne o exemplo 2 (Figura 3), verificamos a apresentação de uma resolução semelhante ao exemplo 1, resolução através da fórmula do cálculo da área do triângulo e do quadrado. Logo após, apresentam outra resolução alternativa utilizando a decomposição de figuras planas. Este problema pode ser abordado ao nível 1 (6.º e 7.ºanos) e/ou nível 2 (8.º e 9.º anos) utilizando os casos de semelhanças de triângulos. Este é um ponto importante a salientar, em particular para alunos que se estão a preparar para as competições em matemática.

Após a análise inicial na etapa de pré-análise do material disponível no Portal da Matemática OBMEP concluímos que a equipa de professores procura mostrar resoluções alternativas, mais imediatas sem o uso de fórmulas. Desse modo, propõe ao estudante, uma variedade de problemas provenientes das provas de olimpíadas e ENEM que abordam temáticas semelhantes.

Recordamos, que o material do POTI (pólo olímpico de treinamento intensivo), na sua abordagem em relação ao cálculo de áreas, apresenta apenas o estudo a nível 2, como o módulo de relações entre áreas, apresentando carência no que concerne ao material destinado a alunos de nível 1.

Muniz Neto (2012), de forma semelhante ao material do POTI aborda o tema áreas das figuras planas propondo ao estudante, uma variedade de problemas que exigem demonstrações, com nível elevado, direcionados ao nível 2 (8º e 9º anos), como destacamos na figura 4.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Exemplo 3:

(OBM) Seja ABC um triângulo retângulo de área 1 m². Calcule a área do triângulo A'B'C', onde A' é o simétrico de A em relação a $\overleftrightarrow{BC}$, B' é o simétrico de B em relação a $\overleftrightarrow{AC}$ e C' é o simétrico de C em relação a $\overleftrightarrow{AB}$.

Figura 4. Exemplo abordado em Muniz Neto (2012, p. 240)

Destacamos que os autores Dolce & Pompeo (2005), contemplam a decomposição de figuras planas para o cálculo de áreas, propondo problemas que exigem do aluno correspondências entre os elementos matemáticos envolvidos como as principais cevianas, lados e ângulos, suscitando o entendimento do conceito de figuras equivalentes (Figura 5).

Exemplo 4: Qual a relação entre os retângulos hachurados da figura ao lado, se por um ponto P sobre a diagonal traçamos segmentos paralelos aos lados do retângulo ABCD?

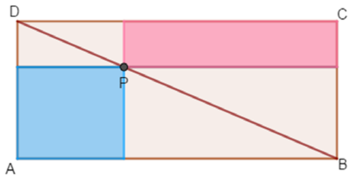


Figura 5. Exemplo abordado em Dolce & Pompeo (2005 p. 310)

Portanto, as abordagens descritas refletem a ausência de um elemento definidor para o estudo do cálculo de áreas – Geometria, e que não pode ser desconsiderado. Referimo-nos a ausência de uma modelização de situações estruturadas para o ensino de olimpíadas de matemática, planeadas de maneira sistemática. Tais situações devem mobilizar os raciocínios e os conhecimentos matemáticos ao longo de uma sequência didática, que permita a sua replicação e reprodução para um grupo ampliado de estudantes. Portanto, tendo em vista esse objetivo, apresentaremos na próxima seção uma SDO balizada nos pressupostos das dialéticas (ação, formulação, validação e institucionalização) estabelecidas por Brousseau (1986).

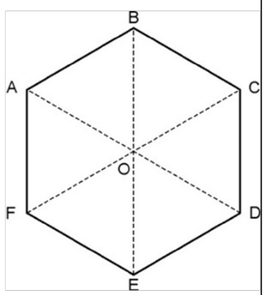
Concepção da SDO e Análise a Priori

Nesta fase, selecionamos e analisamos um problema da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas – OBM (Figura 6), para posteriormente realizarmos uma transposição didática para o software Geogebra (Figura 7). Como características fundamentais desta Situação Didática Olímpica, sublinhamos as seguintes: os alunos entendem facilmente os dados do problema e podem se engajar na situação; os conhecimentos dos alunos são insuficientes para a

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

resolução completa. Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos." (ALMOULOUD, 2007, p. 174). Por fim, na análise a priori, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever o comportamento dos alunos, conforme prevê Artigue (1995).

SDO – OBM 2015 (2.ª fase) - O hexágono regular *ABCDEF* e centro O, representado ao lado, é composto de seis triângulos equiláteros de área 6 cm² cada um.



a) Qual é a área, em cm², do triângulo cujos vértices são os pontos *B*, *F* e *D*?

b) Qual é a área, em cm², do quadrilátero *ACDF*?

c) Os triângulos *ABC* e *BCD* superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm², da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo?

d) Qual é a área, em cm², do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados *AB*, *CD* e *EF*?

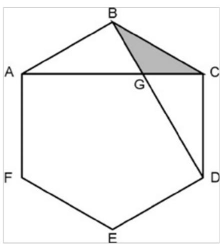


Figura 6. Problema selecionado da OBM (2015)

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

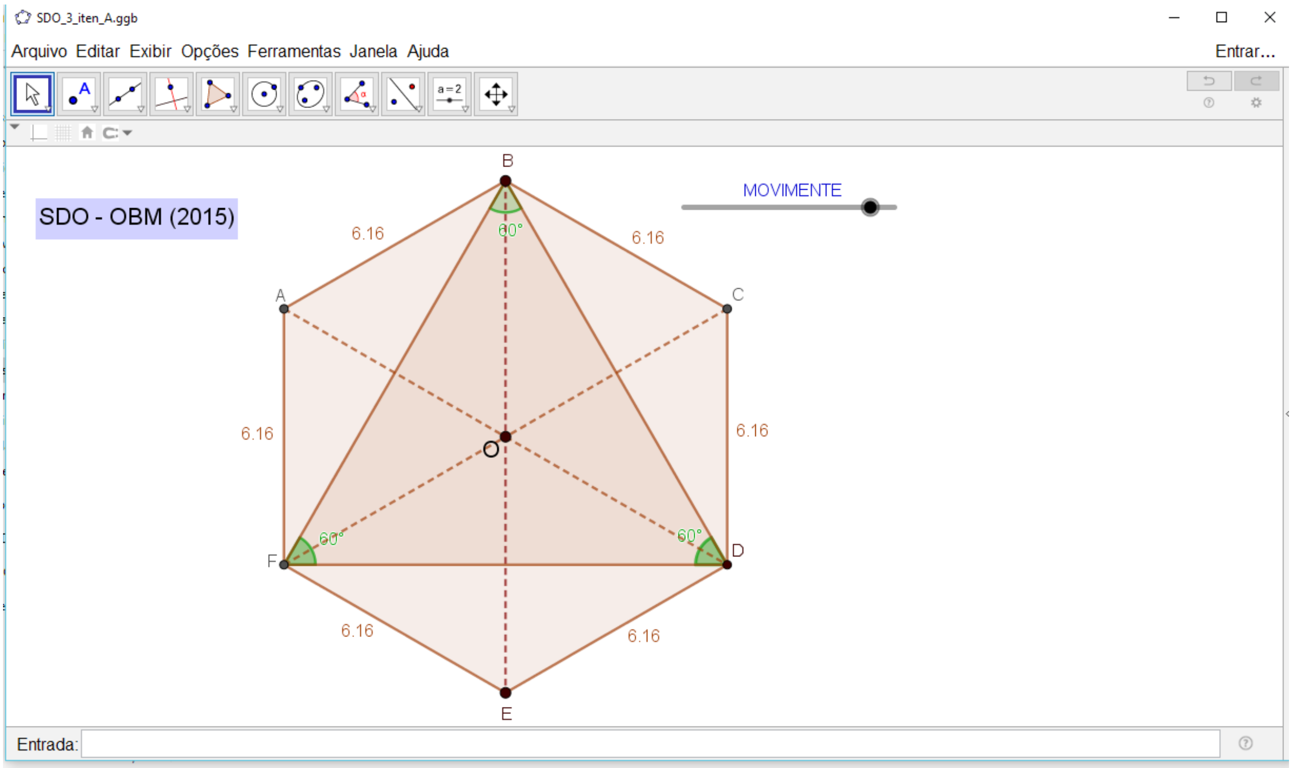


Figura 7. Representação do software GeoGebra empregado na SDO

A análise da concepção dos alunos acerca dos seus conhecimentos prévios sobre o cálculo de áreas de figuras planas e das categorias intuitivas manifestadas durante as quatro fases/dialéticas da TSD envolveu a delimitação do nosso campo conceitual. Ademais, a descrição das situações de acordo com a TSD nos serviu como referência e controle do significado (sentido) do conhecimento a ser constituído pelos estudantes.

Na próxima seção, apresentaremos e detalharemos as possíveis soluções dos estudantes. Ressaltamos que a mediação do professor se apoiará nos pressupostos da TSD. Neste trabalho, assumimos a importância de uma visão de complementaridade entre a ED e a TSD e sua relevância é registada na literatura (ARTIGUE, 2008). Detalharemos os momentos e fases de ensino previstas pela resolução da SDO, os procedimentos necessários e as possíveis estratégias que podem ser realizadas através da construção geométrica visualizada no software Geogebra.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Metodologia e Resultados

A SDO proposta foi aplicada a uma turma de alunos nível 1(6.º/7º anos) que se estão a preparar para as olimpíadas de matemática numa escola privada de Fortaleza/Ce – Brasil. Os instrumentos de coleta de dados foram produção escrita em sala de aula em grupo de quatro alunos (total de oito alunos) e registos de áudio e imagens no decorrer da aplicação da SDO.

Um problema olímpico que envolva o cálculo de áreas é bastante explorado no material didático que consultamos, sendo facilmente compreendido pelos alunos participantes. No entanto, a exploração de uma SDO, envolvendo relações implícitas e explícitas entre os alunos, o professor e o saber matemático, constitui os fundamentos da TSD. Portanto, realizamos uma SDO (BROUSSEAU, 1986, p. 399) que envolve a formulação de estratégias relacionando elementos matemáticos para a elaboração de conceitos como áreas, congruência de triângulos, decomposição de figuras planas e propriedades dos quadriláteros. Vale a pena ressaltar que não revelamos a intenção de descrever/comunicar a noção dos conceitos mencionados, o que constitui elemento de uma situação adidática, embora tenhamos planejado e realizado a transposição didática da SDO para o Geogebra. De modo sistemático seguimos as fases:

Fase 1 - Situação de Ação. Os estudantes restringiam-se ao uso de papel e lápis para a resolução de problemas olímpicos propostos durante as aulas. Assim tentavam mobilizar os raciocínios matemáticos provenientes da leitura e da identificação de elementos matemáticos presentes na situação problema. A SDO é apresentada aos alunos juntamente com a sua representação no software Geogebra (Figura 7) com o objetivo de fomentar um *feedback* a cada ação dos estudantes. Com essa intenção, identificamos uma posição concomitante com a de Brousseau que afirma "Para que um sujeito escolha diretamente os estados do meio antagónico de acordo com suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode ser levado a antecipar essas reações e levá-las em consideração em suas próprias ações" (BROUSSEAU, 1997 p.6, tradução nossa). Podemos ainda acrescentar que para Fischbein "muito frequentemente, a criança enfrenta dificuldades em sua aprendizagem, compreensão e resolução de problemas desafiadores porque suas estratégias de raciocínio são controladas por modelos inadequados. O professor deve tentar identificar tais modelos para auxiliar o estudante a corrigir seus modelos mentais ou adquirir outros mais adequados neste caso" (FISCHBEIN, 1987 p. 203).

Assim, podemos questionar os estudantes sobre as propriedades que podemos inferir da relação entre os ângulos e os lados das figuras planas. De modo particular, propomos as possibilidades de se avaliar se reconhecem os quadriláteros ABOF, BCDO e DEFO? Como são chamados? Os segmentos $\overline{BF}$, $\overline{BD}$ e $\overline{FD}$ têm algo em comum? O quê? A partir dessas questões, os estudantes relacionam as áreas dos triângulos BOF e BAF, as áreas do triângulo BCD e BOD e ainda as áreas dos triângulos DEF e DOF.

A fase inicial deve proporcionar o debate em sala de aula e os alunos têm a possibilidade de concluir que a área do triângulo BDF é metade da soma das áreas dos três losangos, que é igual à área do hexágono.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Prosseguimos com a análise dos triângulos que constituem o hexágono ABCDEF através da modelização realizada no software Geogebra (Figura 8). Então, os alunos movimentam a figura e observam que os losangos ABCO e DEFO têm, cada um, área igual à de um terço da área do hexágono, ou seja, 12 cm^2 cada. Logo, suas metades têm área de 6 cm^2 cada uma. Os triângulos equiláteros AFO e CDO têm área de 6 cm^2 cada um. Portanto, a área do quadrilátero ACDF é 4 x 6 = 24 cm^2.

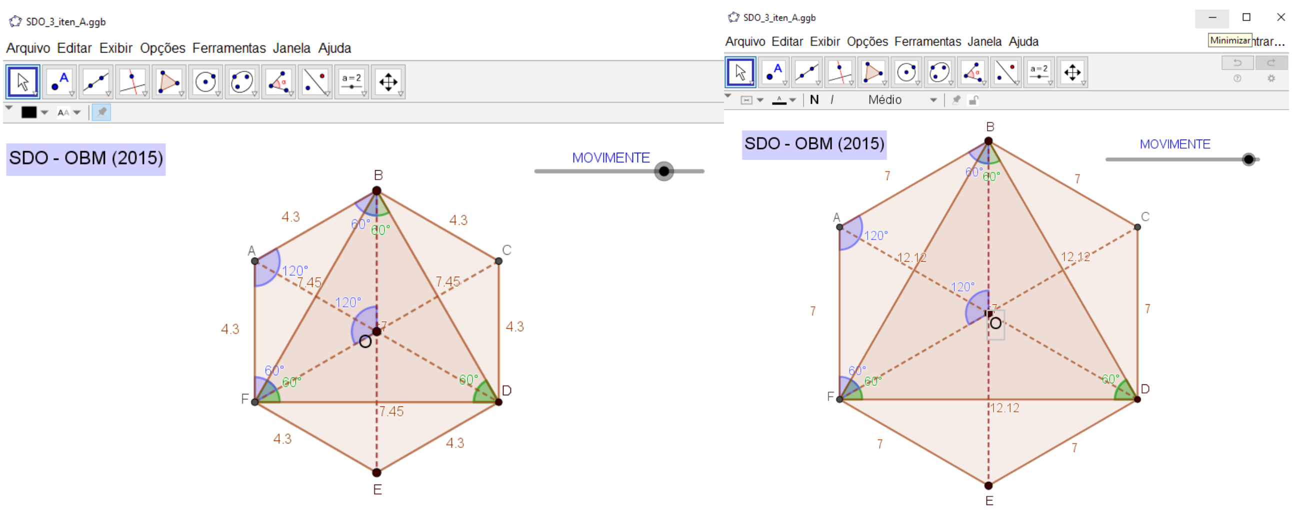


Figura 8. Identificando relações ao movimentar a construção

A mediação do professor evolui com ênfase no raciocínio intuitivo suscitado através da modelização da SDO pelo software Geogebra. Logo, nesta fase já podemos identificar as intuições afirmativas. Conforme Fischbein (1987) intuições afirmativas são representações ou interpretações de vários fatos aceites como corretos, auto-evidentes e auto-consistentes. Com a visualização da representação da SDO através do Geogebra, os alunos justificam as suas afirmações.

Por fim, nesta fase esperamos que o aluno possa julgar sua ação e ajustá-la. Na próxima fase, a troca de mensagens e informações entre os sujeitos será fundamental.

Fase 2 - Situação de Formulação. Nesta fase, os alunos são estimulados à identificação dos elementos matemáticos fundamentais a partir da análise da modelização da SDO (Figura 9) no ambiente de geometria dinâmica. Os alunos são instigados a manifestar e formular algumas conjecturas. As estratégias formuladas são originadas pela observação/percepção das propriedades que proporcionem uma maior atenção dos alunos. Com o intuito de identificar as estratégias que apresentam maiores probabilidades de êxito, promovemos o relato e a descrição das estratégias selecionadas pelos estudantes.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

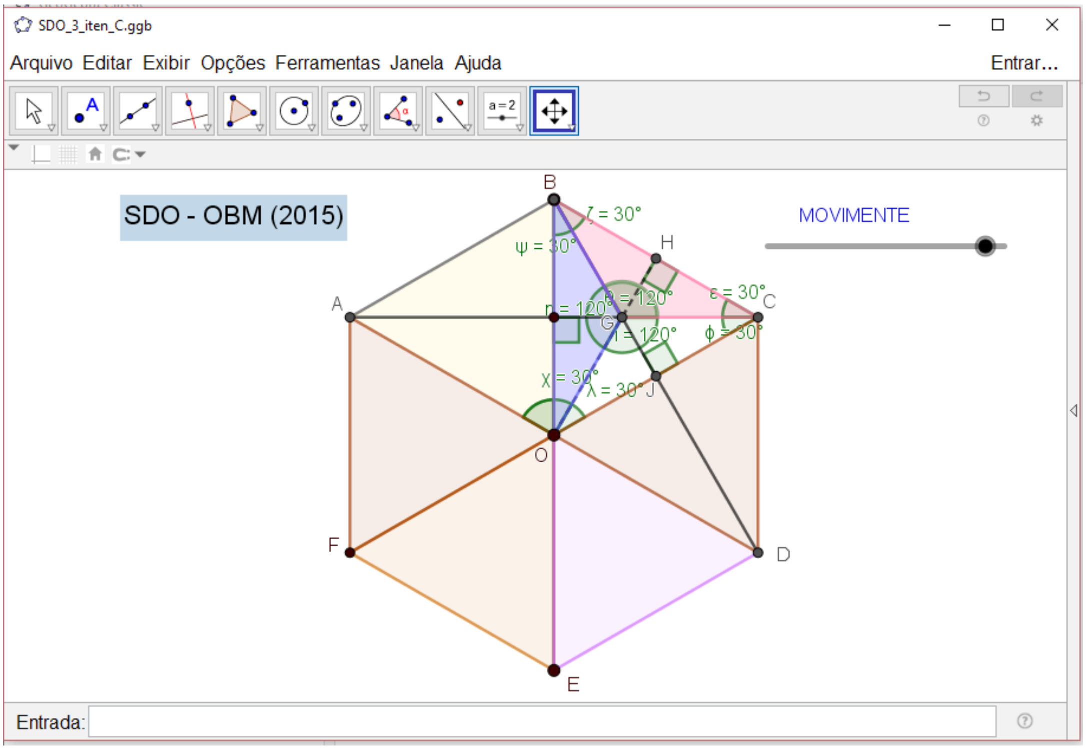


Figura 9. Relacionar elementos matemáticos na formulação de conjecturas

Os alunos devem elaborar conjecturas a respeito dos ângulos OBG e GBC e enfatizar a propriedade das diagonais de um losango. A partir daí, já podem identificar um dos casos de congruência de triângulos. Portanto, as conjecturas elaboradas devem suscitar a definição das propriedades num losango (estudar quadriláteros) e a elaboração dos casos de congruência nos triângulos. Além disso, associam a decomposição de áreas à definição de áreas equivalentes. Com isto, evidenciamos a "dialética da formulação" que, segundo Brousseau(1986) consiste em fornecer condições aos alunos para que eles construam uma linguagem compreensível para todos (ALMOULOUD, 2010, p. 38).

As observações registradas pelos alunos são formuladas com o apoio nas próprias características do software Geogebra, que não está livre de imperfeições. A transposição didática realizada dessa forma, permite aos alunos identificarem as propriedades das figuras, produzindo conflitos cognitivos e, assim, preparamos o terreno para a evolução das intuições.

Sendo assim, Alves & Borges (2011) afirmam que o conhecimento intuitivo mobilizado pode alcançar um estádio mental de equilíbrio, na medida em que o professor forneça ou sugira uma perspectiva diferenciada de interpretar o problema. Em todo caso, na condição em que os estudantes fossem realizar a mesma tarefa no ambiente axiomático usual das demonstrações

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

em Geometria, eles já manifestariam sua crença afetada no sentido de não manifestar a mesma certeza ou acreditar no resultado obtido pelo problema.

Ressaltamos que nesta fase há a possibilidade de identificarmos a manifestação da intuição conjectural. Ora, a partir desse momento a figura do professor é determinante, uma vez que ele deve ter a capacidade de prever e antecipar as possibilidades de êxito ou fracasso das estratégias assumidas pelos alunos. Por outro lado, no que concerne ao aluno, não é imediata a identificação de uma manifestação intuitiva, pois elas não ocorrem de forma isolada.

As formulações de conjecturas e a adoção de estratégias continuam, visto que há outro desafio a ser solucionado – determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF. Com a modelização da SDO (Figura 10) os alunos inferem a divisão do hexágono em triângulos congruentes que componham o triângulo procurado, trabalhando com o conceito de eixo de simetrias. Obtêm a razão entre a área do triângulo procurado e a área do hexágono. Concluem que a área do triângulo procurado é 13,5 cm². Portanto, com essas ações dos estudantes também registamos intuições conjecturais as quais apresentamos no decorrer da descrição da SDO na próxima secção.

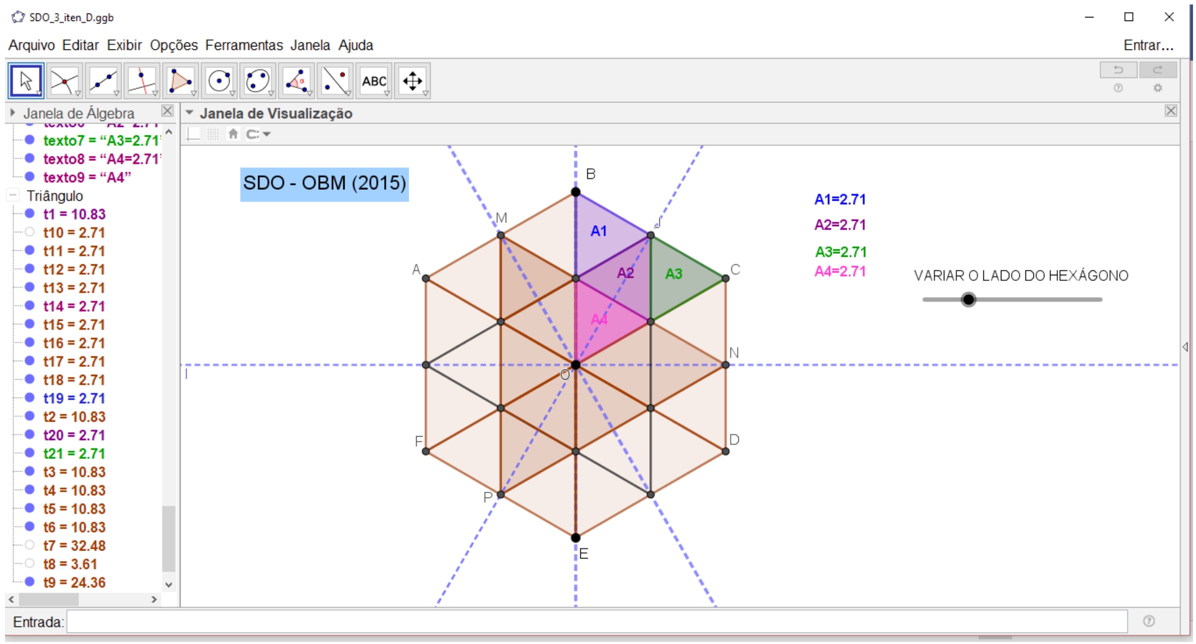


Figura 10. A visualização como componente fundamental na manifestação das categorias intuitivas

Fase 3 - Validação. Esta fase foi balizada na afirmação de Brousseau (1987) que os saberes são os meios sociais e culturais de identificação e organização. Desse modo, a partir do conhecimento construído pelos alunos, o professor suscitou a necessidade de demonstrar as estratégias assumidas.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Ao visualizar a SDO representada no software Geogebra, os estudantes devem inferir que os quadriláteros ABOF, BCDO e DEFO são todos losangos congruentes e BF, BD e FD são, respectivamente, suas diagonais congruentes. Assim, a área do triângulo BOF é igual à área do triângulo BAF, a do BCD é igual à do BOD e a do DEF é igual à área do DOF. Logo, a área do triângulo BDF é metade da soma das áreas dos três losangos, que é igual à área do hexágono. Como a área do hexágono é igual à soma das áreas dos seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada, concluímos que a área do hexágono é 6 x 6 = 36 cm^2. Logo, a área do triângulo BDF é $\frac{36}{2}$ = 18 cm^2.

Ao determinar a área do quadrilátero ACDF, os alunos podem adotar a estratégia de identificar outros losangos congruentes, como os losangos ABCO e DEFO que têm, cada um, área igual à um terço da área do hexágono, ou seja, 12 cm^2 cada. Logo, suas metades têm área de 6 cm^2 cada uma. Os triângulos equiláteros AFO e CDO têm área de 6 cm^2 cada um. Portanto, a área do quadrilátero ACDF é 4 x 6 = 24 cm^2.

Prosseguindo ainda com as relações entre os elementos matemáticos existentes na SDO, temos que OB = OC = BC, pois o triângulo BCO é equilátero. Os ângulos OBG e GBC têm ambos 30° (já que a diagonal BD do losango BCDO divide o triângulo equilátero OBC ao meio). Sendo BG lado comum, pelo caso LAL, concluímos que são congruentes os triângulos BOG e BCG. De forma semelhante concluímos que os triângulos BCG e OCG são congruentes. Como a área do triângulo BCO é 6 cm^2 e os três triângulos acima têm mesma área, concluímos que a área do triângulo BCG é $\frac{6}{3}$ = 2 cm^2.

Para determinar a área do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF do hexágono, os alunos devem perceber por simetria que o hexágono se divide em triângulos congruentes que compõem o triângulo procurado. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, CD e EF, respectivamente. Pela simetria da figura, concluem que o triângulo MNP é equilátero. Traçando o triângulo determinado pelos pontos médios dos três lados restantes, obtemos um triângulo congruente ao triângulo MNP, simétrico ao mesmo em relação à reta BE. Dessa forma, dividimos o hexágono original em 24 triângulos menores e congruentes. O triângulo MNP é composto por 9 desses triângulos. Sua área, portanto, é igual a $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ da área do hexágono, cuja área é 36 cm^2. Portando, a área do triângulo é $\frac{3}{8}$ x 36 = 13,5 cm^2.

Vale ressaltar que, neste momento, os aprendizes validam um modelo matemático elaborado ou empregado para a resolução da SDO. Almouloud (2007, p. 39) afirma que a dialética de formulação consiste em desenvolver progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações pertinentes da situação de forma adequada. Na próxima fase, indicamos uma abordagem que evita alguns equívocos manifestados pelos alunos durante o processo de resolução da SDO.

Conforme Fischbein (1987) relacionamos com esse momento a manifestação das intuições antecipatórias, pois nos referimos a uma fase no processo sistemático de resolução de problemas. No caso da intuição antecipatória, porém, os estudantes se encontram na fase de aplicação concreta de estratégias, emprego de fórmulas, elaboração de desenhos que auxiliam de modo efetivo a identificação de uma solução.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Fase 4 - Institucionalização: Nesta etapa, o professor deve explicitar e indicar as principais propriedades formais que alicerçam os conceitos elaborados nas fases anteriores.

Na perspectiva da TSD, abordamos a generalização do modelo matemático e a demonstração de conceitos que dependem dos níveis de compreensão dos estudantes em relação aos níveis de rigor e abstração (ALVES, p. 77 2016).

Recordamos ainda que Brousseau afirma que cada método particular de tratar uma noção matemática constitui o que chamamos de um design (Brousseau, 1997 p. 17). Desse modo, a exploração adequada de um software para o estudo da geometria, proporciona a possibilidade de obtermos uma variedade de estratégias que podem ser comprovadas ao analisarem os elementos matemáticos através da interatividade.

Finalmente, nesta fase o professor incorporou os novos conhecimentos matemáticos ao grupo de alunos que participou das quatro fases dialéticas de discussão e de construção de conhecimentos para a resolução da SDO. Destacamos que por se tratar de situações problemas referentes às olimpíadas de matemática e que reconhecidamente, atingem um menor número de estudantes, a contribuição de discussão do grupo de estudantes, a partir da utilização da tecnologia, permite uma maior proximidade dos raciocínios matemáticos na elaboração e validação de conjecturas.

Análise a Posteriori e Validação

Nesta fase, foram analisados os dados obtidos na fase de experimentação. Para Almouloud (2007) colocamos em funcionamento todo o dispositivo estabelecido. Portanto, a análise posteriori se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação. Na experimentação, consideramos observações realizadas sobre a sessão de ensino, as produções escritas em sala de aula e a fala durante entrevistas semiestruturadas e uma atividade em grupo de quatro alunos. Vale ressaltar que destacamos apenas os aspectos mais relevantes para a nossa investigação.

A experiência foi realizada em grupos e durou duas horas, com a aplicação da SDO proposta. Fornecemos o problema impresso e iniciamos a discussão com base na análise da SDO representada no software Geogebra.

Para o item (a) da SDO, do primeiro grupo de alunos, obtivemos a seguinte resposta: como o hexágono possuem seis triângulos equiláteros e cada um com área de 6 cm^2. Então, multiplica-se o número de triângulo por 6 cm^2, obtendo 36 cm^2 de área. Daí, dividiram 36 por 6 para obter a área de um triângulo. Vale ressaltar que não havia necessidade desse cálculo. Pois bastava multiplicar a área de um triângulo equilátero por 3 (número de triângulos que compõem a área procurada).

Na figura 11, o grupo 2 representou no quadro o caminho que percorreu para determinar a área do triângulo BFD.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

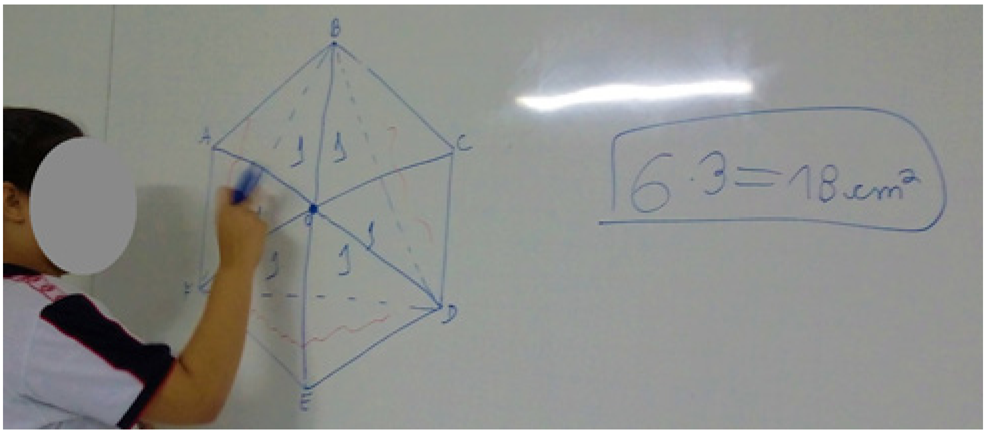


Figura 11. Exposição oral da argumentação do grupo 2

Quando os dois grupos foram questionados sobre suas conjecturas ao decorrer da resolução apresentada, o grupo 1 respondeu:

> *"Bem, ao observar aqui no Geogebra percebo que BFD também é um triângulo equilátero. Sendo assim, é como se dividisse o hexágono em seis triângulos iguais. Então, a área do hexágono é 6 x 6 = 36 cm2. Para determinar a área divido por 6 e o resultado multiplico por 3. Pronto, encontramos a área!"*

No entanto, o grupo 2 afirmou: "Temos aqui, seis triângulos iguais. Então, para calcular a área do triângulo BDF basta multiplicar seis por três".

Ao analisar o discurso do grupo 1 verificamos que os alunos ao indagarem que o triângulo BFD é equilátero, sem qualquer justificativa, retratam algo aceite como correto, sem procurar os elementos matemáticos envolvidos que possam validar essa afirmação. Os alunos manifestam assim, uma intuição afirmativa. Para Fischbein (1987), as intuições afirmativas são representações ou interpretações de vários fatos aceites como corretos, auto-evidentes e auto-consistentes. Prosseguindo com as elaborações de conjecturas o grupo se apoiou nos elementos visualizados no software Geogebra para justificar a sua afirmação.

Ao analisar o discurso do grupo 2 identificamos também a manifestação da intuição afirmativa, ao tomarem como certo que os seis triângulos são iguais, sem justificativa a priori.

Nesse momento, o professor promove a discussão entre os participantes fomentando o uso de uma linguagem matemática adequada, utilizando o software Geogebra para auxiliar na análise dos componentes matemáticos invariantes para justificar as afirmações.

Com a modelização da SDO e utilizando a decomposição de áreas, os grupos facilmente verificaram que a área do quadrilátero ACDF mede 4 x 6 = 24 cm² - Solucionando o item (b) da

Desenvolvimento
Curricular e Didática

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

SDO (Figura 12). A visualização da SDO através do software Geogebra auxiliou-os na resolução desse item de uma forma mais ágil. Podemos verificar esse pormenor no seguinte discurso:

> *"Agora percebemos aqui no Geogebra, podemos decompor a figura em seis triângulos iguais, sendo que quatro deles fazem parte do quadrilátero ACDF. Ficou fácil de ver!"*

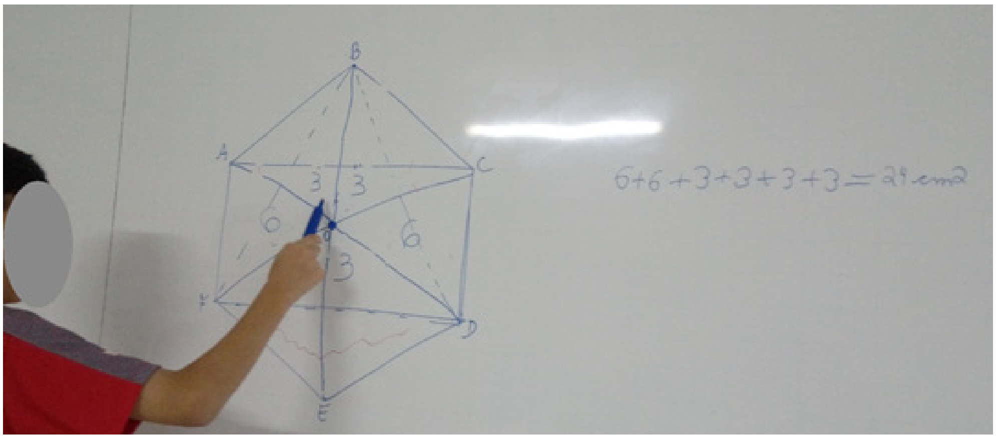


Figura 12. Estratégia representada no quadro pelo grupo 1

Esse discurso representou o eixo condutor que os alunos necessitavam para inferir as propriedades dos quadriláteros através do software Geogebra, identificando-se aqui uma intuição conjectural.

Na fase da formulação para solucionar o item (c) – os triângulos *ABC* e *BCD* sobrepõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm², da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo? Destacamos o seguinte discurso, mencionado pelo grupo 1.

> *"Ora, ao dividir o triângulo OBC ao meio. Vejo que posso dividir em mais triângulos iguais. Assim, ficam seis triângulos iguais. Eles são iguais mesmo? Porque se for mesmo, a área total é seis. Cada triângulo pequeno mede 6:6 = 1 cm². Então, temos aí dois deles, né? Aí, a área cinza mede 2 cm²."*

Analogamente, o grupo 2 explicitou estratégia semelhante, sem questionar tais afirmações.

> *"Dividimos o triângulo OBC em dois triângulos iguais ... Mas, aí vemos que dá para dividir o OBC em três triângulos iguais. Então, deve ser 2 cm² a medida da área cinza."*

Ao analisarmos a fala dos dois grupos, percebemos que o grupo 1 sente a necessidade de demonstrar sua estratégia, mesmo tendo consciência que está correta. Nesse momento, identificamos a manifestação das intuições conjecturais. Conforme Fischbein (1987) uma intuição conjectural se manifesta quando o sujeito compreende o que deve fazer para obter a solução, recordando que somente ele possui esse pensamento, mas ainda nesse momento

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

não encontrou a solução do problema ou ainda, identifica uma situação que envolve o problema e exige uma argumentação mais detalhada.

Notemos porém, que a intuição conjectural numa fase após a resolução efetiva do problema proporciona ao estudante a identificação de consequências futuras daquele resultado (Alves & Borges Neto, 2011, p.65). No nosso caso, implica no estudo dos casos de congruência de triângulos e na exploração das propriedades do losango.

Portanto, nessa fase de Formulação, o aluno necessita mostrar que há uma resposta para as suas conjecturas. Identificamos a manifestação da intuição conjectural e a partir daí instigamos os estudantes a organizar os dados numa tabela, extraídos da visualização no software GeoGebra (triângulos OBG, GBC e OGC). Prosseguimos destacando a validação dos argumentos mencionados, demarcando assim a fase da validação.

A mediação do professor consiste em relacionar as propriedades existentes entre os triângulos OBG, GBC e GCO, destacando os elementos invariantes visualizados na modelização da SDO ao movimentar o seletor. Assim, os participantes perceberam que os ângulos e os lados possuem valores constantes entre si. Assinalamos a manifestação da intuição antecipatória que suscita um dos alunos a mencionar a congruência entre os triângulos. Podemos verificar no discurso do grupo 1, a seguir:

> *"Sendo $\overline{BG}$ lado comum entre os triângulos BCG e OBG, então os triângulos são congruentes. Da mesma forma, concluímos que os triângulos BCG e OCG também são congruentes."*

Destacamos que para provar suas conjecturas, o grupo 2 apoiou-se primeiramente nas medidas dos ângulos, mas depois também mencionou as medidas dos lados, inferindo o conceito de congruência entre as figuras. Vejamos no discurso de um dos alunos:

> *Grupo 2: "Se OBC tem ângulos que medem 60°, então ele é equilátero. Se dividirmos OBC em três triângulos, temos triângulos com ângulos de 30°, 120° e 30° cada um. Aí, podemos dizer que os triângulos são iguais."*
>
> *Professor: O que vocês podem afirmar sobre os lados?*
>
> *Grupo 2: Hum... Vamos ver aqui... Acho que possuem a mesma medida.*
>
> *Professor: Veja na modelização da SDO!*
>
> *Grupo 2: Sim! Têm lados comuns e os outros possuem a mesma medida.*

Este é um momento fundamental da experiência, pois construímos o conceito de figuras congruentes, tornando-o patrimônio da turma" (Almouloud, 2007, p.40).

Portanto, o professor confrontou os alunos com as suas observações, instigando-os a recordarem os casos de congruência de triângulos e assim sentindo a necessidade de validar os seus conhecimentos. Destacamos mais uma vez neste momento, a manifestação da intuição antecipatória durante a fase da validação. As estratégias mencionadas são oriundas da interação e exploração da construção geométrica que representa a SDO. Destacamos a

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

validação realizada pelos alunos modelizada pelo software Geogebra, inferindo as propriedades do losango e os casos de congruência de triângulos.

Prosseguimos ainda na fase da validação com a resolução do item (d - Qual é a área, em cm^2,

do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados *AB*, *CD* e *EF*?). O grupo 1 enfrentou dificuldades na resolução deste item, optando por fazer uma representação da situação no caderno (Figura 13). O grupo 2 preferiu ir ao quadro demonstrar a sua estratégia (Figura 15). Podemos destacar a argumentação do grupo 2:

"Percebi que cada triângulo menor representa $\frac{1}{4}$ dos triângulos que formam o hexágono. Então, eu fiz a divisão 6:4 = 1,5 cm^2. No total que compõe o triângulo procurado são nove triângulos com cada um com área de 1,5 cm^2. Então, eu fiz 1,5 x 9 = 13,5 cm^2."

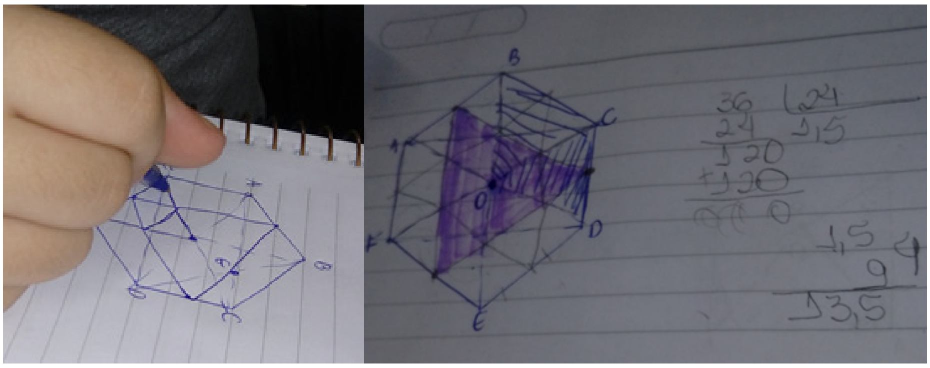


Figura 13. Representação da situação X Resolução da SDO

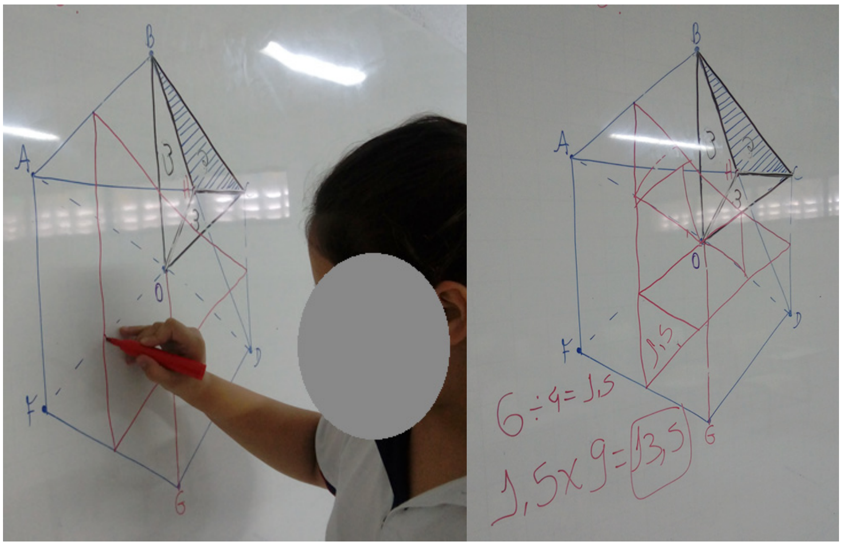


Figura 14. Estratégia exposta oralmente pelo grupo 2

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Assinalamos que os grupos demonstraram dificuldades/entraves, pois não associaram as conclusões anteriores à resolução deste item. Porém, ambos conseguiram obter estratégias semelhantes, como podemos constatar nas figuras (13 e 14).

Os dados coligidos nas etapas anteriores serviram para consubstanciar as escolhas feitas sobre o estatuto final do saber na fase de institucionalização. Na seção seguinte, indicamos os elementos mais importantes desta investigação.

Conclusões

Com base na Engenharia Didática – ED, realizamos as análises internas e pudemos verificar a validade da situação didática olímpica proposta, desenvolvida e mediada na fase de experimentação. Verificamos o uso de abordagens didáticas envolvendo uma visão de complementaridade entre a ED e a TDS promovendo um clima de investigação em sala de aula. O processo sistemático de estruturação de situações didáticas olímpicas – SDO apresenta o potencial de permitir sua replicabilidade (ARTIGUE, 1995, p.51) em outras experimentações, além de permitir a ampliação para a construção de novos conceitos. No caso exposto desta investigação, além do cálculo de áreas, também podemos estudar as propriedades dos quadriláteros e os casos de congruência de triângulos.

De modo análogo ao enfatizado por Artigue (2008, p.4-5), na nossa investigação a complementaridade entre a ED e a TSD na fase de experimentação, permitiu uma prática controlada na intervenção no ambiente de sala de aula e, sobretudo, proporcionou a compreensão das práxis do professor atuante no contexto das olimpíadas de matemática. Essas observações confirmam/indicam que alcançamos um dos nossos objetivos específicos.

Na fase das análises preliminares ou prévias, com origem na SDO selecionada, foi possível a realização/estruturação de uma ED com um tema do contexto do ensino de olimpíadas de matemática relativo a geometria plana – o cálculo de áreas que comumente é apresentado aos alunos com o uso de fórmulas. A SDO proposta suscitou sua resolução sem o uso de fórmulas, baseada na modelização através do software Geogebra, mediada pelo professor sob os pressupostos das categorias intuitivas de Fishbein.

Vejamos na figura 15, as relações existentes entre a TSD e a manifestação das categorias intuitivas que podem ser exploradas no contexto das olimpíadas de matemática.

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

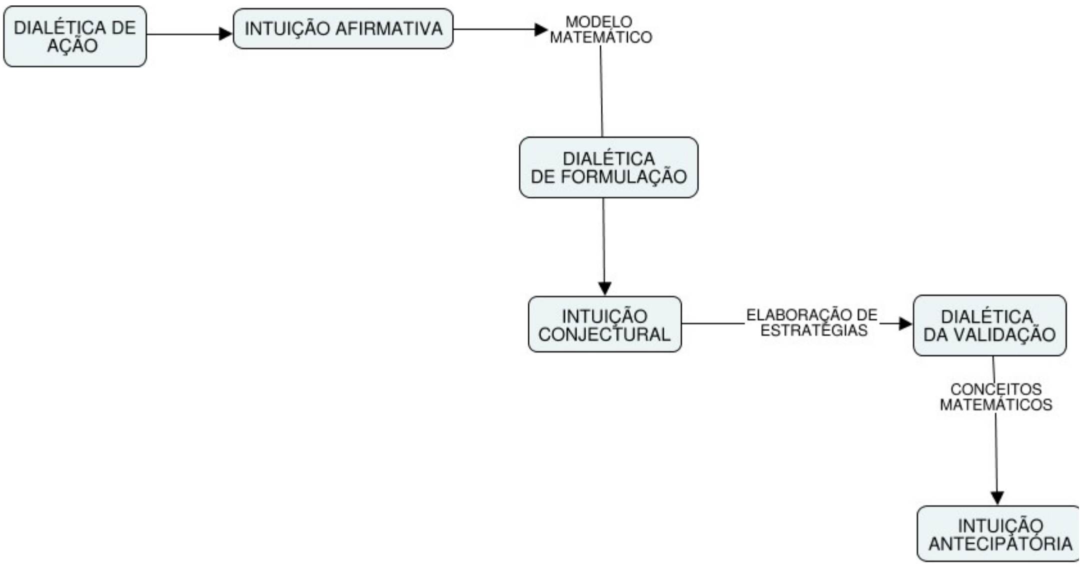


Figura 15. Relações existentes entre a TSD e as Categorias Intuitivas de Fishbein

Na fase de experimentação da ED, verificamos que os quatro itens que constituem a SDO representada através do software Geogebra possibilitaram o engajamento dos dois grupos da turma olímpica. De modo mais preciso, na fase da ação, os alunos conjecturaram a possibilidade da decomposição de áreas para o seu cálculo.

Ademais, na fase da validação, os sujeitos manifestaram algumas propriedades inéditas pra eles, como podemos observar nas análises. Na fase de formulação e fase de validação, podemos verificar a manifestação das intuições conjecturais e antecipatórias, respectivamente. Esse pormenor permite, por parte dos alunos, a elaboração de algumas propriedades inéditas, como podemos observar nas análises. Na fase de análise a posteriori e validação da ED, constatamos, a partir dos dados coletados, que os alunos manifestaram familiaridade com os casos de congruência de triângulos.

Destacamos que o momento didático em que precisamos validar a elaboração de um novo conceito descoberto durante a situação didática foi fundamental, uma vez que registamos dificuldades recorrentes entre os dois grupos. Ademais, registamos similaridade de estratégias, por meio do consenso e resultado do debate estabelecido em sala de aula, entre os sujeitos participantes da experiência. Por fim, sublinhamos que a visão pedagógica do uso que fizemos nesta experiência apoiada nos fundamentos da ED envolve certamente uma visão de formação de professores de Matemática (ALVES, 2011a; 2011b). Esse pormenor fortalece a necessidade de uma base consistente relativa aos saberes em relação ao contexto das olimpíadas de matemática. Nessa perspectiva, a aplicação da Engenharia Didática pode funcionar como componente importante no contexto das olimpíadas de matemática, na medida que reconhecemos SDO replicáveis, como menciona Artigue (1995a, p. 265-266; 1995b, p. 50).

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Referências

ALMOULOUD, S. A. (2007). Fundamentos da Didática da Matemática. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR.

ALVES, F.R.V. (2016). Categorias intuitivas para o ensino do Cálculo: descrição e implicações para o seu ensino. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. v. 9, n. 3, p. 1-21, mai./ago. Ponta Grossa, 2016.

ALVES, F. R. V.; BORGES NETO, H. (2011a). A contribuição de Efrain Fischbein e a formação do professor. Revista Conexões, Ciência e Tecnologia, v. 5, nº 1, p. 38-54.

ALVES, F. R. V. (2011b).Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação Brasileira, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 399f.

ARTIGUE, M. Ingénièrie didactique. (1995a). In: Brun, J. Didactiques des Mathématiques. Paris: Délachaux et Niestle, pp. 243-263.

ARTIGUE, M.; Douady, R; Moreno, L. & Gomez, P. (1995b). In: Ingeniéria didatica en Educacion Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 33-61. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf. Acessado em: 20/02/2017.

ARTIGUE, M. (2008) Didactical design in Mathematics Education. In: Winslon, Carl. (ed.) Nordic Research in Mathematics Education. In: Proceedings NORMA08, pp. 717, 2008. Disponível em: https://www.sensepublishers.com/files/9789087907839PR.pdf. Acessado em: 15/10/2017

BADARÓ, R. L. Do zero às medalhas: orientações aos professores de cursos preparatórios para olimpíadas de matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade federal da Bahia (UFBA), 2015.

BARDIN, L. (1979). Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70.

BRAGANÇA, B. (2013). Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT). Universidade Federal de Viçosa.

BROUSSEAU, G. (1986). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. (thése doctorat). Bourdeaux; Université Bourdeaux I. 905f.

Brousseau, G. (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal.

BROUSSEAU, G. & CHRISTOL, G. (2000) L´étude doctorale de didactique des mathématiques a l´univcrsité. In: Gazette de Mathématicien, nº 85. pp. 55-60.

BROUSSEAU, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. Éducation. & Didactique. v. 5, nº1, 1 - 6

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. (2005). Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 9: Geometria Plana. 7. Ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

FISCHBEIN, E. (1969). Enseignement Mathématique et Développement Intellectuel. In: Educational Studies in Mathematics. v. 38, n. 11, p. 290-306, 1969.

FISCHBEIN, E. (1977). Image and Concept in learning mathematics. In: Educational Studies in Mathematics. v. 8, n. 4, p. 153-165, 1977.

FISCHBEIN, E. (1978). Schemes virtuels et Schemes actifs dans l´apprentissage des Sciences. In:

Indagatio Didactica, vol. 10 (5), dezembro 2018 ISSN: 1647-3582

Revue Française de Pédagogie. N° 45, n. 15, 1978, p. 119-125.

FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in science and mathematics: an educational approach, Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

Material do POTI – Pólo Olímpico de Treinamento Intensivo. Disponível em: <http://poti.impa.br/index.php/site/material> Acesso em: 17 de Julho de 2017.

MUNIZ NETO, A. C. (2012). Tópicos de Matemática Elementar. Vol 2: Geometria Euclidiana Plana. 1. Ed. Rio de janeiro: SBM, 2012.

SANTOS. A. A.; ALVES, F.R.V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. Acta Scientiae – Revista de Ensino e Ciências e Matemática. v.19 n.3 p. 447-465, maio/jun. 2017. Canoas.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M.(2013). Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Zetetiké, Campinas, SP, v.21, n.39, p.155-168, jan./jun.