Desenvolvimento
Curricular e Didática

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

# Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática

## An Exploration of the Padovan Sequence in a Mathematics Degree Course

**Renata Passos Machado Vieira**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
re.passosm@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-1966-7097

**Francisco Regis Vieira Alves**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr
http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

**Paula Maria Machado Cruz Catarino**
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6917-5093

**Resumo**

O artigo reporta uma experiência de ensino com recurso à metodologia da Engenharia Didática (ED) aplicada ao ensino e exploração da Sequência de Padovan. Esta experiência foi conduzida numa turma de licenciatura em Matemática no Ceará-Brasil e conta com a participação de cinco estudantes. Foi elaborado um questionário contendo três situações-problema, das quais foram analisadas as resoluções desses professores em formação. De modo específico, investigou-se, a partir de conceitos básicos referentes a esta sequência, a fórmula de Binet, função geradora e construção da fórmula de recorrência. Esse fato deu-se na fase de experimentação da ED, sendo então complementada, nesta fase, com uma metodologia de ensino (Teoria das Situações Didáticas –TSD). Nas demais fases os dados coletados são discutidos, e assim realizada uma validação interna desta pesquisa. Pode-se destacar que os estudantes apresentaram dificuldades em conjecturar seus argumentos formulados nas fases iniciais. O professor torna-se então responsável por intermediar essas discussões, mediando os estudantes para que haja demonstração e validação desses conceitos matemáticos.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática; investigação; Sequência de Padovan; Teoria das Situações Didáticas.

**Abstract**

The article reports a teaching experience using the Didactic Engineering (DE) methodology applied to the teaching and exploration of the Padovan Sequence. This experiment was conducted in a Mathematics undergraduate class in Ceará-Brazil and has the participation of five students. A

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

questionnaire containing three problem situations was elaborated, from which the resolutions of these teachers information were analyzed. Specifically, it was investigated, from basic concepts related to this sequence, the Binet formula, generating function and construction of the recurrence formula. This fact occurred in the experimentation phase of DE, being complimented, in this phase, with a teaching methodology (Theory of Didactic Situations - TSD). In the other phases, the collected data is discussed, and thus an internal validation of this research is performed. It can be noted that the students had difficulties conjecturing their arguments formulated in the early stages. The teacher then becomes responsible for mediating these discussions, mediating the students to demonstrate and validate these mathematical concepts.

**Keywords:** Didactic Engineering; investigation; Padovan sequence; Didactic Situations Theory.

**Resumen**

El artículo informa sobre una experiencia docente utilizando la metodología de Ingeniería Didáctica (DE) aplicada a la enseñanza y exploración de la Secuencia de Padovan. Este experimento se realizó en una clase de pregrado de Matemáticas en Ceará-Brasil y cuenta con la participación de cinco estudiantes. Se elaboró un cuestionario con tres situaciones problemáticas, a partir del cual se analizaron las resoluciones de estos docentes en formación. Específicamente, se investigó, a partir de conceptos básicos relacionados con esta secuencia, la fórmula de Binet, la función generadora y la construcción de la fórmula de recurrencia. Este hecho ocurrió en la fase de experimentación de DE, complementado, en esta fase, con una metodología de enseñanza (Teoría de situaciones didácticas - TSD). En las otras fases se discuten los datos recopilados y, por lo tanto, se realiza una validación interna de esta investigación. Cabe señalar que los estudiantes tuvieron dificultades para conjeturar sus argumentos formulados en las primeras etapas. El maestro se hace responsable de mediar estas discusiones, mediar a los estudiantes para demostrar y validar estos conceptos matemáticos.

**Palabras clave: I**ngeniería Didáctica; investigación; Secuencia de Padovan; Teoría de Situaciones Didácticas.

## Introdução

Tem-se notado que nos últimos anos, muitos professores desenvolvem pesquisas durante suas respectivas formações acadêmicas de pós-graduações, e essas acabam por não chegar à sala de aula, seja por falta de contextualização ou pela falta de investigação de outros professores (Vieira & Alves, 2019a). Contudo, muitas pesquisas estão sendo realizadas para que ocorra a melhoria do ensino e aprendizagem em Matemática, utilizando metodologias de pesquisa e ensino para que haja um melhor aproveitamento deste processo.

Diante disso, neste trabalho são criadas situações-problema possibilitando aos estudantes a mobilização e a exploração de conceitos matemáticos associados e extraídos da Sequência de Padovan, destacando o seu processo de evolução e histórico. Vale salientar que este

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

conteúdo é pouco conhecido e ausente em livros de História da Matemática, onde se aborda somente uma outra sequência, a saber a Sequência de Fibonacci. Ficando outras sequências sem serem estudadas, tais como a Sequência de Padovan, a qual será relatada nesta pesquisa.

Algumas discussões referentes ao conteúdo dos números de Fibonacci ocorrem em trabalhos de ensino de matemática, realizando um estudo com o objetivo de ensinar as propriedades relacionadas ao processo histórico e evolutivo desta sequência. A Sequência de Padovan, como tantas outras sequências, não se encontra entre as que os professores mais utilizam quando pretendem abordar tópicos relacionados com sucessões definidas por recorrência, possuindo sua grande maioria de trabalhos encontrados apenas em revistas de matemática pura. Com isso, sentiu-se a necessidade de relacionar tal conteúdo com a área de ensino.

Neste trabalho, propôs-se realizar uma transposição didática deste conteúdo, transformando-o assim num conteúdo a ser ensinado, e com isso aprimorando o processo de ensino e aprendizagem no curso de formação inicial de professores.

De início é realizada uma abordagem sobre esses números, onde a partir daí é utlizada uma metodologia de pesquisa, Engenharia Didática – ED de Artigue (1984) surgida na França no início de 1980. Vendo a necessidade de utilizar uma metodologia de ensino durante a aplicação deste trabalho, utilizou-se a Teoria das Situações Didáticas – TSD de Brousseau (1986). A ED possui o trabalho similar ao de um engenheiro, onde o professor deverá realizar planejamentos de acordo com o obstáculo do aluno. A TSD analisa o comportamento dos alunos durante a experimentação, dando um cunho mais investigativo a este processo.

Partindo dos estudos realizados sobre a Sequência de Fibonacci, constituiu-se a problemática que norteou esta pesquisa: *Como desenvolver uma ED em associação com a TSD através de estudos sobre o processo evolutivo da Sequência de Padovan?*

Visando responder a esta pergunta, foram criadas situações de ensino e então aplicadas no curso de formação inicial de professores, curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de História da Matemática com um público de cinco estudantes.

A seguir, as demais seções apresentam o desenvolvimento desta pesquisa, iniciando com o planejamento, detalhando ainda metodologia utilizada, até à experimentação e resultados deste trabalho.

## Contextualização teórica

O presente trabalho apresenta como objetivo geral de desenvolver uma ED em associação com a TSD atraés de estudos referentes ao processo evolutivo da Sequência de Padovan. Visando alcançar o objetivo geral, são traçados os objetivos específicos, sendo esses: introduzir o conteúdo de Sequência de Padovan, até então pouco conhecido e encontrado na literatura; explorar através de situações de ensino a fórmula de Binet, função geradora e construção da fórmula de recorrência da Sequência de Padovan, fudamentada na ED e na TSD.

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

No decorrer desta pesquisa, adota-se a ED como metodologia de pesquisa, e em sua fase de experimentação utiliza-se a TSD como metodologia de ensino para analisar os dados coletados. Essa aplicação aconteceu na disciplina de História da Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática de uma instituiçao de ensino superior localizada no Ceará-Brasil, após análise curricular das demais disciplinas, sendo então selecionada esta pelo fato de apresentar o conteúdo de sequências lineares em sua ementa.

De início foi realizada uma breve introdução histórica, referente à Sequência de Padovan, baseada nos trabalhos de Stewart (1996), Voet e Schoonjans (2012), Spinadel e Buitrago (2009).

### A Sequência de Padovan

Criada pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935- ), essa sequência é considerada como prima da Sequência de Fibonacci (Alsina & Nelsen, 2015), sendo a primeira uma sequência linear, recorrente, de terceira ordem e de números inteiros, em que os seus primeiros termos são dados por $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. Assim os seus dez primeiros termos iniciais são: 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9 (Stewart, 1996). Segundo Vieira e Alves (2019b) esses números são utilizados em esculturas e formas geométricas podendo então realizar uma representação geométrica a qual consta em seu trabalho.

**Definição 1.** A fórmula de recorrência da Sequência de Padovan, $P_n$ , é dada por:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$$

Weisstein (2009) descreveu o polinômio característico dessa sequência, como sendo uma equação de terceiro grau, descrita por:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

A solução para esta equação são três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e uma raiz real dada por $\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 1,32$ . Essa solução real é conhecida como número plástico, denominada por Hans van der Laan, arquiteto que desenvolveu estudos a respeito desse número.

Seja $P_n$ a sequência de Padovan e ψ a constante plástica, tem-se que (Spinadel & Buitrago, 2009):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi \approx 1,32$$

Dando ênfase ao processo histórico matemático desta sequência, pode-se destacar o holandês Hans Van Der Laan (1904 - 1991) que frequentou o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf. Utilizou a basílica cristã primitiva de abadia como exemplo para treinar arquitetos na reconstrução de igrejas após a Segunda Guerra Mundial (Voet & Schoonjans, 2012). Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura através de experimentos com pedras e depois com materiais de construção, e acabaram por descobrir um novo padrão

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

de medidas onde a construção desse padrãi se dá através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc). Este número é conhecido como número plástico ou número radiante, e foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier. Uma analogia é feita do número plástico em relação à música: na música pode-se tocar acordes, com o número radiante é possível compor paredes, salas e etc.

**A Engenharia Didática**

A ED, segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. O professor deverá criar um planejamento, de acordo com cada situação, para que os alunos consigam compreender determinados conteúdos matemáticos.

Surgida oficialmente no início dos anos 80, durante a investigação da Didática Matemática (Artigue, 2008), a ED utiliza um esquema experimental criando situações didáticas de ensino de acordo com cada situação do estudante, tentando superar assim o obstáculo epistemológico identificado. No caso dessa pesquisa, o obstáculo encontra-se no ensino da Sequência de Padovan, abordando assuntos iniciais a respeito deste conteúdo matemático, buscando investigá-lo, evidenciando o seu processo histórico e evolutivo.

Essa metodologia é dividida em quatro fases, análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação (Pais, 2002). Permitindo ainda organizar uma pesquisa voltada para o ensino de Matemática e, estudando a relação entre a teoria e a prática, essa estrutura de ensino investiga as situações da microengenharia e macroengenharia.

Na primeira fase, a fase das análises preliminares, são levantados os referenciais teóricos da pesquisa, para que possam prosseguir os estudos em relação ao conteúdo matemático abordado. Assim, foram levantados artigos que constam na literatura para então trabalhar nas aulas com os estudantes em análise, antes de aplicar a situação-problema proposta. Alves e Catarino (2019) descrevem ainda esta fase como:

> *"análise epistemológica e a demarcação/definição do campo pragmático correspondente aos planos de atuação de um grupo de professores de interesse (plano escolar, plano do posto de trabalho, plano da instituição de trabalho), análise cognitiva e das competências profissionais do grupo controle. Nessa etapa prevemos a identicação de obstáculos de natureza profissional e a compreensão dos processos de transposição profissional envolvendo, sobretudo, professores estagiários e professores experientes em um determinado posto de trabalho." (Alves & Catarino, 2019, p. 123).*

Na segunda fase, a fase de concepção e análise a priori, é escolhida a variável que pode ser microdidáticas ou macrodidáticas. A variável macrodidática analisa de forma global a ED, já a microdidática, analisa somente um determinado conteúdo abordado. Neste trabalho será

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

utilizada a variável microdidática durante a fase de experimentação, visto que existe uma certa dependência em torno do objeto de estudo referente ao ensino da Sequência de Padovan. São ainda selecionados os problemas que serão aplicados na fase seguinte, com base no obstáculo dos estudantes, acerca do problema matemático estudado. Segundo Pommer (2013) é recomendado que os conceitos investigados em sala de aula sejam apresentados aos alunos em forma de situações-problema, permitindo ao estudante participar do processo de aprendizagem, além de instigá-lo a resolvê-lo e ter autonomia na elaboração de suas estratégias.

Na terceira fase, a fase da experimentação, é realizada a coleta de dados. Porém, nesta fase, ocorre a inserção da metodologia de ensino, TSD, para que esses possam ser analisados posteriormente e discutidos com base nessa metodologia de ensino. Segundo Santos e Alves (2017):

> *"[...]etapa de aplicação das situações didáticas e coleta dos dados relativos à pesquisa. Nesta coleta, podemos fazer uso de vários instrumentais, tais como relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o corpus da pesquisa." (Santos & Alves, 2017, p. 450).*

Na última fase, a fase da análise a posteriori e validação, é realizada uma análise e discussão dos dados coletados na fase anterior. A validação pode ser interna ou externa, porém no caso desta pesquisa foi realizada uma validação interna, visto que não houve comparação dos dados coletados com outros dados em que não houve a aplicação da pesquisa. Segundo Alves e Catarino (2019):

> *"Finalmente, a análise a posteriori culmina com o processo de uma Engenharia Didática de Formação, organizada em termos de contraste envolvendo a validação e desenvolvimento das hipóteses de pesquisa, propostas no projeto das fases anteriores e o desenvolvimento de uma pesquisa com paradigma acentuadamente fenômeno-técnico. Geralmente levando à formulação de novos problemas de investigação no cenário acadêmico, relacionados tanto à pesquisa fundamental e a pesquisa de desenvolvimento profissional de professores de Matemática." (Alves & Catarino, 2019, p. 123).*

Vale salientar que essa pesquisa é enquadrada numa microengenharia, buscando desenvolver uma ED para o ensino da Sequência de Padovan. A Tabela 1, mostra de forma resumida como foi dada cada etapa da ED durante este projeto durante o ensino da Sequência de Padovan.

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

| | |
|---|---|
| Análises Preliminares | Foram determinadas as dimensões (epistemológica, cognitiva e didática) principais que definem o problema desta pesquisa, relacionando-as com o modelo de ensino. Foi realizado um levantamento bibliográfico referente à Sequência de Padovan. A dimensão epistemológica foi determinada com a evolução dos conceitos matemáticos referentes à Sequência de Padovan (fórmula de Binet, função geradora, etc.). A dimensão cognitiva determinou-se com a mobilização do pensamento intuitivo do aluno. A dimensão didática foi realizada através da transposição didática dos conceitos matemáticos associados à Sequência de Padovan, transformando-os em conteúdos a ser ensinados. |
| Concepção e análise a priori | A conceção a priori deu-se através da formulação de hipóteses didáticas, compreendendo os conteúdos associados à Sequência de Padovan como conteúdos a ser ensinados, originando a elaboração de situações-problema a ser aplicados na fase seguinte. A análise a priori, teve por base a reunião das situações-problema elaboradas, em torno do conteúdo selecionado, descrevendo os resultados esperados em cada uma das atividades propostas, fundamentada pela metodologia de ensino baseada na TSD. |
| Experimentação | Aplicação das situações-problema elaboradas, e realizados registros fotográficos, observações, gravações de áudios e entrevistas com os estudantes participantes, baseada na TSD. A aplicação foi realizada no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina de História da Matemática. |
| Análise a posteriori e validação | São analisados os dados de acordo com os registros realizados na fase anterior, e assim realizada uma discussão e validação, podendo ser interna ou externa. Porém, no caso desta pesquisa, os dados não foram comparados com outro grupo que não participou da sequência didática realizada, sendo portanto uma validação interna. Assim, foram analisados somente os estudantes que estudaram a Sequência de Padovan, com base nas situações-problema criadas e aplicadas. |

**Tabela 1 – Fases da ED aplicadas ao ensino da Sequência de Padovan**

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

**A Teoria das Situações Didáticas**

A TSD é uma metodologia de ensino desenvolvida por Brousseau (1986), sendo aplicada neste trabalho em conjunto com a ED para que sejam validados os dados coletados durante a experimentação. Esta teoria tem, como um dos objetivos primordiais da Didática da Matemática - DM, a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Os professores, alunos e o meio (milieu) são indispensáveis para a relação de ensino e aprendizagem. Souza e Lima (2014) relatam que as relações existentes entre a tríade professor-aluno-saber podem ser representadas através de um triângulo didático.

Oliveira e Alves (2019, p.180) afirmam que a TSD "tem a finalidade de estimular o cognitivo do aluno no sentido de desenvolver um conhecimento matemático teórico, através da realização das fases de ação, formulação e validação".

Segundo Santos e Alves (2018), a TSD possibilita a classificação de situações, envolvendo dialéticas de interação entre os sujeitos e o meio (milieu), sendo dividida em quatro situações: ação, formulação, validação e institucionalização.

Situação de Ação

> *"O aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o milieu, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema." (Teixeira & Passos , 2013, p. 165).*

Com isso, o autor define como a fase da ação, o momento em que o estudante depara-se com o exercício proposto, sendo então analisados os dados a partir das ideias e tentativas iniciais que esses venham a ter no decorrer da atividade.

Situação de Formulação

> *"Ocorre troca de informação entre o aluno e o milieu, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar." (Teixeira & Passos, 2013, p. 165).*

Pode-se resumir que durante esta situação, os discentes irão transformar as ideias obtidas durante a situação da ação, e transformá-las em uma linguagem mais adequada, visando realizar conjecturas, teoremas e propriedades do assunto matemático abordado.

Situação de Validação

> *"Os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação,*

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

> *formulação e validação caracterizam a situação didática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador." (Teixeira & Passos, 2013, p. 165-166).*

Diante dessa afirmação, o autor deduz que nesta situação o estudante irá validar as descobertas matemáticas encontradas na fase anterior, apropriando-se dos conceitos matemáticos estudados.

Situação de Institucionalização

> *"Em que a institucionalização do saber é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno." (Teixeira & Passos, 2013, p. 166).*

Nesta última situação da TSD, o docente entra em ação revelando a intenção da situação-problema proposta. Além disso, os procedimentos matemáticos são conferidos.

Vale ressaltar ainda, que durante as situações discutidas, os estudantes possam discutir as soluções erradas da atividade proposta, pois assim poderão perceber onde estão errando, chegando mais facilmente à resolução correta. No trabalho de Alves (2016), o autor discute algumas soluções erradas que foram encontradas pelos alunos. Este é um ponto importante, pois a partir do erro dos alunos, pode-se investigar e conseguir obter a solução correta. Em muitos artigos de ED, os autores só discutem os resultados válidos, dando a entender que o processo não passou por obstáculos.

## Metodologia

Nesta seção discutiremos as situações-problema propostas para os cinco alunos matriculados na disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática com base na ED em associação com a TSD. Antes de aplicar as atividades, foi realizada uma aula expositiva para que os estudantes tivessem um embasamento teórico sobre a sequência estudada. Assim, poderíamos iniciar o processo investigativo desses números, visto que estes não são abordados na disciplina e nem em livros de História da Matemática. Essas situações propostas, segundo Almouloud (2007), devem permitir aos alunos evoluírem por iniciativa própria e assim adquirir novos conhecimentos.

A seguir, na Figura 1 são apresentadas as situações-problema propostas para a turma de formação inicial de professores.

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

**Aluno:** ____________________________________________

**Com base na aula referente à Sequência de Padovan, resolva as situações propostas:**

1) Dada a equação característica da sequência ($x^3 - x - 1 = 0$) e $\psi$ a raiz real e $\alpha, \beta$ as raízes complexas e conjugadas, respectivamente, podemos então escrever uma função baseado nesses dados, em que seja possível encontrar os termos dessa sequência sem utilizar a recorrência? (Fórmula de Binet)
2) É possível demonstrar essa equação característica, tomando como base a fórmula de recorrência (Definição 1)?
3) A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes. Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos os números que o procedem. Assim, através da função abaixo, é possível realizar operações matemáticas, para que seja possível obter esses termos.

$$g(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

Com isso, encontre a função geradora da Sequência de Padovan.

**Figura 1 - Situação-problema proposta**

Na primeira situação, espera-se que o estudante, durante a fase de ação, estabeleça a fórmula de Binet a partir de sua forma geral em que $f(n) = A_1 x_1^{\ n} + A_2 x_2^{\ n} + \ldots + A_r x_r^{\ n}$ , onde $A_1, A_2, \ldots, A_r$ são os coeficientes e $x_1, x_2, \ldots, x_r$ as raízes do polinômio característico, variando de acordo com a ordem da sequência (Witford, 1977).

Na situação de formulação, conhecendo os termos gerais, os estudantes deverão montar o sistema de equações e assim obter a fórmula de Binet da Sequência de Padovan para então calcularem os valores dos coeficientes da fórmula de Binet em função das raízes da equação ($\alpha, \beta, \psi$).

Na situação de validação, os alunos de posse da fórmula de Binet, poderão constatá-la inserindo valores para a variável n, e assim obter os termos da sequência, sem utilizar a sua recorrência. Além disso, deverão demonstrar por meios matemáticos a validade deste teorema encontrado.

Na situação de institucionalização, o professor deve entrar em ação, revelando a intenção a atividade proposta. Assim, os estudantes deverão conhecer que o objetivo desta situação-problema era determinar a fórmula de Binet, visto que para realizar o cálculo de algum termo da sequência, não necessita conhecer os seus termos anteriores. Espera-se que os discentes encontrem a fórmula de Binet em função das raízes $\alpha, \beta, \psi$ , onde a última é a única solução real, conhecida como número plástico.

Assim, $P(n) = A\psi^n + B\alpha^n + C\beta^n$ , em que:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)}, B = \frac{(\psi - 1)(\beta - 1)}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)}, C = \frac{(\psi - 1)(\alpha - 1)}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)} .$$

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

Na situação-problema 2, pretende-se que os alunos, durante a fase de ação, assumam a responsabilidade de resolver o problema proposto, investigando os procedimentos matemáticos necessários para poderem obter a equação característica a partir da recorrência vista na definição 1.

Na situação de formulação, os discentes deverão realizar mecanismos algébricos para alcançar o objetivo desta situação-problema. Assim, deverão realizar divisões de $P_n$ para posteriormente validar esta teoria. Nessa fase a linguagem utilizada pelos alunos deve passar por uma formalização.

Na situação de validação, os discentes deverão validar o procedimento com base no argumento de Spinadel e Buitrago(2009), onde este trata do limite entre os termos da sequência. Para isso é necessário que realizem algumas operações algébricas a fim de chegar à equação característica.

Na situação de institucionalização, o professor interage com os alunos, validando as suas conjecturas e, a partir da fórmula de recorrência, realiza operações algébricas, com o viés de obter a sua equação característica. É suposto que o estudante encontre a fórmula $\psi^3 - \psi - 1 = 0$.

Na situação-problema 3, espera-se que os estudantes, durante a fase de ação, diante da breve explicação sobre o conceito de função geradora, em que segundo Ferreira (2015, p.41) essa trata-se de "uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão $(a_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, mais precisamente é uma função $G(a_n, x)$ definida pela série: $G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$ ". Com isso, os estudantes devem perceber a relação existente entre a fórmula de recorrência e a função geradora resultante.

Na situação de formulação, os discentes deverão multiplicar a função g(x) por $x^2$ e $x^3$ e depois realizar a seguinte operação matemática $g(x)-x^2g(x)-x^3g(x)$ para obter a função geradora. Deve-se ainda lembrar dos valores inicias da sequência, como sendo $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Na situação de validação, utilizam-se métodos matemáticos para constatar o teorema formulado. Pode-se ainda utilizar algum recurso computacional, a fim de visualizar os termos encontrados dessa sequência.

Na situação de institucionalização, o docente revela a intenção de encontrar a função geradora, onde a partir da divisão direta, se obtêm os termos da sequência. Porém as suas respectivas posições são representadas pelos expoentes de variável x, e os termos representados pelos coeficientes do resultado da divisão direta. Espera-se que os estudantes encontrem a função geradora dada por $g(P_n, x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$, onde o numerador é dado pela expressão apresentada devido aos valores iniciais estabelecidos.

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

## Resultados

Nesta seção são analisadas as situações didáticas desenvolvidas pelos estudantes, investigando o processo de evolução da sequência, instigando os alunos a resolverem as atividades propostas para efetivar o contrato didático. Para a discussão dessas situações, utiliza-se a TSD como metodologia de ensino, analisando cada uma de suas fases diante da atividade proposta. Contudo, as questões direcionam os alunos para conhecerem a fórmula de Binet e a função geradora, que são duas formas de obtenção dos números da sequência sem necessitar conhecer os termos anteriores. Os estudantes também tomam conhecimento de como a equação característica é obtida, sendo então discutidas todas essas atividades na fase de validação, para comprovar os teoremas encontrados.

A aplicação teve início com a distribuição da lista de situações-problema e com a orientação aos alunos no sentido de interagirem entre si. Assim, conforme Oliveira (2018, p. 179) os estudantes irão buscar "sistematizar uma estratégia de resolução para, em seguida, formular argumentos que possam ser validados posteriormente". Os registros foram realizados através de gravações de áudios e fotos.

Na situação-problema 1, foi apresentado o conceito da fórmula de Binet segundo Witford (1977), dando uma base teórica aos estudantes para resolverem a atividade proposta. Durante a coleta de dados desta questão, constatou-se que os alunos sentiram dificuldade na elaboração e resolução de sistemas lineares com três equações. Porém, no decorrer da atividade conseguiram chegar à resolução correta. Assim, na Figura 2, verifica-se a fase da ação e formulação acontecendo com o Aluno A, onde este consegue montar o sistema linear a partir da fórmula de Binet geral.

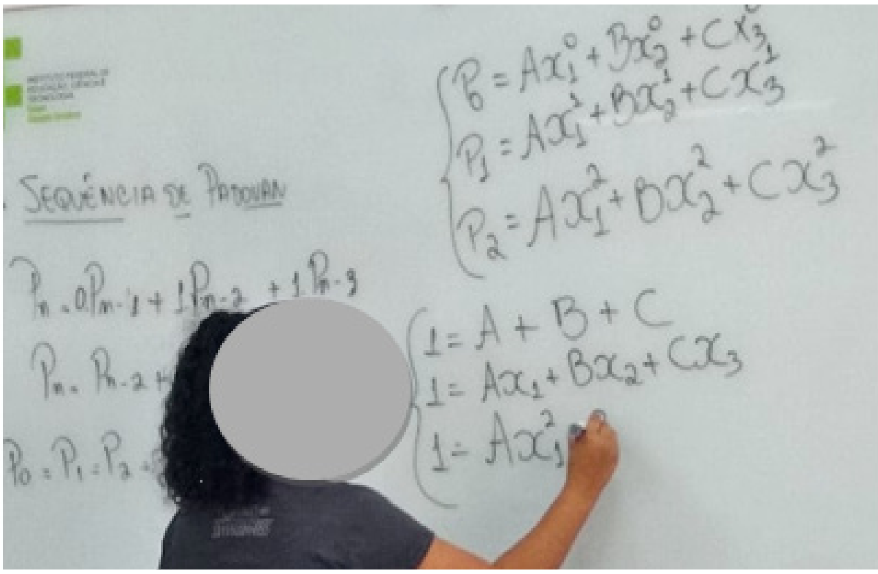


**Figura 2 - Fase da Ação e Formulação pelo Aluno A**

Desenvolvimento
Curricular e Didática

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

Com o objetivo de validar a formulação do aluno A, na Figura 3, pode-se constatar a validação da situação proposta pelo Aluno B.

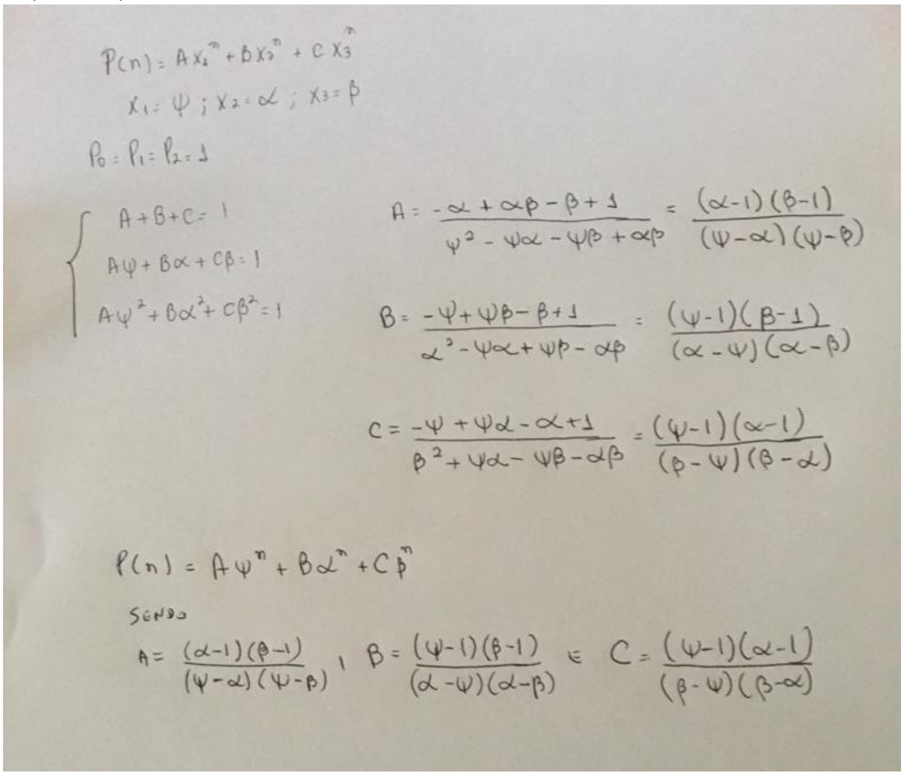

**Figura 3 - Fase da Validação pelo Aluno B**

Continuando o processo de análise das situações-problema, de início foi realizado um breve estudo sobre o limite entre os termos vizinhos da sequência estudada com base em Spinadel e Buitrago(2009) para que fosse possível o aluno conseguir investigar este processo evolutivo. Assim, verificou-se na situação-problema 2, a constatação da fase da ação na frase dita pelo Aluno E, a seguir:

> *"Deve iniciar pela recorrência da sequência e tem que descobrir algum termo pra dividir essa fórmula pra depois ir fazendo as manipulações".*

Após essa ideia de inicição, o Aluno D, foi ao quadro formular a ideia discutida pelo colega, constatando a fase de formulação mostrada na Figura 4. Percebe-se que houve a divisão de todos os termos por $P_{n-2}$ e a partir desse processo, multiplicou-se antes da igualdade pelo termo $\frac{P_{n-1}}{P_{n-1}}$ , ocorrendo alguns cancelamentos.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

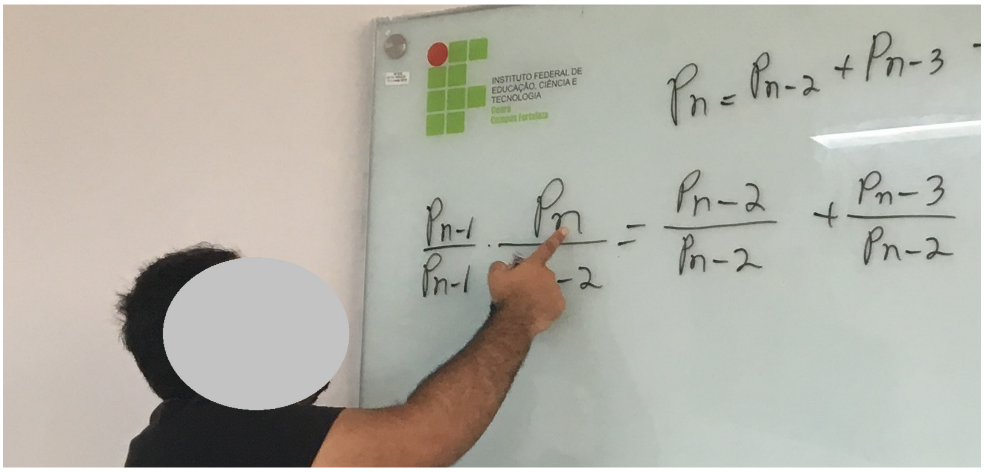


**Figura 4 - Fase da formulação pelo Aluno E**

A fase da validação foi verificada nas Figuras 5 e 6, utilizando o conceito do limite da sequência entre os seus termos vizinhos podendo chegar até à equação característica e ocorrendo a validade deste teorema, encontrando $\psi^3 - \psi - 1 = 0$.

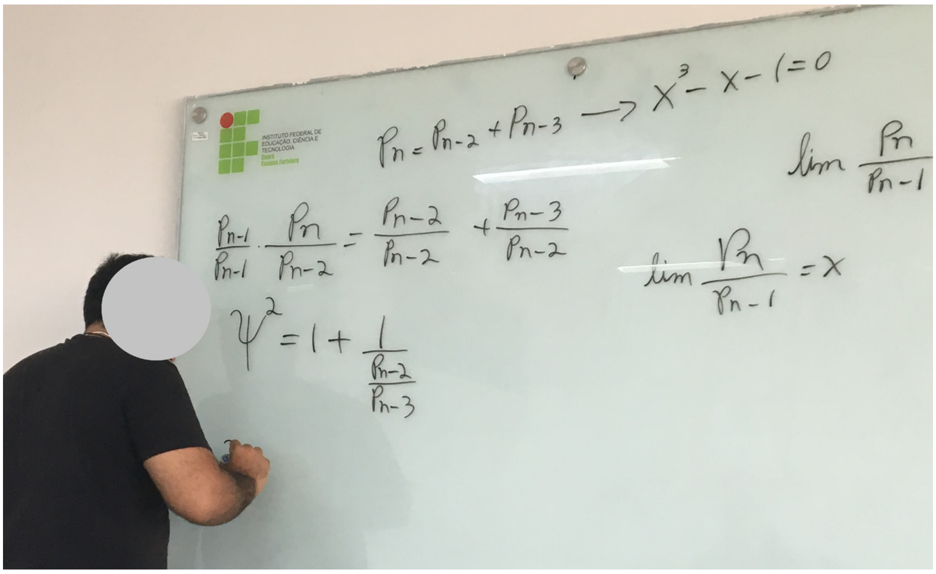


**Figura 5 - Fase da validação pelo Aluno D**

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

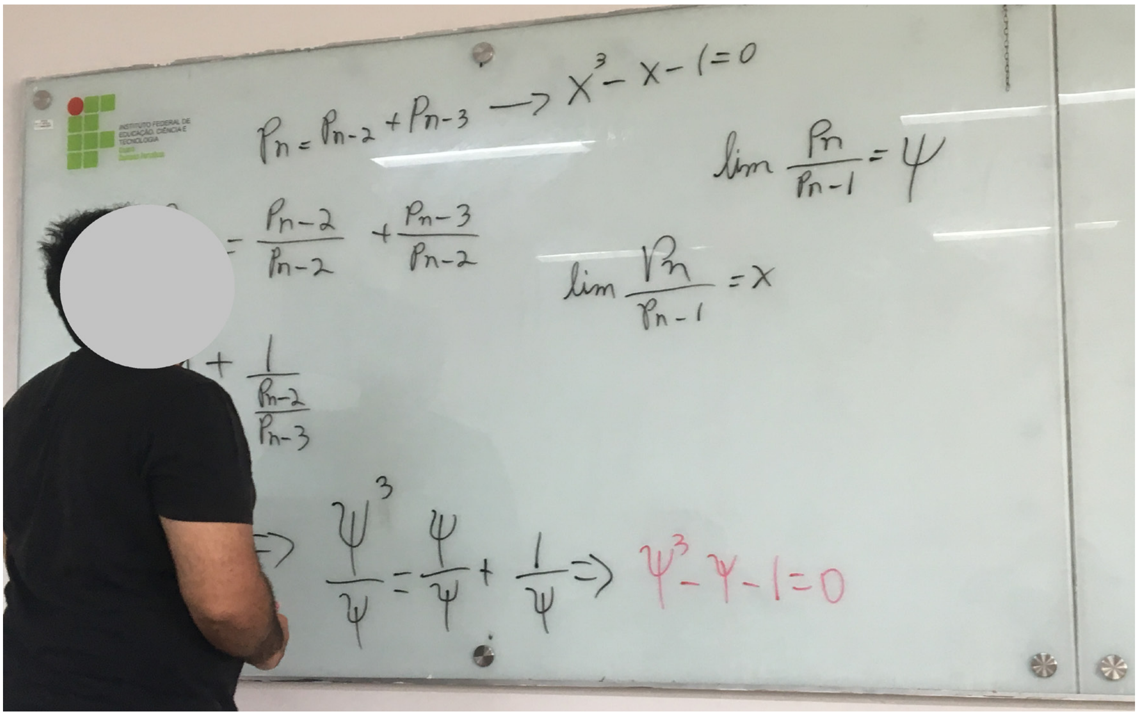


**Figura 6 – Continuação da fase da validação pelo Aluno D**

Por fim, analisando os dados coletados referentes à situação-problema 3, é apresentado inicialmente aos alunos o conceito de função geradora com base no trabalho de Koshy (2001). A identificação da fase da ação foi realizada através da frase dita pelo Aluno C, conforme escrita abaixo:

> *"[...] essa recorrência vista na definição da Sequência de Padovan pode ser escrita em função da variável x e assim utilizando a função g(x) para obter a função geradora [...]".*

Diante disso, constatou-se a fase de formulação, através da Figura 7, em que o Aluno C, após o seu argumento inicial, pode reformular a sua ideia, multiplicando a função g(x) por $x^2$ e $x^3$, expondo assim a sua ideia para os demais colegas.

Desenvolvimento
Curricular e Didática

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

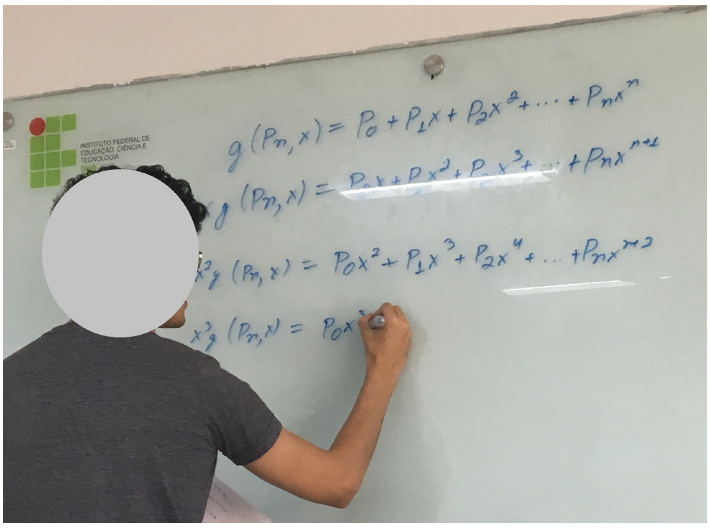


**Figura 7 – Fase da formulação pelo Aluno C**

A fase da validação é identificada na Figura 8, quando o aluno dá continuidade ao seu raciocínio, e, após a multiplicação da função realiza a operação g(x) – x²g(x) – x³g(x), a fim de obter a função geradora desta sequência dada por $g(P_n, x) = \dfrac{1+x}{1-x^2-x^3}$.

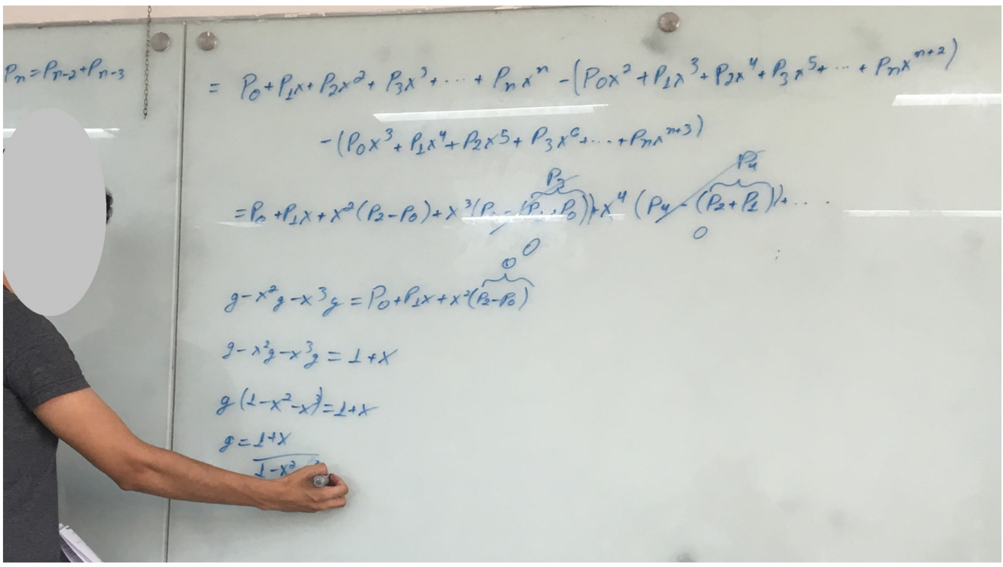


**Figura 8 – Fase da validação pelo Aluno C**

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

Contudo, é importante destacar que durante a resolução das atividades propostas foram identificados alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos, referentes ao processo de aprendizagem. A maior dificuldade foi verificada ao realizar as demonstrações matemáticas e formulação das ideiais iniciais, sendo sanada com a discussão e troca de informações entre os demais estudantes e ocorrendo a intervenção do professor na fase de institucionalização.

Ao final da aplicação realizamos uma troca de informações para obter o *feedback* do trabalho realizado. Assim, alguns alunos puderam compreender a importância dessa aplicação, relatando:

> *Aluno D: "[...] as atividades foram de grande importância para a nossa aprendizagem. Ela fez com que eu construísse o meu próprio conhecimento em relação à Sequência de Padovan. Descobri coisas que nunca tinha estudado.[...]"*

Um outro aluno, afirmou ainda que:

> *Aluno E: "[...] antes nas aulas de História da Matemática a gente só estudava sobre a história de alguns matemáticos, ficando vago para que servia realmente a disciplina. Com esta abordagem, pudemos perceber que essa disciplina pode abordar tanto o processo histórico quanto investigativo matemático[...]"*

Esses relatos mostram a importância em utilizar tais metodologias de pesquisa e ensino em conteúdos matemáticos, permitindo comprovar a validade deste trabalho, bem como isso pode melhorar o ensino e aprendizagem dos estudantes.

A aplicação nas aulas de História da Matemática, foi abordada numa perspectiva epistemológica no que diz respeito a um processo investigativo tendo por base a Sequência de Padovan, sendo possível pela efetivação do contrato didático entre o professor e os alunos diante das situações didáticas.

Essa pesquisa foi desenvolvida através de uma transposição didática em torno do conteúdo da Sequência de Padovan, organizando assim recortes nesse assunto matemático, levando para sala de aula os tópicos apresentados nas situações-problema acima apresentadas, visando assim investigar o processo evolutivo desta sequência.

## Conclusões

Fundamentada pela ED em complementariedade com a TSD, este trabalho apresentou a aplicação de situações-probema aplicadas no curso de formação inicial de professores, trazendo um conteúdo de matemática de Sequência de Padovan, sendo este escasso nos livros de História da Matemática, e encontrado em artigos de matemática pura. Diante disso, foram propostas três situações-problema resolvidas por meio de contrato didática com os alunos e analisadas diante de uma perspectiva das metodologias citadas.

Na fase de experimentação puderam observar-se algumas dificuldades dos estudantes, sendo então argumentadas e discutidas com os demais envolvidos, dando assim continuidade na resolução das questões propostas sem prejuízo. O processo de aprendizagem das relações

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

matemáticas incorporadas, foi realizado de modo implícito, sendo divulgada a real intenção da atividade somente após a sua conclusão. Vale salientar que os alunos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, estando cientes da participação e divulgação de suas imagens nesta pesquisa.

É importante ainda destacar que a escolha da disciplina deu-se por meio da análise da ementa do curso, que trata do estudo de sequências lineares e recorrentes, podendo então proporcionar aos alunos o conhecimento de uma sequência de terceira ordem, como é o caso dos números de Padovan estudados neste trabalho.

O processo histórico foi abordado nas aulas iniciais, já a parte evolutiva deu-se por meio de investigação em torno das situações-problema propostas, desenvolvendo uma concepção epistemológica no ensino de História da Matemática, associada ao estudo da estrutura algébrica dos números de Padovan. Sendo um conteúdo considerado não trivial, os estudantes necessitaram de conhecimentos prévios matemáticos para validação de suas conjecturas.

Por fim, observou-se que apesar das dificuldades encontradas, os objetivos puderam ser alcançados, realizando assim um estudo investigativo da evolução da Sequência de Padovan.

## Referências

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2015). *A mathematical space odyssey: solid geometry in the 21th century*. Washington: The Mathematical Association of America.

Alves, F.R.V., & Catarino, P. M. M. C. (2019). Situação Didática Profissional: um exemplo de aplicação da Didática Profissional para a pesquisa objetivando a atividade do professor de Matemática no Brasil. *Indagatio Didactica,* 11(1), 103-129.

Alves, F.R.V. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educação, Matemática e Pesquisa*, 18(1), 61-93.

Artigue, M. (1984). Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. *Les Cahiers Rouge des Didactiques des Mathematiques,* 8(1), 1 – 38.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9(3), 281–308.

Artigue, M. (2008). Didactical design in Mathematics Education. In: WINSLON, Carl. (ed.) Nordic Research in Mathematics Education. *NORMA*, 8, 7-17.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherchesen Didactiquedes Mathématiques*, 7(2), 33–115.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience.

Ferreira, R. de C. (2015). *Números Mórficos* (Dissertação de mestrado) Universidade Federal da Paraíba - UFPB, Paraíba, João Pessoa, Brasil.

Oliveira, R.R.de. (2018). *Engenharia Didática sobre o modelo de complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações recorrentes N-dimensionais e representações*

**Indagatio Didactica**, vol. 11 (4), dezembro 2019 ISSN: 1647-3582

*polinomiais e matriciais* (Dissertação de mestrado). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - IFCE, Fortaleza, Ceará, Brasil.

Oliveira, R. R. de., & Alves, F.R.V. (2019*). Uma Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas. Acta Scientiae*. 21(3), 170-193.

Pais, L.C. (2002). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. 2ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Pommer, W. M. (2013). *A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares*. São Paulo.

Santos, A. A. dos, & Alves, F. R. V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae,* 19(3), 447-464.

Santos, A. P. R. A., & Alves, F. R. V. (2018). O cálculo de áreas: uma aplicação da engenharia didática no contexto das Olimpíadas de Matemática. *Indagatio Didactica,* 10(5), 199-222.

Souza, C. M., & Lima, A. P. A. B. (2014). O contrato didático a partir da aplicação de uma sequência didática para o ensino da progressão aritmética. *Zetetiké*, 22(42), 31-61.

Spinadel, V. M. W. D., & Buitrago, A. R. (2009*). Towards van der laan's plastic number in the plane. Journal for Geometry and Graphics*, 13(2), 163–175.

Stewart, I. (1996). Tales of a neglected number. *Mathematical Recreations – Scientific American,* 274, 102–103.

Vieira, R. P. M., & Alves, F. R. V. (2019a). A Sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e a priori. *Research, Society and Development,* 8(8), 1-21.

Vieira, R. P. M., & Alves, F. R. V. (2019b). Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática,* 15, 24-40, Edição Iniciação Científica.

Voet, C., & Schoonjans, Y. (2012). Benidictine thought as a catalist for 20th century liturgical space: the motivation behind Dom Hans Van Der Laan's ascetic church arquitecture. *Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetural History of Network,* pp. 255–261.

Teixeira, P. J. M., & Passos, C. C. M. (2013). Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de guy brousseau. *Zetetiké-FE/Unicamp*, 21(39), 155–168.

Weisstein, E. W. (2009). Padovan Sequence. *From MathWorld - A Wolfram Web Resource*.

Witford, A. K. (1977). Binet´s formula generalized. *The Fibonacci Quarterly*, 15(1), 21–22.