ESTUDOS DO I. S. C. A. A.

ANO I

INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO

AVEIRO
1981

A Gestão e os Processos Markovianos

Exemplo de um Problema Markoviano Estacionário

Joaquim José da Cunha

1 — CONSIDERAÇÕES GERAIS

Em administração de empresas quer públicas, quer privadas, estamos longe dum conhecimento que nos permita, face a um caso, tomar uma resolução previamente determinada ou compendiada.

Assim sendo, e porque a grande maioria dos problemas são do domínio dos fenómenos aleatórios, a função administrativa torna-se assaz delicada. As grandes empresas poderão ter contabilistas, economistas, gestores empresariais, em convergência de esforços.

As pequenas empresas, verdadeiras fontes de emprego, terão no seu contabilista um pouco de tudo isto; razão pela qual, o contabilista, hoje mais que nunca, deve além da contabilidade possuir igualmente conhecimentos nos domínios do Direito, Ciências Sociais, Estatística.

A contabilidade fornece hoje exaustivamente e com precisão a situação líquida da empresa, bem como a evolução no passado. Classificar e fazer a síntese destes fenómenos, eis o que se exige ao gestor de hoje. Se à contabilidade compete a árdua missão de fornecer dados que por indução permitam o estabelecimento de leis que explicando um passado recente, ajudem a formular uma continuidade que assegure um futuro sem grandes degraus, compete igualmente ao gestor contabilista estar munido de conhecimentos profundos dos assuntos estatísticos, para poder desempenhar cabalmente a missão que empresa dele vai exigir.

O objectivo deste trabalho, embora modesto, é sensibilizar o contabilista ou gestor, para a necessidade de este ter em arquivo determinados estudos que amanhã lhe hão-de permitir a tomada em consciência, de posições com uma margem mínima de risco.

2 — CADEIAS DE MARKOV — CONSIDERAÇÕES GENÉRICAS A USAR NA RESOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM PROBLEMA ESTACIONÁRIO DA CADEIA DE MARKOV.

2.1. — Exemplo e Definição

Todas as noites, um homem ou vai ao cinema ou vai ao café.

Este homem nunca vai ao café dois dias seguidos, mas se ele vai hoje ao cinema, então no dia seguinte, a probabilidade de ir ao cinema é igual à probabilidade de ir ao café.

Do enunciado logo tiramos que :

- O espaço dos estados é dado pelo conjunto :

$$\left\{ \text{café, cinema} \right\}$$

- O acontecimento de cada dia fica dependente do que aconteceu no dia anterior.

- A matriz que traduz o enunciado é a que a seguir se indica :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matriz assim formada porquanto :

a) O homem nunca vai ao café dois dias seguidos.

b) Indo hoje ao cinema, amanhã volta a ir ao cinema ou então vai ao café.

Do exemplo, e tal como muito bem diz o Prof. Nieto de Alba em «Processos y Cadenas de Markov» todo o passado da evolução do sistema está resumido no último instante conhecido. Daqui o inferir-se que o processo fica determinado:

- Pela distribuição inicial :

$$P[X(o) \leqslant x] = P(o, x)$$

- Pelas distribuições condicionadas :

$$P\left[X(t) \leqslant x / X(s) = y\right] = P(s, y; t, x) \wedge s < t$$

Definição:

A um processo em que :

- Cada resultado pertence sempre ao conjunto espaço dos estados.
- Um acontecimento é sempre e apenas dependente do acontecimento imediatamente anterior e nunca de outros acontecimentos, chamamos cadeia de Markov.

Da definição de cadeia de Markov conclui-se que cada elemento p_{ij} é a probabilidade de que o acontecimento a_j ocorra após a_i ter ocorrido.

A um tal elemento chamamos probabilidade de transição e estas probabilidades escrevem-se na matriz :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \cdots P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \cdots P_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} \cdots P_{nn} \end{bmatrix}$$

a que chamamos matriz de transição. Nesta matriz a um estado A_i corresponde a linha:

$$P_i = (P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{in})$$

e este vector, (vector de probabilidade ou vector de estado), repesenta as probabilidades dos resultados possíveis do próximo acontecimento.

Assim, os elementos de uma tal matriz são sempre não negativos $(P_{ij} \geqslant o)$ e em cada linha a soma dos seus elementos é 1; $\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1\right)$. A matriz de transição P é pois uma matriz estocástica.

2.2. — Relação entre matriz estocástica regular e ponto fixo

- O vector linha não nulo $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um ponto fixo da matriz $\underline{P}$ se e apenas se :

$$t \cdot P = t$$

- A matriz P diz-se regular, se e apenas se, são positivos todos os elementos de alguma potência P.

TEOREMA :

Se P é uma matriz estocástica regular, então :

a) P tem um único vector de probabilidade t fixo.

b) A sucessão P, P^2, P^3, ... converge para uma matriz A em que todas as suas linhas são iguais ao ponto fixo $t = (t_1, t2', \ldots, t_n)$

c) Sendo P_i um vector de probabilidade arbitrária a sucessão $p_i P, p_i P,^2 \ldots$ converge para o ponto fixo de A.

3 — RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE APLICAÇÃO A UM PROCESSO MARKOVIANO ESTACIONÁRIO

(A lei de distribuição P (0 , x) é independente do tempo)

3.1. — Problema

Uma empresa de pesca, para descarga dos seus barcos tem em permanência um camião. Este camião assegura três viagens por dia. A descarga devidamente observada conduziu à seguinte lei de probabilidade :

Em 10 % dos casos, a descarga exige 5 viagens por dia.
Em 40 % dos casos, a descarga exige 4 viagens por dia.
Em 50 % dos casos, a descarga exige 3 viagens por dia.

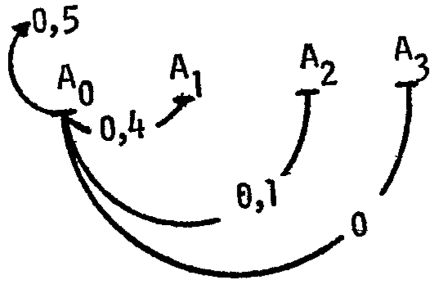
A gestão da empresa, atenta às condições dos produtos a descarregar, decidiu que, *se ao fim de um dia houvesse mais de uma viagem em atraso,* então, no dia seguinte, *seria alugado mais um camião que faria duas viagens.*

3.2. — Resolução do problema e estabelecimento da política a seguir:

3.2.1. — *Estudo da decisão tomada pela administração da empresa*

- **Estado A_0**

Partindo do pressuposto que hoje estamos na posição A_0 com zero viagens de atraso, sendo A_1 A_2 A_3 respectivamente os estados com 1, 2, 3 viagens em atraso, o camião no dia seguinte assegura 3 viagens e o esquema de probabilidade é o seguinte :



0 viagens em atraso com a probabilidade 0,5

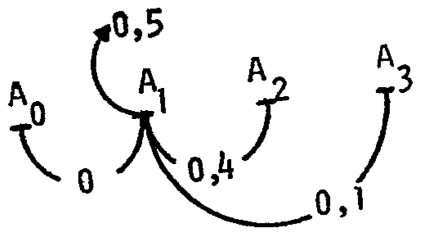
1 viagem em atraso com a probabilidade 0,4

2 viagens em atraso com a probabilidade 0,1

3 viagens em atraso com a probabilidade 0

- **Estado A_1**

Se ao fim do dia chegarmos com uma viagem de atraso, no dia seguinte, utilizaremos ainda o nosso camião e estamos em condições de assegurar 3 viagens. O esquema de probabilidade é agora o seguinte :



0 viagens em atraso com a probabilidade 0

1 viagem em atraso com a probabilidade 0,5

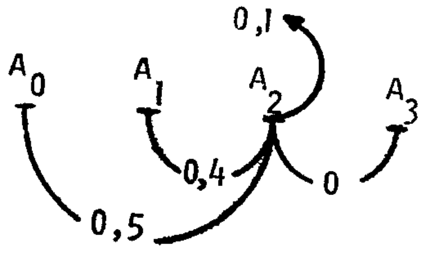
2 viagens em atraso com a probabilidade 0,4

3 viagens em atraso com a probabilidade 0,1

- **Estado A_2**

Se ao fim do dia chegarmos com 2 viagens em atraso, no dia seguinte metemos mais um camião, ficando com a possibilidade de efectuar 5 viagens.

O esquema de probabilidade tem agora a forma:



0 viagens em atraso com a probabilidade 0,5

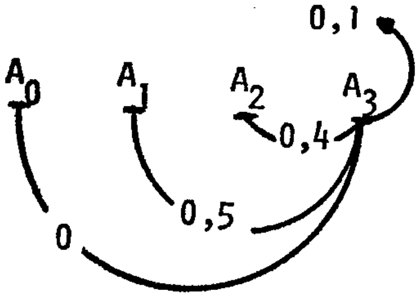
1 viagem em atraso com a probabilidade 0,4

2 viagens em atraso com a probabilidade 0,1

3 viagens em atraso com a probabilidade 0

- **Estado A_3**

Na posição A_3, o estado é agora em tudo idêntico ao estado em A_1, e daqui o esquema de probabilidade :



0 viagens em atraso com a probabilidade 0

1 viagem em atraso com a probabilidade 0,5

2 viagens em atraso com a probabilidade 0,4

3 viagens em atraso com a probabilidade 0,1

A matriz de transição, é nesta hipótese, a matriz :

$$P = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow A_0 \\ \leftarrow A_1 \\ \leftarrow A_2 \\ \leftarrow A_3 \end{array}
\end{array}$$

O problema que nos é posto é o seguinte :

«Qual é a longo prazo, a nova matriz de transição?»

Ora, pelo exposto, no número 2.2., página 77, temos sucessivamente :

$$(t_0, t_1, t_2, 1 - t_0 - t_1 - t_2) . \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} = (t_0, t_1, t_2, 1 - t_0 - t_1 - t_2)$$

produto que nos leva ao sistema de equações :

$$\begin{cases} 0{,}5\ t_0 + 0{,}5\ t_2 = t_0 \\ 0{,}4\ t_0 + 0{,}5\ t_1 + 0{,}4\ t_2 + 0{,}5\ (1 - t_0 - t_1 - t_2) = t_1 \\ 0{,}1\ t_0 + 0{,}4\ t_1 + 0{,}1\ t_2 + 0{,}4\ (1 - t_0 - t_1 - t_2) = t_2 \\ 0{,}1\ t_1 + 0{,}1\ (1 - t_0 - t_1 - t_2) = 1 - t_0 - t_1 - t_2 \end{cases}$$

de solução única, igual ao ponto fixo da nossa matriz de transição **P** :

$$t_0 = 0{,}25$$

$$t_1 = 0{,}45$$

$$t_2 = 0{,}25$$

$$\begin{aligned} t_3 &= 1 - (0{,}25 + 0{,}45 + 0{,}25) \\ &= 0{,}05 \end{aligned}$$

Esta solução, nos termos atrás expostos, permite concluir que a política seguida, se traduzirá ao fim de um dia em :

0 viagens em atraso com a probabilidade estabilizada 25 %

1 viagem em atraso com a probabilidade estabilizada 45 %

2 viagens em atraso com a probabilidade estabilizada 25 %

3 viagens em atraso com a probabilidade estabilizada 5 %

o que conduz à média $\overline{X}$:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{0 \times 25 + 1 \times 45 + 2 \times 25 + 3 \times 15}{100} \\ &= 1{,}1 \end{aligned}$$

A solução encontrada permite-nos concluir que em 30 % dos casos, para termos uma descarga eficiente, temos de recorrer ao aluguer de um camião.

Balanço da política encetada

O valor médio encontrado é igual ao regime estacionário procurado.

Custando o aluguer do camião 8 000$00 diários, a política de gestão adoptada, leva às seguintes conclusões :

- O agravamento de encargos gerais é de 2400$00/dia.
- O atraso médio dia é de 1,1 viagens.
- A percentagem de viagens diferidas para o dia seguinte é dada pela razão :

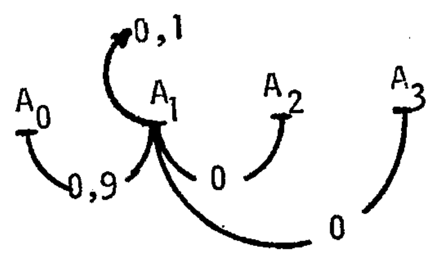
$$\frac{1{,}1}{0{,}10 \times 5 + 0{,}40 \times 4 + 0{,}50 \times 3} = \frac{1{,}1}{3{,}6}$$
$$= 30\ \%$$

3.2.2. Estudo de uma nova política

Face à natureza do produto a descarregar, às condições de funcionamento do navio, às necessidades de satisfazer encomendas, etc., deve o contabilista gestor, dispor ainda de outros elementos para melhor tomar as suas decisões.

Uma outra política de gestão seria, mantendo-se as condições enunciadas, alugar um camião logo que tivessemos uma viagem em atraso. O potencial de viagens será agora de 5 e apenas a 2.ª linha da matriz de transição estudada atrás, sofrerá alterações pelo que a nova matriz de transição é:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$



e consequentemente, usando os mesmos processos atrás estudados, a solução do sistema de Cramer é única e a que a seguir se indica :

$$t_0 = 0{,}62$$
$$t_1 = 0{,}31$$
$$t_2 = 0{,}07$$
$$t_3 = 0$$

solução que leva a concluir:

- Que a média de viagens em atraso no fim de um dia é:

$$\overline{X} = \frac{31 + 14}{100}$$

$$= 0,45$$

- Que em 38 % dos casos temos de recorrer a um camião de aluguer.

E daqui:

- O agravamento de encargos gerais é de 3 040$00/dia.
- O atraso médio é de 0,45 viagens/dia.
- A percentagem de viagens diferidas para o dia seguinte é de:

$$\frac{0,45}{3,6} = 12,5\ \%$$

4 — CONCLUSÕES

Pode por fim pôr-se a hipótese de adquirir um novo camião, o que viria a dotar a empresa de 2 camiões em permanência, acabando-se o problema de viagens em atraso.

Se este camião custar 5 000 contos, contando com encargos de amortizações, juros de capital e manutenção, estimamos em 5 000$00, o créscimo de encargos diários resultante da aquisição.

Com o estudo assim feito, pode agora o contabilista gestor, propor a solução que melhor sirva à empresa face à delicadeza e condicionamentos que a descarga pode trazer.

BIBLIOGRAFIA

- Tom. M. Apostol em «Calculus» — 2.º volume — 1972 — Editorial Reverté;
- Seymou Lipschutz em «Matemática Finita» — Colecção Schaum — Megraw-Hill-Brasil;
- Morris Degroot em «Probability and Statistics» — Addison-Wesley, London, 1975;
- Jcques Ferrier em «Statistiques et Probabilités» — Paris, 1967 — Editions D'Organisation;
- Nieto de Alba — em Estatística — Aguilar — 1973 — Madrid.