ESTUDOS DO I. S. C. A. A.
PUBLICAÇÃO ANUAL

ANO III — 1983

Número: 2-3

INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E
ADMINISTRAÇÃO DE AVEIRO

Rua João Mendonça, 17-2.º — 3800 AVEIRO

O método dos multiplicadores de Lagrange para maximizar e minimizar funções de n variáveis sujeitas a condições

Reflecções para resolver o problema com recurso à Álgebra Matricial.

JOAQUIM JOSÉ DA CUNHA *

01 — *O problema*

O problema que nos propomos resolver é o de determinar os extremos da função:

$$Z = f\,(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

na qual as variáveis estão ligadas por p equações independentes e diferenciáveis:

$$\phi_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0$$

02 — *As condições necessárias da solução ou condições de 1.ª ordem*

É sabido, que um extremo de $\underline{\underline{f}}$ deve anular a sua diferencial total.

* Professor Auxiliar no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Aveiro.

Por outras palavras, a condição necessária para que a função f tenha um extremo no ponto $X = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ é que $dZ = 0$.

Ora:

$$dZ = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (1)$$

Mas como as p equações de restrição são diferenciáveis, temos, após diferenciação, o sistema:

$$\frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_n} dx_n = 0$$

Este sistema, permite-nos determinar $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Substituindo estes valores em $\underline{\underline{1}}$, e igualando a zero a expressão daí resultante, somos conduzidos às condições primeiras da existência do extremo.

Estamos em presença, como é óbvio, de um processo bastante trabalhoso, quiçá complicado, pelo menos quanto à discussão.

Uma maneira de contornar a dificuldade é construir a função:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \emptyset_1 (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_p \emptyset_p (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

função conhecida por «Função Lagrangeana»

A diferencial total desta função é:

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} \lambda j \frac{\partial \emptyset_j}{dx_i} \right] dx_i \qquad (2)$$

e como as condições primeiras de existência de extremo obrigam a que seja $dL = 0$, vem o sistema de $n + p$ equações:

$$(3) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \emptyset_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \emptyset_p}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \emptyset_1}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \emptyset_p}{\partial x_2} = 0 \\ \text{-----------------------------------} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \emptyset_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_p \dfrac{\partial \emptyset_p}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i} = \emptyset_i (x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Sistema este, que uma vez resolvido, conduz ao ponto

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

03 — *As condições suficientes da solução ou condições de 2.ª ordem*

As condições de 2.ª ordem para averiguar da existência de extremo, exigem o conhecimento do sinal de d^2L. Diferenciando de novo a igualdade (2), e impondo as condições de 1.ª ordem, temos:

$$d^2L = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_1^2} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_1^2}\right)(dx_1)^2 + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_n^2} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_n^2}\right)(dx_n)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} +\right.$$

$$+\lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_1 \partial x_2}) \, dx_1 dx_2 + \cdots +$$

$$+ 2(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_{n-1} \partial x_n} + \cdots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_{n-1} \partial x_n}) \, dx_{n-1} dx_n$$

A igualdade que dá d^2L pode, na forma matricial, escrever-se do modo seguinte:

$$d^2L = \begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 & \cdots & dx_n & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \emptyset_1}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \emptyset_2}{\partial x_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \cdots \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \emptyset_p}{\partial x_n} & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}}_{H} \times \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que:

a) Os zeros que constam na matriz linha e na matriz coluna, são tantos quantas as equações de ligação.

b)

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_1^2} + \dots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_1^2}$$

$$a_{1n} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_1 \partial x_n} + \dots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$a_{n1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_n \partial x_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_n \partial x_1}$$

$$a_{nn} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \emptyset_1}{\partial x_n^2} + \dots + \lambda_p \frac{\partial^2 \emptyset_p}{\partial x_n^2}$$

c) A matriz H tem dimensão $(n + p) \times (n + p)$

Esta forma de escrever d^2L, após ter em consideração as condições impostas em (3), permite concluir que estamos em presença de uma forma quadrática real, porquanto:

$$d^2L = X^T \; H \; X$$

A matriz H, acima referenciada, é denominada matriz Hessiana orlada, e, porque todas as derivadas nela constantes são calculadas no ponto crítico $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, podemos afirmar que a matriz H é uma matriz de números reais.

Demonstra-se, e a demonstração pode ver-se em tratados de álgebra linear, que:

«Esta forma quadrática:

- É possitiva, se todos os menores principais * de H, que conservam a orla, de ordem $K > p$ tiverem o sinal de $(-1)^p$, sendo p o número de condições de restrição».

- É negativa, se toros os menores principais de H, que conservam a orla, de ordem $K > p$ tiverem alternadamente o sinal de $(-1)^{p+1}$, começando por este e sendo p o número de condições de restrição».

Por força deste teorema, logo ressaltam as conclusões:

03.01 — A função:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sujeita à única condição de ligação:

$$\emptyset (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

- tem um máximo local no ponto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ se todos os menores principais de H, que conservam a orla, de ordem K, tiverem o sinal de $(-)^K$ e $K = 2, 3, \dots, n$.
- tem um mínimo local no ponto $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ se todos os menores principais de H, que conservam a orla, de ordem K, forem negativos para $K = 2, \dots, n$. (**)

---

* Sendo A_n um determinante de ordem n, por menor principal de ordem K de A_n entendemos ser aquele determinante que resta de A_n quando suprimimos n — K linhas e n — K colunas.

03.02 — A função:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sujeita às condições de ligação:

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

. tem no ponto $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ um máximo local condicionado, se e apenas se, todos os menores principais de H de ordem $K > p$, que conservam a orla, alternam em sinal, sendo o primeiro, o sinal de $(-1)^{p+1}$.

. tem no ponto $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ um mínimo local condicionado, se e apenas se, todos os menores principais de H, de ordem $K > p$, que conservam a orla, têm o sinal de $(-1)^p$ (***).

04 — *Um exemplo que ilustra bem este caso, é o que se indica*

«Considere-se a função:

$$Z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

sujeitos às condições:

$$\varnothing_1 = x - y = 0$$

$$\varnothing_2 = x + y + z - 1 = 0$$

(**) O menor principal de ordem K que conserva a orla é um determinante de dimensões $(K + 1) \times (K + 1)$.

(***) O menor principal de ordem K que conserva a orla, é um determinante de dimensões $(K + p) \times (K + p)$. Quer isto dizer que a supressão de linhas ou colunas só podem ocorrer da fila 1 até à fila n e nunca na fila $(n + 1), (n + 2), \ldots (n + p)$.

A função Lagrangeana é a seguinte:

$$L = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_1 (x - y) + \lambda_2 (x + y + z - 1)$$

As condições primeiras, são como vimos na pág. 3.

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ z \quad + \lambda_2 = 0 \\ x - y \quad = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

O ponto crítico acerca do qual se vai analisar ser de máximo ou de mínimo é o ponto: $(^1/_3 , ^1/_3 , ^1/_3)$.

Como fàcilmente se reconhece é:

$$\begin{matrix} a_{11} = 1 & a_{21} = 0 & a_{31} = 0 & \dfrac{\partial \varnothing_1}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial \varnothing_2}{\partial x} = 1 \\ a_{12} = 0; & a_{22} = 0; & a_{32} = 0; & \dfrac{\partial \varnothing_1}{\partial y} = -1; & \dfrac{\partial \varnothing_2}{\partial y} = 1 \\ a_{13} = 0 & a_{23} = 0 & a_{33} = 1 & \dfrac{\partial \varnothing_1}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial \varnothing_2}{\partial z} = 1 \end{matrix}$$

e, consequentemente a matriz Hessiana, orlada, toma a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O menor principal de ordem 1 que conserva a orla é um determinante de dimensões 3×3. No nosso caso, estes menores principais de ordem 1 são:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad *$$

O menor principal de ordem 2 que conserva a orla é um determinante de dimensões 4×4. No nosso caso, estes menores principais de ordem 2 são:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

* Os menores principais, devem ser tomados com ordem superior a p, em pelo menos mais de uma linha e de uma coluna, pois que, envolvendo o determinante da orla apenas zeros, todos eles, podem, como no caso presente, vir a ser nulos.

O menor principal de ordem 3 que conserva a orla é um determinante de dimensão 5×5, que no nosso caso, é o determinante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Conclusão: Como todos os menores principais de H, que conservam a orla, e de ordem bastante superior a 2 têm o sinal de $(-1)^2$ então o ponto $(^1/_3, ^1/_3, ^1/_3)$ é um ponto de mínimo.

05 — No próximo número, retomaremos este assunto, para fazermos uma interpretação do multiplicador de Lagrange e exemplos de aplicação à Economia.

BIBLIOGRAFIA :

Campbell, S. L. + Meyer Jr, C. D. — Generalized Inverses of Linear Transformations — Pitman

RAO, S. S. — Optimization — Wiley Eastern Limited

Tilberberg, Eugene — The Structure of Economics — Mc Graw — Hill